

## К РАСЧЕТУ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНЫ ПОД ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Т. Н. Краси́льникова (Ленинград)

Предлагается метод расчета статистических характеристик пульсаций давления, основанный на рассмотрении уравнений Навье — Стокса непосредственно на самой обтекаемой поверхности. Это позволяет в случае обтекания пластины получить однозначную связь между моментом второго порядка пульсаций давления на поверхности и моментом второго порядка продольной компоненты пульсационной скорости в непосредственной близости от поверхности. Требуемая в этом случае информация о поле скоростей оказывается много меньше той, которая необходима при обычном подходе, используемом Крейчнаном [1] и Лилли [2].

1. Рассмотрим турбулентный пограничный слой несжимаемой жидкости на бесконечной плоской пластине с уравнением  $x_2 = 0$ . Координаты  $x_1$  и  $x_3$  лежат в плоскости поверхности. Течение в этом слое подчиняется уравнениям Навье — Стокса и уравнению несжимаемости

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

Причем  $v_i = 0$  при  $x_2 = 0$ . Здесь  $t$  — время,  $p$  — давление,  $\rho_0$  — плотность жидкости,  $\nu$  — вязкость,  $v_i$  — компонента скорости  $\mathbf{v}$  в направлении оси  $x_i$ .

Рассмотрим, как ведут себя эти уравнения в непосредственной окрестности гладкой плоской стенки ( $x_2 = 0$ ,  $-\infty < x_1 < +\infty$ ,  $-\infty < x_3 < +\infty$ .) В монографии О. А. Ладыженской [3] и ее последующей работе [4] доказано, что существует решение задачи (1.1), кроме того, доказано, что при достаточно гладкой поверхности  $S$  ( $S \in L_2$ ) скорость  $\mathbf{v}$  обладает непрерывными в замкнутой области производными до второго порядка включительно, а давление  $p$  обладает непрерывными производными первого порядка вплоть до границы.

На основании этого можно рассмотреть уравнения (1.1) на самой поверхности. При  $x_2 \rightarrow +0$  из первой группы уравнений (1.1) имеем три соотношения, связывающие градиенты давления со вторыми производными скоростей на поверхности

$$\frac{\partial p}{\partial x_k} \Big|_{x_2=0} = \mu \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=0} \quad \left( \mu = \frac{\nu}{\rho_0} \right) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

При этом было использовано, что на неподвижной поверхности  $x_2 = 0$  не только все  $v_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), но также  $\partial v_i / \partial t = 0$  и, кроме того,  $\partial^{k+l} v_i / \partial x_j^k \partial x_l^l = 0$  при  $j, l \neq 2$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Уравнения (1.2) с индексами  $k = 1$  и  $k = 3$  представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно давления, полностью описывающую изменение давления вдоль поверхности пластины. Отсюда легко получить одно дифференциальное уравнение типа Пуассона для распределения давления только вдоль поверхности пластины

$$\nabla_{x_1 x_3}^2 p(x_1, 0, x_3, t) = \mu \frac{\partial^3 v_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2^2 \partial x_i} \Big|_{x_2=0} \quad (i = 1, 3) \quad (1.3)$$

Линейность правой части соотношения (1.3) дает ему известное преимущество перед уравнением, используемым ранее Крейчнаном [1] и Лилли [2]:

$$\nabla_{x_1, x_2, x_3}^2 p(x_1, x_2, x_3, t) = -\rho_0 \frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.4)$$

Полученное уравнение (1.3) не противоречит уравнению (1.4) для распределения давления в любой точке турбулентного потока, а будет его частным случаем.

Расчеты характеристик давления на поверхности на основании уравнения (1.3) предпочтительнее еще потому, что можно, во-первых, обойтись меньшей информацией о поле скоростей в пограничном слое, и, во-вторых, решать двумерную задачу вместо интегрирования уравнения (1.4) во всем объеме.

Из (1.3) легко получается уравнение для пульсаций давления на поверхности в турбулентном пограничном слое

$$\nabla^2 p' (x_1, 0, x_3, t) = \mu \frac{\partial^3 v_i'}{\partial x_2^2 \partial x_i} \Big|_{x_2=0} \quad (i = 1, 3) \quad (1.5)$$

Это уравнение (1.5) справедливо как в случае, когда основной поток параллелен пластине (безградиентное обтекание), так и в случае, когда поток набегаёт на пластину под некоторым углом (течение с положительным или отрицательным градиентом среднего давления).

2. В терминах пространственно-временных трансформант Фурье — Стильтьеса [5] пульсаций скорости и давления уравнение (1.5) записывается в виде

$$dp' (k_1, 0, k_3, \omega) = \frac{ik_1\mu}{k_1^2 + k_3^2} \frac{\partial^2 dv_1'}{\partial x_2^2} (k_1, x_2, k_3, \omega) \Big|_{x_2=0} + \frac{ik_3\mu}{k_1^2 + k_3^2} \frac{\partial^2 dv_3'}{\partial x_2^2} (k_1, x_2, k_3, \omega) \Big|_{x_2=0}$$

Здесь  $\omega$  — временная частота,  $k$  ( $k_1, k_3$ ) — волновой вектор в плоскости пластины.

Учтем связь между третьими производными пульсаций скорости  $v_1'$  и  $v_3'$ , которая легко может быть получена из (1.2)

$$\frac{\partial^3 v_1'}{\partial x_2^2 \partial x_3} \Big|_{x_3=0} = \frac{\partial^3 v_3'}{\partial x_2^2 \partial x_1} \Big|_{x_2=0} \quad (2.2)$$

В результате (2.1) приводится к следующему виду:

$$dp' (k_1, 0, k_3, \omega) = \frac{i\mu}{k_1} \frac{\partial^2 dv_{v_1}'}{\partial x_2^2} (k_1, x_2, x_3', k_3, \omega) \Big|_{x_2=0} \quad (2.3)$$

Из (2.3) обычным образом определим связь между пространственно-временными спектрами пульсационного давления на стенке и продольной компоненты пульсационной скорости

$$E_{pp} (k_1, k_3, \omega) = \frac{\mu^2}{k_1^2} \frac{\partial^4 E_{v_1 v_1}}{\partial x_2^2 \partial x_2'^2} (k_1, x_2, x_2', k_3, \omega) \Big|_{x_2=x_2'=0} \quad (2.4)$$

Под  $E_{pp} (k_1, k_3, \omega)$  будем понимать среднее по ансамблю реализаций турбулентных пограничных слоев на пластинах

$$E_{pp} (k_1, k_3, \omega) = \lim \frac{\langle dp' (k_1, 0, k_3, \omega) \overline{dp' (k_1, 0, k_3, \omega)} \rangle}{dk_1 dk_3 d\omega}$$

при  $dk_1 \rightarrow 0, dk_3 \rightarrow 0, d\omega \rightarrow 0$ .

Из пространственно-временного спектра  $E_{pp} (k_1, k_3, \omega)$  можно получить взаимный спектр  $\Gamma_{pp} (\xi_1, \xi_3, \omega)$  и корреляцию давления  $R_{pp} (\xi_1, \xi_3, \tau)$ , если предположить, что спектр  $E_{pp} (k_1, k_3, \omega)$  соответствует пограничному слою, однородному в направлениях, параллельных плоскости пластины, и стационарному во времени.

Здесь  $\xi_1 = x_1 - x_1', \xi_3 = x_3 - x_3'$ ;  $\xi$  ( $\xi_1, \xi_3$ ) — расстояние между исследуемыми точками,  $\tau = t - t'$  — разность времен в исследуемых точках. В развитом турбулентном пограничном слое на гладкой пластине при нулевом градиенте среднего давления условие однородности и стационарности приблизительно выполняется.

Соотношение (2.4) — основное в работе, оно определяет статистические характеристики давления на поверхности через корреляционную функцию продольной компоненты скорости, так как

$$E_{v_1 v_1} (k_1, x_2, x_2', k_3, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{v_1 v_1} (\xi_1, x_2, x_2', \xi_3, \tau) \times \exp (ik_1 \xi_1 + ik_3 \xi_3 + i\omega \tau) d\xi_1 d\xi_3 d\tau \quad (2.5)$$

3. Наиболее подробные измерения корреляционной функции продольной компоненты скорости в пограничном слое были проведены Фавром [6,7], но и этих результатов недостаточно для того, чтобы можно было построить корреляционную функцию на разных расстояниях от стенки в ее непосредственной близости. Представим сначала  $R_{v_1 v_1}(\xi_1, x_2, x_2', \xi_3, \tau)$  через интенсивности продольной компоненты скорости на разных расстояниях от пластины  $\langle v_1'^2 \rangle^{1/2}$  и безразмерный коэффициент корреляции  $r_{v_1 v_1}(\xi_1, x_2, x_2', \xi_3, \tau)$ . Соответствующее соотношение между спектрами этих величин имеет вид

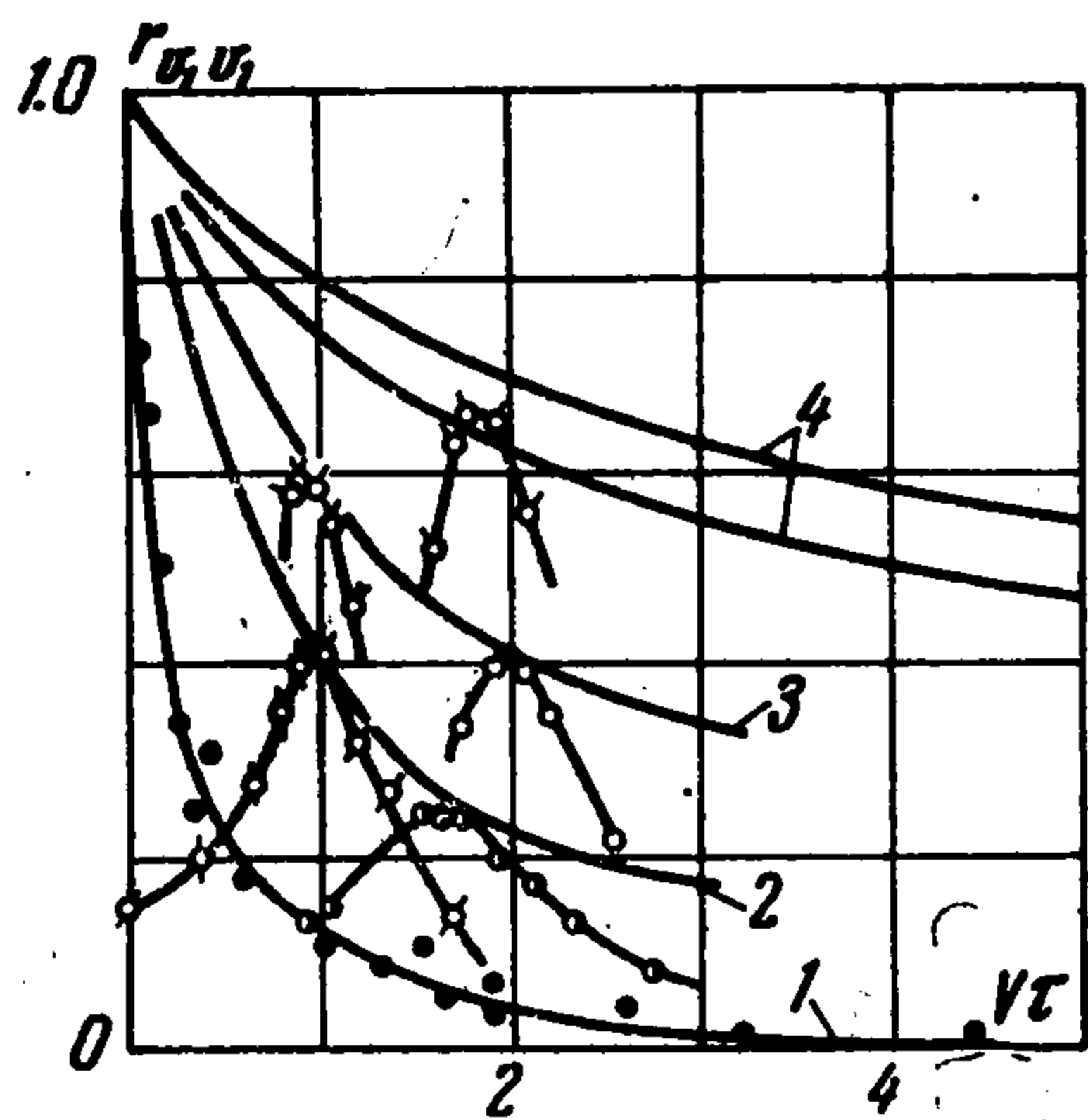
$$E_{v_1 v_1}(k_1, x_2, x_2', k_3, \omega) = \langle v_1'^2(x_2) \rangle^{1/2} \langle v_1'^2(x_2') \rangle^{1/2} e_{v_1 v_1}(k_1, x_2, x_2', k_3, \omega) \quad (3.1)$$

Здесь  $e_{v_1 v_1}$  — спектр коэффициента корреляции  $r_{v_1 v_1}$ .

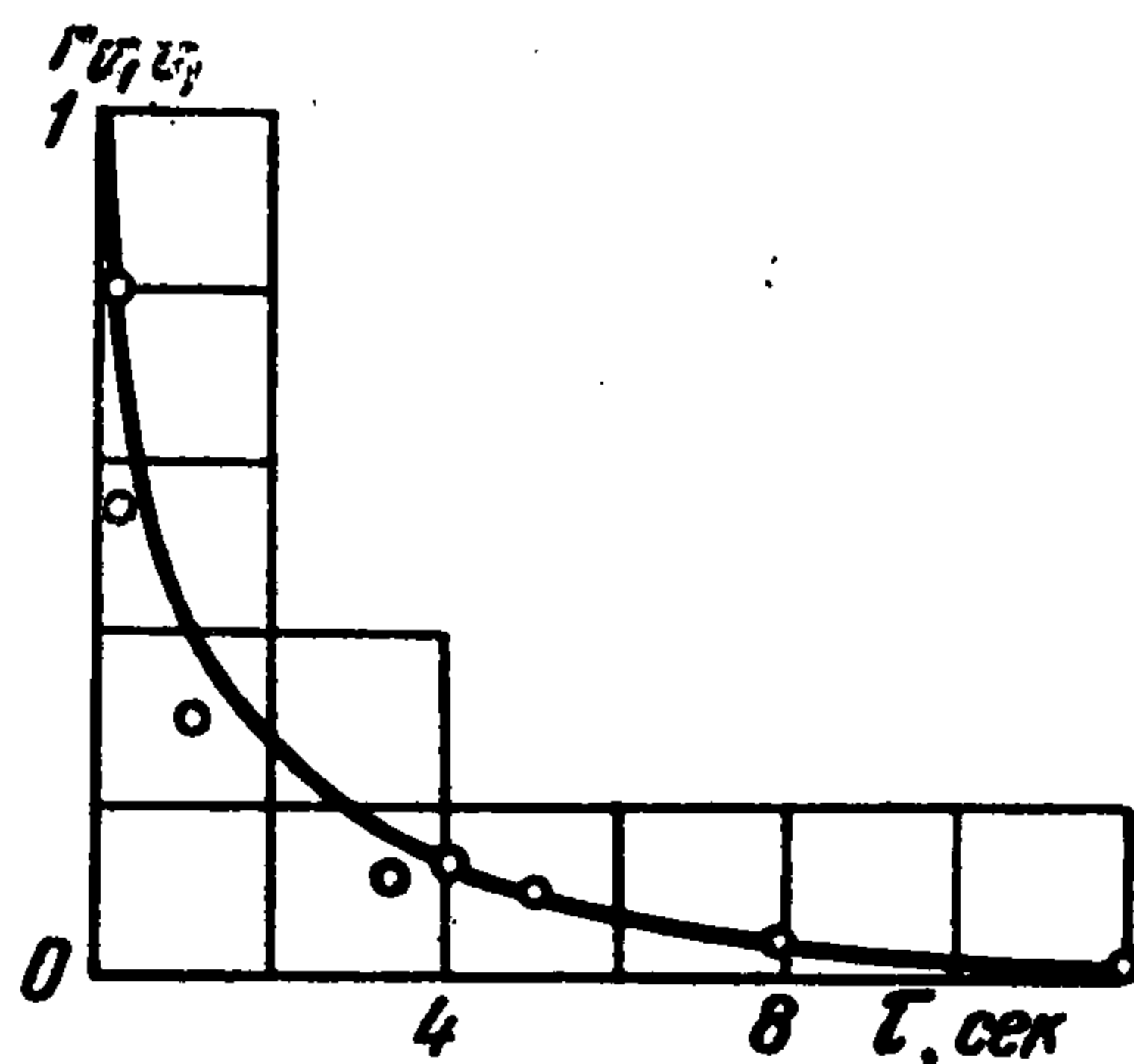
Поскольку рассматриваемый пограничный слой в дальнейшем будем предполагать однородным в плоскостях, параллельных поверхности, то интенсивность продольной компоненты будет только функцией расстояния от поверхности. Экспериментальные данные Клебанова и Лауфера по измерению интенсивности продольной компоненты, обработанные А. С. Мониным и А. М. Ягломом [8], дают в окрестности стенки

$$\langle v_1'^2(x_2) \rangle^{1/2} \approx a \frac{v^{*2} x_2}{\nu} \quad (3.2)$$

Здесь  $a \approx 0.3$  и  $v^*$  — динамическая скорость. Эксперименты [6,7] не дают возможности предсказать изменения  $e_{v_1 v_1}(k_1, x_2, x_2', k_3, \omega)$  в непосредственной близости от стенки. С помощью (2.4) нетрудно убедиться, что представление  $e_{v_1 v_1}(k_1, x_2, x_2', k_3, \omega)$  в виде  $e_{v_1 v_1}(k_1, x_2, x_2', k_3, \omega) = r_{v_1 v_1}(x_2, x_2') e_{v_1 v_1}(k_1, k_3, \omega)$  невозможно в силу ограниченности реального спектра давления  $e_{pp}(k_1, k_3, \omega)$  при  $k_1 = 0$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Одной из возможных и правдоподобных аппроксимаций спектра продольной компоненты скорости, удовлетворяющих требованию ограниченности спектра давления в ( $\cdot$ )  $k_1 = 0$  является функция вида (используемая нами в дальнейшем):

$$e_{v_1 v_1}(k_1, x_2, x_2', k_3, \omega) = \exp[-\gamma k_1 |x_2 - x_2'|] e_{v_1 v_1}(k_1, +0, +0, k_3, \omega) \quad (3.3)$$

Под  $e_{v_1 v_1}(k_1 + 0, 0, k_3, \omega)$  будем понимать пространственно-временной спектр продольной компоненты скорости, взятый для наименьших расстояний от поверхности пластины.

Экспериментальные данные Фавра [6,7] показывают, что момент второго порядка продольной компоненты удовлетворяет следующим основным требованиям: во-первых, двойная корреляция  $r_{v_1 v_1}(\xi_1, \tau)$  принимает максимальное значение при некотором оптимальном времени задержки  $T \approx \xi_1 / V$ ,  $V$  — конвективная скорость переноса неоднородностей средним движением в турбулентном пограничном слое ( $V \approx 0.8 V_0$ ). Относительно этого оптимального времени задержки коэффициент корреляции примерно симметричен. На фиг. 1 представлены кривые, соответствующие максимуму коэффициента корреляции  $r_{v_1 v_1} = r_{v_1 v_1}(\xi_1) = (\xi_1, x_2, x_2', \tau)$  при различных расстояниях

от поверхности пластины. Кривые 4 построены при  $x_2 \gg \delta$ , кривая 3 — при  $x_2 = 0.24 \delta$ , кривая 2 — при  $x_2 = 0.06 \delta$ , кривая 1 — при  $\tau = 0$ ; во-вторых, коэффициент автокорреляции  $r_{v_1 v_1}(\tau)$  (фиг. 2) и коэффициент продольной корреляции  $r_{v_1 v_1}(\xi_1)$  (фиг. 3) имеют вид, близкий к экспоненциальному. На фиг. 3 кривая 1 соответствует продольной корреляции при  $x_2 = 0.14 \delta$ , кривая 2 — при  $x_2 = 0.29 \delta$ .

Рассмотрим две модели корреляционной функции  $R_{v_1 v_1}(\xi_1, \xi_3, \tau)$ , удовлетворяющие этим экспериментальным закономерностям.

а) Тейлоровская модель замороженной турбулентности с чисто конвективным переносом неоднородностей средним движением

$$r_{v_1 v_1}(\xi_1, \xi_3, \tau) = \exp[-\alpha|\xi_1 - V\tau|] \exp[-g|\xi_3|] \quad (3.4)$$

б) Несколько усложненная модель, учитывающая вырождение турбулентных вихрей в процессе их переноса в направлении среднего движения. Коэффициент корреляции, ей соответствующий, имеет следующий вид:

$$r_{v_1 v_1}(\xi_1, \xi_3, \tau) = \exp[-\alpha|\xi_1 - V\tau| - \beta|\xi_1|] \exp[-g|\xi_3|]$$



Фиг. 3

В дальнейшем будем использовать только второй вид корреляционной функции продольной компоненты. Из сравнения (3.5) с кривыми на фиг. 1, 2 и 3 определяем величины  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\alpha = 2.0 / \delta$ ,  $\beta = 1.4 / \delta$ . Здесь  $\delta$  — толщина пограничного слоя. Величину коэффициента  $g$  определить невозможно ввиду отсутствия к настоящему времени экспериментальных данных о корреляции продольной компоненты скорости в направлении, параллельном плоскости пластины и перпендикулярном направлению основного потока.

Коэффициент  $\gamma$  выбирается из сравнения  $r_{v_1 v_1}(x_2 - x_2')$  с коэффициентом корреляции  $r_{v_1 v_1}(x_2, x_2 - x_2')$ , построенным по результатам экспериментов Фавра [6] (фиг. 4). На фиг. 4 кривая 1 соответствует коэффициенту  $r_{v_1 v_1}(x_2, x_2 - x_2')$  при расстоянии  $x_2 = 0.062 \delta$ , кривая 2 — при  $x_2 = 0.25 \delta$ , кривая 3 — при  $x_2 = 0.75 \delta$ . Анализ поведения кривой при самых малых расстояниях опорной точки  $x_2$  от поверхности пластины в окрестности  $x_2 - x_2' \approx 0$  приводит к величине  $\gamma \approx 4.9$ .

4. Для получения спектра давления на поверхности пластины подставим в правую часть решения (2.4) выражения (3.1) и (3.3) (4.1)

$$E_{pp}(k_1, k_3, \omega) = 4a^2 \gamma^2 \rho_0^2 v^{*4} e_{v_1 v_1}(k_1, +0, +0, k_3, \omega)$$

Поскольку  $\tau_w = \rho_0 v^{*2}$ , то (4.1) перепишем в виде (4.2)

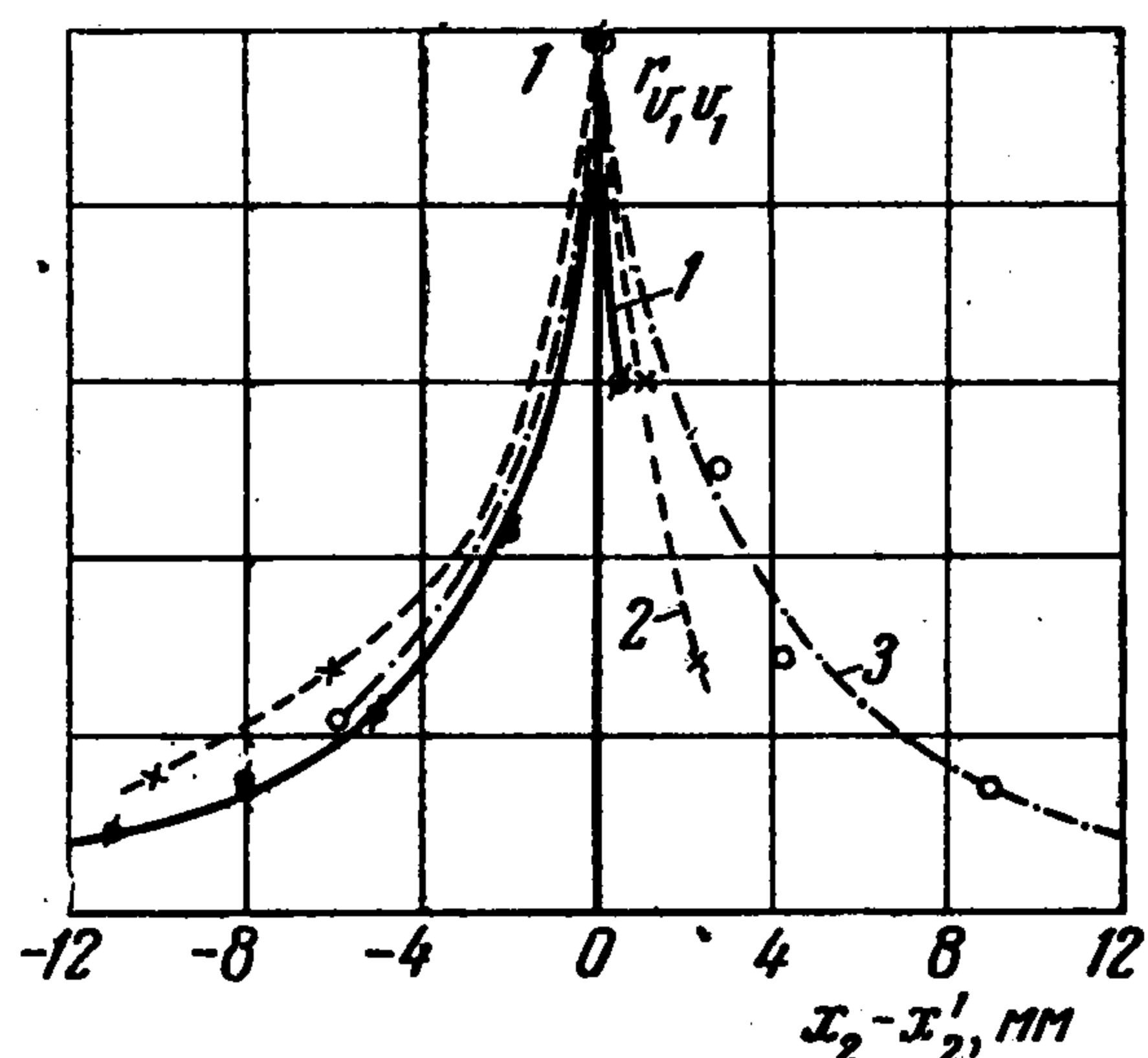
$$E_{pp}(k_1, k_3, \omega) = 4a^2 \gamma^2 \tau_w^2 e_{v_1 v_1}(k_1, +0, +0, k_3, \omega)$$

Переходя в (4.2) от спектров к корреляционным функциям, получим взаимный спектр давления (4.3)

$$\Gamma_{pp}(\xi_1, \xi_3, \omega) = 4a^2 \gamma^2 \tau_w^2 \Gamma_{v_1 v_1}(\xi_1 + 0, +0, \xi_3, \omega)$$

Из (4.3) следует, что для среднеквадратичного значения давления на стенке справедливо соотношение

$$\langle p'^2 \rangle = 4a^2 \gamma^2 \tau_w^2, \quad \langle p'^2 \rangle^{1/2} = 2a\gamma\tau_w \quad (4.4)$$



Фиг. 4

Подставляя в (4.4) найденные ранее значения  $a$  и  $\gamma$ , получим  $\langle p'^2 \rangle^{1/2} = 2.94 \tau_w$ . Этот результат совпадает с выводами Крейчана [1] о пропорциональности средне-

квадратичного значения напряжению трения на стенке, и оценками коэффициента пропорциональности, проведенными Лилли [2]:

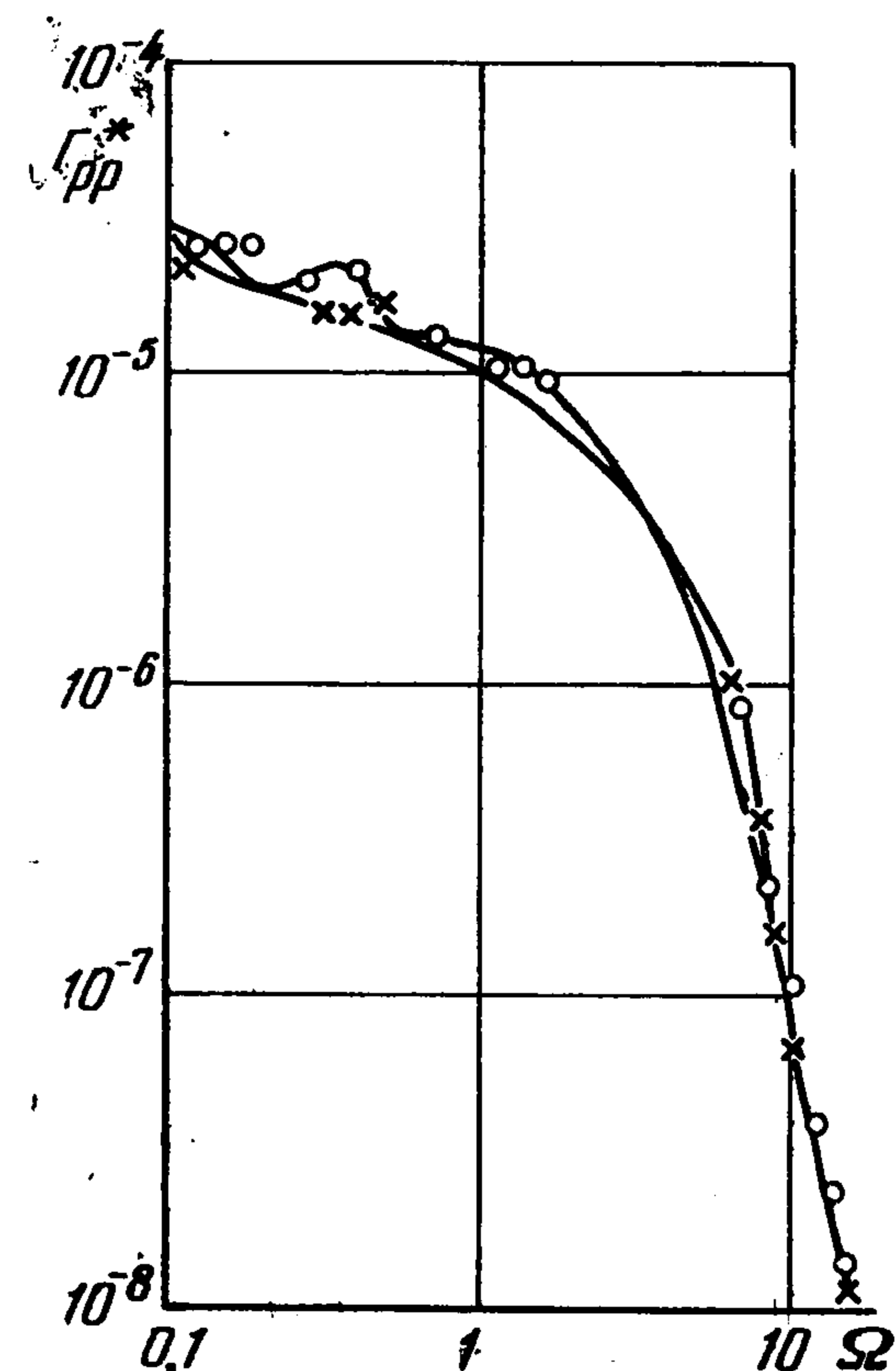
$$1.7 \leq \langle p'^2 \rangle^{1/2} / \tau_w \leq 3.1$$

Кроме того, (4.4) указывает, что коэффициент пропорциональности определяется величиной угла наклона профиля интенсивности продольной компоненты пульсационной скорости к плоскости пластины и радиусами корреляции этой же компоненты скорости.

Экспериментальные результаты по измерению среднеквадратичного значения пульсаций давления на поверхности пластины, проведенные Виллмартом и Вулдриджем [9], дают значения этого коэффициента 2.7 и 2.2 для двух различных условий.

Используя представление для напряжения трения [на стенке через скоростной напор и число Рейнольдса по толщине потери импульса [10], получим для  $\langle p'^2 \rangle^{1/2}$  следующее выражение:

$$\langle p'^2 \rangle^{1/2} = 0.0131 a \gamma \rho_0 V_0^2 R_{\delta^{**}}^{-1/6} \quad (4.5)$$



Фиг 5

Из (4.5) следует, что величина среднеквадратичного давления пропорциональна скорости набегающего потока с показателем степени несколько меньше двух (11/6).

Для определения пространственно-временного спектра давления  $E_{pp}(k_1, k_3, \omega)$  по формуле (4.2) необходимо получить  $e_{v_1 v_1}(k_1, +0, +0, k_3, \omega)$  из корреляционной функции  $r_{v_1 v_1}(\xi_1, \xi_3, \tau)$ . Тогда имеем

$$E_{pp}(k_1, k_3, \omega) = \frac{32a^2\gamma^2\alpha\beta g V \tau_w^2}{(\alpha^2 V^2 + \omega^2) [\beta^2 + (k_1 - \omega/V)^2] (g^2 + k_3^2)} \quad (4.6)$$

Из (4.6) [вытекает следующий вид взаимного спектра давления на поверхности пластины:

$$\Gamma_{pp}(\xi_1, \xi_3, \omega) = \frac{4a^2\gamma^2\alpha V \tau_w^2}{\pi(\alpha^2 V^2 + \omega^2)} \exp \left[ \frac{i\omega\xi_1}{V} - \beta|\xi_1| - g|\xi_3| \right] \quad (4.7)$$

При совпадении исследуемых точек  $\xi_1 = \xi_3 = 0$  (4.7) обращается в спектр мощности пульсационного давления

$$\Gamma_{pp}(\omega) = \frac{4a^2\gamma^2\alpha V \tau_w^2}{\pi(\alpha^2 V^2 + \omega^2)} \quad (4.8)$$

Результаты непосредственных измерений спектра мощности давления на пластине, проведенные Виллмартом и Вулдриджем [9], представлены на фиг. 5. Кривые построены относительно безразмерной частоты  $\Omega = \omega\delta^*/V_0$  ( $\delta^*$  — толщина вытеснения) и нормированы величиной  $1/4 \rho_0^2 V_0^3 \delta^*$ . Аналогичная операция, примененная к выражению (4.8), приводит к следующему виду безразмерного спектра мощности  $\Gamma_{pp}^*$ :

$$\Gamma_{pp}^* = \frac{\Gamma_{pp}(\Omega)}{1/4 \rho_0^2 V_0^3 \delta^*} = \frac{16a^2\gamma^2\alpha V \tau_w^2}{\pi \rho_0^2 V_0^3 \delta^* [(0.1\alpha\delta)^2 + \Omega^2]} \quad (4.9)$$

Аналитический вид (4.9) указывает на наличие горизонтального участка на низких частотах при  $\Omega \ll 0.1 \alpha \delta$  и спад с квадратом частоты  $\Omega$  при  $\Omega \gg 0.1 \alpha \delta$ , причем граничная частота спада определяется радиусом продольной корреляции компоненты  $v_1'$ . Это качественно совпадает с поведением кривых на фиг. 5, а расхождение, наблюдаемое в величине граничной частоты, объясняется неточным видом корреляционной функции продольной компоненты пульсационной скорости.

Безразмерный взаимный спектр давления

$$\frac{\Gamma_{pp}(\xi_1, \xi_3, \omega)}{\Gamma_{pp}(\omega)} = \exp \frac{i\omega \xi_1}{V} \exp [-\beta |\xi_1| - g |\xi_3|] \quad (4.10)$$

указывает на размороженность потока в направлении среднего движения. Эксперименты Гаррисона [11], Вулдриджа и Виллмарта [9] по измерению безразмерного взаимного спектра указывают на несколько иное вырождение турбулентности с безразмерным взаимным спектром

$$\frac{\Gamma_{pp}(\xi_1, \omega)}{\Gamma_{pp}(\omega)} = \exp \frac{i\omega \xi_1}{V} \exp \left[ -b \frac{\omega |\xi_1|}{V} \right]$$

но величина  $b$  этого вырождения у различных авторов оказывается различной.

Определенные статистические характеристики пульсационного давления (4.9) и (4.10) не полностью совпадают с результатами соответствующих измерений. Однако следует заметить, что никто из предыдущих исследователей не рассчитывал теоретически (по полю скоростей, подобных характеристик. Причем, сложность уравнения (1.4), по-видимому, не позволяет получить результаты в аналитической форме. В случае же использования уравнения (1.5) характеристики давления могут быть уточнены, если будут произведены тонкие измерения моментов второго порядка продольной компоненты пульсационной скорости в непосредственной близости от поверхности.

Следует заметить, что аналогичный подход может быть применен для определения пульсаций давления на криволинейной поверхности в несжимаемой жидкости, а также для изучения пульсаций давления в турбулентных пограничных слоях сжимаемых жидкостей.

Поступила 13 VI 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kraichnan R. H. Pressure fluctuations in turbulent flow over a flat plate. J. Acoust. Soc. America, 1956, vol. 28, No. 3.
2. Lilley G. M. A review of pressure fluctuations in turbulent boundary layers at subsonic and supersonic speeds. Arch. mechaniki stosowanej, 1964, vol. 16, No. 2.
3. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Физматгиз, 1961.
4. Ладыженская О. А. О классичности обобщенных решений общих нелинейных нестационарных уравнений Навье — Стокса. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова. 1966, № 92.
5. Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
6. Favre A. J., Gaviglio J. J., Dumas R. Space — time double correlations and spectra in a turbulent boundary layer. J. fluid mech., 1957, vol. 2, p. 4.
7. Favre A. Correlations spatio-temporelles dans les liquides turbulents — Аянот. докл. 2 го Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике 1964., рус. перев. Механика. Сб. перев. иностр. статей, 1965, № 2/190.
8. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1, М. «Наука», 1965.
9. Willmarth W. W., Wooldridge C. E. Measurements of the fluctuating pressure at the wall beneath a thick turbulent boundary layer. J. fluid mech., 1962, vol. 14, p. 2.
10. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., Физматгиз, 1959.
11. Harrison M. Pressure fluctuations at the wall adjacent to a turbulent boundary layer. J. Acoust. Soc. America, 1957, vol. 29, No 10.