Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИСЛОКАЦИЙ. СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

В. Л. Бердичевский, Л. И. Седов

(Москва)

В континуальной теории дислокаций изучается сплошная среда с непрерывным распределением дефектов микроструктуры — дислокациями. Ниже строится класс моделей сплошных сред, включающий в себя многие известные модели, а также другие модели, в рамках которых сочетаются вязкие, упругие, пластические эффекты и движение дефектов-дислокаций.

В частности, при помощи вариационного принципа с использованием свойств внутренней энергии и функции диссипации строятся модели пластических тел.

Для описания распределения дислокаций в число определяющих параметров [1] необходимо включить новые дополнительные характеристики. В связи с тем, что эти дополнительные величины могут быть выбраны по-разному, возникают различные теории. Дадим предварительно их краткий обзор.

В работах К. Кондо, Б. Билби, Э. Крёнера, Л. И. Седова, И. А. Кунина и др. [1–8] континууму припасовывается некоторое многообразие аффинной связности M и в качестве характеристик дислокаций берутся метрический тензор, тензоры кривизны и кручения этого многообразия. Многообразие M можно вводить на основе различных мысленных процессов. Б. Билби [3,4,5] строит многообразие M, исходя из теории решеток, и получает в результате тензор кривизны равным нулю (девять новых степеней свободы). K. Kondo [1,2] определяет многообразие M как многообразие начальных состояний, которое представляет собой метрическое аффинно-связное многообразие самого общего вида. За независимые параметры можно взять метрический тензор $g^*_{\alpha\beta}$ и тензор кручения $S_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ многообразия M (всего 15 новых параметров), а тензор кривизны выражается через их первые и вторые производные [9,10]. Для $g^*_{\alpha\beta}$ и $S_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ необходимы дополнительные уравнения. В статике, Э. Крёнер [6,11] предлагает получать эти уравнения, задавая тензор кривизны в функции координат. Случай, когда тензор кривизны равен нулю, называют «ограниченной» теорией. В этом случае имеет место абсолютный параллелизм, т. е. выполняются основные предположения в теории Б. Билби. В результате линеаризации уравнений «ограниченной» теории получаются уравнения так называемой элементарной теории [11].

Если тензор кручения равен нулю, то многообразие M становится римановым и его можно вложить в евклидово пространство большего числа измерений E. Изменение со временем геометрических характеристик многообразия M приводит к перемещениям M в E. За определяющие параметры можно брать компоненты вектора перемещения многообразия M в E. Соответствующие уравнения для обратимых явлений получены при помощи вариационного принципа в работе [2] (см. vol. 3).

В работах [12,13] определяющие параметры вводились без привлечения аппарата дифференциальной геометрии; динамические уравнения для них были построены путем осреднения уравнений движения отдельной дислокации [12]; хотя анализ не выхо-

---

[1] Поведение среды по определению известно, если известна зависимость от пространственных координат и от времени некоторой системы величин, которые называются определяющими параметрами.

дил из рамок линейной теории, в результате получились чрезвычайно сложные интегродифференциальные уравнения, из которых трудно усмотреть связи с моделями теории пластичности.

Далее будет показано, что для описания распределения дислокаций и включения известных пластических моделей в рамки теории достаточно введения девяти новых (по сравнению с классической теорией упругости) степеней свободы (на три степени свободы больше, чем в обычной теории пластичности).

1. Определяющие параметры. Движение среды будем рассматривать относительно некоторой, вообще криволинейной системы отсчета наблюдателя с пространственными[1] координатами x^α, временной координатой t и координатным базисом $Э_\alpha$. Введем также сопутствующую для среды систему отсчета[2] с лагранжевыми координатами ξ^μ, временной координатой t и координатным базисом $Э^\wedge{}_\mu$. Закон движения среды определяется связью между этими двумя системами отсчета [14]

$$x^\alpha = x^\alpha(\xi^\mu, t)$$

Базисные векторы $Э^\wedge{}_\nu$, $Э^{\wedge\mu}$ получаются из $Э_\alpha$, $Э^\beta$ аффинным преобразованием (в каждой точке)

$$Э^\wedge{}_\nu = x^\alpha{}_\nu Э_\alpha, \quad x^\alpha{}_\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\nu}; \quad Э^{\wedge\mu} = \xi^\mu{}_\beta Э^\beta, \quad \xi^\mu{}_\beta = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta}; \quad Э^\wedge{}_\nu = g^\wedge{}_{\nu\mu} Э^{\wedge\mu}$$

$$g^\wedge{}_{\nu\mu} = g_{\alpha\beta} x^\alpha{}_\nu x^\beta{}_\mu$$

Здесь $g^\wedge{}_{\nu\mu}$ и $g_{\alpha\beta}$ — ковариантные компоненты метрического тензора в сопутствующей системе отсчета и в системе наблюдателя.

Рассмотрим две (изоморфные) группы преобразований координат

$$x^\alpha \to y^\beta(x^\alpha), \qquad \xi^\mu \to \eta^\nu(\xi^\mu) \tag{1.1}$$

где y^β — новые пространственные координаты системы отсчета наблюдателя, η^ν — новые лагранжевы координаты.

При этом

$$Э_\alpha \to Э_\beta \, \partial x^\beta / \partial y^\alpha, \qquad Э^{\wedge\mu} \to Э^{\wedge\nu} \partial \eta^\mu / \partial \xi^\nu$$

Пусть имеется инвариант **A** вида

$$\mathbf{A} = A^\alpha{}_\mu Э_\alpha Э^{\wedge\mu} = C^{\wedge\nu}{}_\mu Э^\wedge{}_\nu Э^{\wedge\mu}$$

Очевидно, что $A^\alpha{}_\mu$ ведут себя как компоненты контравариантного вектора при преобразованиях системы отсчета наблюдателя (для фиксированного индекса μ) и как компоненты ковариантного вектора при преобразованиях сопутствующей системы отсчета (для фиксированного индекса α). Компоненты $C^{\wedge\nu}{}_\mu$ образуют тензор второго ранга при преобразованиях координат сопутствующей системы отсчета. Величины $A^\alpha{}_\mu$ и $C^{\wedge\nu}{}_\mu$

---

[1] Пространственным координатам соответствуют греческие индексы, которые пробегают значения 1, 2, 3.

[2] Величины, относящиеся к сопутствующей системе координат, отмечаются символом $^\wedge$.

есть представители одного и того же тензора **A**, соответствующие двум разным способам выбора базисных векторов. В частности, для метрического тензора **G** можно рассмотреть представители

$$\mathbf{G} = g_{\alpha\beta}\mathbf{Э}^{\alpha}\mathbf{Э}^{\beta} = x^{\alpha}{}_{\mu}\mathbf{Э}_{\alpha}\mathbf{Э}^{\wedge\mu} = g^{\wedge}{}_{\mu\nu}\mathbf{Э}^{\wedge\mu}\mathbf{Э}^{\wedge\nu}$$

Ниже рассмотрим производные по координатам тензора **A**, определенные по условию формулами

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^{\alpha}}\mathbf{Э}^{\alpha} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi^{\mu}}\mathbf{Э}^{\wedge\mu} = \frac{\partial A^{\beta}{}_{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\mathbf{Э}_{\beta}\mathbf{Э}^{\wedge\mu}\mathbf{Э}^{\alpha} + A^{\beta}{}_{\mu}\frac{\partial \mathbf{Э}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\mathbf{Э}^{\wedge\mu}\mathbf{Э}^{\alpha} + A^{\beta}{}_{\mu}\mathbf{Э}_{\beta}\frac{\partial \mathbf{Э}^{\wedge\mu}}{\partial \xi^{\nu}}\xi^{\nu}{}_{\alpha}\mathbf{Э}^{\alpha} =$$

$$= \left(\frac{\partial A^{\beta}{}_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\beta}A^{\gamma}{}_{\mu} - \Gamma^{\wedge}{}_{\mu\nu}{}^{\lambda}A^{\beta}{}_{\lambda}\xi^{\nu}{}_{\alpha}\right)\mathbf{Э}_{\beta}\mathbf{Э}^{\wedge\mu}\mathbf{Э}^{\alpha} =$$

$$= \nabla_{\alpha}A^{\beta}{}_{\mu}\mathbf{Э}_{\beta}\mathbf{Э}^{\wedge\mu}\mathbf{Э}^{\alpha} = \nabla^{\wedge}{}_{\nu}A^{\beta}{}_{\mu}\mathbf{Э}_{\beta}\mathbf{Э}^{\wedge\mu}\mathbf{Э}^{\wedge\nu}$$

где через $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ и $\Gamma^{\wedge}{}_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ обозначены компоненты объектов связности для базисов $\mathbf{Э}_{\alpha}$ и $\mathbf{Э}^{\wedge\mu}$ соответственно

$$\frac{\partial \mathbf{Э}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\mathbf{Э}_{\gamma}, \qquad \frac{\partial \mathbf{Э}^{\wedge}{}_{\mu}}{\partial \xi^{\nu}} = \Gamma^{\wedge}{}_{\mu\nu}{}^{\lambda}\mathbf{Э}^{\wedge}{}_{\lambda}$$

Легко убедиться, что величины $x^{\alpha}{}_{\mu}$ и $\xi^{\mu}{}_{\alpha}$ ковариантно постоянны [1]

$$\nabla_{\beta}x^{\alpha}{}_{\mu} = 0, \qquad \nabla_{\beta}\xi^{\mu}{}_{\alpha} = 0$$

Производные по времени от тензора **A** можно определить в различных смыслах [14]. В дальнейшем будем пользоваться следующей индивидуальной производной [2]:

$$D\mathbf{A} = \frac{d}{dt}(A^{\alpha}{}_{\mu}\mathbf{Э}_{\alpha}\mathbf{Э}^{\wedge\mu})_{\xi^{\lambda},\mathbf{Э}^{\wedge\mu}=\mathrm{const}} = \left(\frac{dA^{\alpha}{}_{\mu}}{dt} + \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha}A^{\beta}{}_{\mu}v^{\gamma}\right)\mathbf{Э}_{\alpha}\mathbf{Э}^{\wedge\mu} \tag{1.2}$$

где $v^{\gamma} = dx^{\gamma}/dt$ — компоненты скорости точек среды. Производная $D\mathbf{A}$ вычисляется при постоянных лагранжевых координатах ξ^{λ}, «постоянном» лагранжевом базисе $\mathbf{Э}^{\wedge\mu}$ и с учетом изменения векторов базиса $\mathbf{Э}_{\alpha}$ для движущейся точки среды.

Очевидно, что величины $DA^{\alpha}{}_{\mu}$ преобразуются при переходе к другой системе координат так же, как $A^{\alpha}{}_{\mu}$.

Для построения предлагаемого ниже варианта континуальной теории дислокаций достаточно ограничиться следующим набором инвариантных определяющих параметров:

$$\mathbf{v} = v^{\alpha}\mathbf{Э}_{\alpha}, \qquad \mathbf{G} = g_{\alpha\beta}\mathbf{Э}^{\alpha}\mathbf{Э}^{\beta} = x^{\alpha}{}_{\mu}\mathbf{Э}_{\alpha}\mathbf{Э}^{\wedge\mu} = g^{\wedge}{}_{\mu\nu}\mathbf{Э}^{\wedge\mu}\mathbf{Э}^{\wedge\nu}$$

$$\mathbf{A} = A^{\alpha}{}_{\mu}\mathbf{Э}_{\alpha}\mathbf{Э}^{\wedge\mu} = C^{\wedge\nu}{}_{\mu}\mathbf{Э}^{\wedge}{}_{\nu}\mathbf{Э}^{\wedge\mu}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi^{\mu}}\mathbf{Э}^{\wedge\mu}, \qquad D\mathbf{A}$$

$$S, \qquad \mathbf{L}_{(p)} = L^{\wedge}{}_{(p)}{}^{\nu_1\ldots\nu_k}{}_{\mu_1\ldots\mu_n}\mathbf{Э}^{\wedge}{}_{\nu_1\ldots\nu_k}\mathbf{Э}^{\wedge\mu_n} \qquad (p = 1,\ldots N) \tag{1.3}$$

---

[1] В работах [15,16] ковариантные производные от $x^{\alpha}{}_{\mu}$ вводились иначе и были отличны от нуля.

[2] Здесь учтено [14]

$$d\mathbf{Э}_{\alpha}/dt = \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\mathbf{Э}_{\gamma}v^{\beta}$$

где S — энтропия, $\mathbf{L}_{(p)}$ — набор тензоров, которые характеризуют физические или геометрические свойства среды в начальном состоянии (например, анизотропию). Среди тензоров $\mathbf{L}_{(p)}$ может присутствовать тензор

$$\mathbf{G}^\circ = g^\circ_{\mu\nu} Э^{\wedge\mu} Э^{\wedge\nu}$$

определяющий расстояние между частицами ds_0 в начальном состоянии

$$ds_0^2 = g^\circ_{\mu\nu}\, d\xi^\mu\, d\xi^\nu$$

По определению

$$dL^{\wedge\nu_1\ldots\nu_k}_{(p)\;\;\mu_1\ldots\mu_n} / dt = 0$$

По сравнению с классической теорией упругости в число определяющих параметров включено девять новых степеней свободы: компоненты тензора $\mathbf{A}$. Далее им можно приписывать следующий физический смысл.

Возьмем бесконечно малую частицу с лагранжевыми координатами ξ^μ, вырежем ее из тела и освободим от внешних нагрузок. При этом частица деформируется и векторы базиса $Э^\wedge{}_\nu$ перейдут в векторы $Э_\mu{}^*$. Эта деформация по условию описывается тензором $\mathbf{A}$:

$$Э^*{}_\mu = C^{\wedge\nu}{}_\mu Э^\wedge{}_\nu = A^\alpha{}_\mu Э_\alpha \tag{1.4}$$

После деформации частица переходит в ненапряженное состояние, поэтому компоненты $C^{\wedge\nu}{}_\mu$ тензора $\mathbf{A}$ описывают упругую деформацию [1]. Дальше по основному условию принимаем, что компоненты тензора $\mathbf{A}$ зависят только от координат ξ^μ и времени t. В связи с тензором $\mathbf{A}$ можно ввести ряд физических параметров:

тензор упругих деформаций

$$\varepsilon^{\wedge(e)}_{\mu\nu} = {}^1/_2 (g^\wedge{}_{\mu\nu} - g^*{}_{\mu\nu}), \qquad g^*{}_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} A^\alpha{}_\mu A^\beta{}_\nu \tag{1.5}$$

тензор пластических деформаций

$$\varepsilon^{\wedge(p)}_{\mu\nu} = {}^1/_2 (g^*{}_{\mu\nu} - g^\circ{}_{\mu\nu}) \tag{1.6}$$

тензор скорости пластических деформаций

$$e^{\wedge(p)}_{\mu\nu} = d\varepsilon^{\wedge(p)}_{\mu\nu} / dt = {}^1/_2\, dg^*{}_{\mu\nu} / dt = {}^1/_2 g_{\alpha\beta} (A^\alpha{}_\mu DA^\beta{}_\nu + A^\beta{}_\nu DA^\alpha{}_\mu)$$

тензор градиентов упругих деформаций

$$\nabla^\wedge{}_\lambda \varepsilon^{\wedge(e)}_{\mu\nu} = -{}^1/_2 \nabla^\wedge{}_\lambda g^*{}_{\mu\nu} = -{}^1/_2 g_{\alpha\beta} (A^\alpha{}_\mu \nabla^\wedge{}_\lambda A^\beta{}_\nu + A^\beta_\nu \nabla^\wedge{}_\lambda A^\alpha{}_\mu)$$

Рассмотрим в теле замкнутый контур L. Очевидно, что

$$\oint d\mathbf{r} = \oint Э^\wedge{}_\mu\, d\xi^\mu = 0$$

При определенной выше упругой деформации каждый бесконечно малый элемент $d\mathbf{r} = Э^\wedge{}_\mu\, d\xi^\mu$ переходит в элемент $d\mathbf{r}^* = Э_\mu{}^*\, d\xi^\mu$. Интеграл

$$\oint d\mathbf{r}^* = \oint Э^*{}_\mu\, d\xi^\mu$$

---

[1] Тензор (1.4) отличается от введенного в работе [6] тензора $A = A^\alpha{}_a Э_a Э^a$ ($a = 1, 2, 3$) законом преобразования компонент, так как векторы $Э^a$ образуют некоторый другой, не равный $Э^*{}_\mu$ базис.

вообще отличен от нуля и равен вектору $\mathbf{b}_{(L)}$, который соединяет концы разрезанного контура L после упругой деформации [1]

$$\mathbf{b}_{(L)} = b^{\wedge\nu}_{(L)}\mathfrak{Э}^{\wedge}_{\nu} = \oint_L \mathfrak{Э}^*_{\mu}\, d\xi^{\mu} = \iint_S \nabla^{\wedge}_{[\mu}A^{\alpha}_{\nu]}\mathfrak{Э}_{\alpha}\, d\xi^{\mu}\, d\xi^{\nu} \qquad (1.7)$$

По формуле (1.7) каждому (конечному) замкнутому контуру L ставится в соответствие вектор $\mathbf{b}_{(L)}$, называемый вектором Бюргерса.

Пусть в некоторой точке ξ^{μ} имеется бесконечно малый контур, окружающий площадку $d\sigma$ с вектором нормали $\mathbf{n}$. Ему отвечает некоторый бесконечно малый вектор Бюргерса $\mathbf{b}_{(n)}$, который зависит от выбора точки ξ, вектора $\mathbf{n}$ и площади $d\sigma$. Для того чтобы получить вектор Бюргерса в точке ξ^{μ}, рассмотрим предел

$$\lim_{d\sigma\to 0}\frac{\mathbf{b}_{(n)}}{d\sigma} = S^{\wedge\omega\lambda}n^{\wedge}_{\omega}\mathfrak{Э}^{\wedge}_{\lambda}, \qquad S^{\wedge\omega\lambda} = {}^1\!/_2\hat{\varepsilon}^{\omega\mu\nu}B^{\lambda}_{\alpha}\nabla^{\wedge}_{\mu}A^{\alpha}_{\nu} \qquad (1.8)$$

В формуле (1.8) через $\varepsilon^{\wedge\omega\mu\nu}$ обозначены компоненты полностью антисимметричного тензора, причем $\varepsilon^{\wedge 123} = 1\,/\,\sqrt{g^{\wedge}}$, а через B^{λ}_{α} — компоненты матрицы [2], обратной к матрице $A = \| A^{\alpha}_{\mu} \|$. Таким образом, компоненты вектора Бюргерса $b^{\mu}_{(n)}$ в точке определяются нормалью $\mathbf{n}$ и тензором $S^{\wedge\omega\lambda}$ (ξ^{μ}, t), который называется тензором плотности дислокаций. Наряду с $S^{\wedge\omega\lambda}$ можно рассмотреть тензор $\boldsymbol{\alpha}$ третьего ранга, антисимметричный по индексам $\mu\nu$

$$\boldsymbol{\alpha} = S^{\wedge}_{\mu\nu}{}^{\lambda}\mathfrak{Э}^{\wedge\mu}\mathfrak{Э}^{\wedge\nu}\mathfrak{Э}^{\wedge}_{\lambda}, \qquad S^{\wedge}_{\mu\nu}{}^{\lambda} = B^{\lambda}_{\alpha}\nabla^{\wedge}_{[\mu}A^{\alpha}_{\nu]} \qquad (1.9)$$

который связан с тензором $S^{\wedge\omega\lambda}$ взаимно-обратными формулами

$$S^{\wedge}_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \varepsilon^{\wedge}_{\mu\nu\omega}S^{\wedge\omega\lambda}, \qquad S^{\wedge\omega\lambda} = {}^1\!/_2\varepsilon^{\wedge\omega\mu\nu}S^{\wedge}_{\mu\nu}{}^{\lambda}$$

Тензор $S^{\wedge}_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ также будем называть тензором плотности дислокаций.

Если обозначить через $\mathbf{b}_{(1)}$, $\mathbf{b}_{(2)}$, $\mathbf{b}_{(3)}$ векторы Бюргерса для площадок с нормалями $\mathfrak{Э}_1$, $\mathfrak{Э}_2$, $\mathfrak{Э}_3$ соответственно, то для вектора Бюргерса ассоциированного с площадкой с нормалью $\mathbf{n}$ можно написать

$$\mathbf{b}_{(n)} = \mathbf{b}_{(1)}n^1 + \mathbf{b}_{(2)}n^2 + \mathbf{b}_{(3)}n^3 \qquad (1.10)$$

Как следует из (1.8), (1.10), вектор Бюргерса аналогичен вектору поверхностной силы, действующей на площадку $d\sigma$, а $S^{\wedge\omega\lambda}$ — тензору напряжений.

---

[1] Квадратные скобки в индексах обозначают операцию альтернирования, а круглые скобки — операцию симметрирования.

[2] Расположение индексов у A^{α}_{μ} существенно. Условимся опускать индексы у A^{α}_{μ} и B^{μ}_{α} с помощью метрики $g_{\alpha\beta}$ по индексу α и с помощью метрики $g^*_{\mu\nu}$ по индексу μ. Так как

$$A_{\alpha\mu} \equiv g_{\alpha\beta}A^{\beta}_{\mu}, \qquad B_{\mu\alpha} \equiv g^*_{\mu\nu}B^{\nu}_{\alpha}$$

то из (1.5) следует:

$$A_{\alpha\mu} \equiv B_{\mu\alpha}$$

Введем тензор $\mathbf{П} = \pi^{\wedge}{}_{\mu\nu}Э^{\wedge\mu}Э^{\wedge\nu}$ равенством

$$dЭ^*{}_\nu / dt = \pi^{\wedge}{}_{\mu\nu}Э^{*\mu} = DA^\alpha{}_\nu Э_\alpha$$

Отсюда

$$\pi^{\wedge}{}_{\mu\nu} = B_{\mu\alpha}DA^\alpha{}_\nu$$

Угловую скорость вращения для аффинного преобразования (1.4), определяемого компонентами $A^\alpha{}_\mu$ будем называть пластическим вихрем. Соответствующий антисимметричный тензор будем обозначать через $\Omega = \Omega^{\wedge}{}_{\mu\nu}Э^{\wedge\mu}Э^{\wedge}{}_\nu$. Легко видеть, что

$$\Omega^{\wedge}{}_{\mu\nu} = \pi^{\wedge}{}_{[\mu\nu]} \tag{1.11}$$

Отметим, что компоненты тензора скорости пластической деформации выражаются через компоненты тензора $\mathbf{П}$ по формуле

$$e^{\wedge(p)}_{\mu\nu} = \pi^{\wedge}{}_{(\mu\nu)} \tag{1.12}$$

Выше при введении характеристик дислокаций не использовались геометрические термины. В дальнейшем, для динамической теории соответствующая геометрическая интерпретация не требуется. Однако для установления контактов развиваемой теории с уже известными кинематическими теориями и для получения добавочных сведений, которые могут облегчить сопоставление теории с опытом, покажем как в связи с тензором $\mathbf{A}$ строится метрическое аффинно-связное многообразие «начального» состояния.

Определим в сопутствующей системе координат геометрический объект

$$\Gamma^*{}_{\mu\nu}{}^\lambda = B^\lambda{}_\alpha \left(\frac{\partial A^\alpha{}_\nu}{\partial \xi^\mu} + \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha A^\beta{}_\mu x^\gamma{}_\nu\right) \tag{1.13}$$

Легко проверить, что $\Gamma^{*\lambda}{}_{\mu\nu}$ преобразуется при переходе от одной сопутствующей системы координат к другой как объект связности, а тензор $g^*{}_{\mu\nu}$, определенный по (1.5) будет ковариантно постоянен относительно объекта связности $\Gamma^{*\lambda}{}_{\mu\nu}$, т. е.

$$\nabla^*{}_\mu g^*{}_{\nu\omega} = \frac{\partial g^*{}_{\nu\omega}}{\partial \xi^\mu} - \Gamma^*{}_{\mu\nu}{}^\lambda g^*{}_{\lambda\omega} - \Gamma^*{}_{\mu\omega}{}^\lambda g^*{}_{\nu\lambda} = 0 \tag{1.14}$$

Тензор плотности дислокаций $S^{\wedge}{}_{\mu\nu}{}^\lambda$ совпадает с антисимметричной по $\mu\nu$ частью объекта связности

$$S^{\wedge}{}_{\mu\nu}{}^\lambda = \Gamma^*{}_{[\mu\nu]}{}^\lambda \tag{1.15}$$

Многообразие «начального» состояния с остаточными пластическими деформациями введем как многообразие [1] с объектом связности $\Gamma^*{}_{\mu\nu}{}^\lambda$

[1] В ограниченной теории Кренера [11] для базиса $Э_a$ многообразия начального состояния компоненты объекта связности равны нулю. В развиваемой ниже теории из (1.4) имеем

$$\frac{\partial Э^*{}_\mu}{\partial \xi^\nu} = \frac{\partial}{\partial \xi^\nu}(A^\alpha{}_\mu Э_\alpha) = \left(\frac{\partial A^\alpha{}_\mu}{\partial \xi^\nu} + \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha A^\beta{}_\mu x^\gamma{}_\nu\right)Э_\alpha = \Gamma^*{}_{\mu\nu}{}^\lambda Э^*{}_\lambda$$

с метрическим тензором $g^*_{\mu\nu}$ и тензором кручения $S^\wedge{}_{\mu\nu}{}^\lambda$. Из (1.14) и (1.15) следует, что $\Gamma^*{}_{\mu\nu}{}^\lambda$ выражается через метрический тензор и тензор кручения по обычным формулам [9,10]

$$\Gamma^*{}_{\mu\nu}{}^\lambda = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + S^{\wedge\cdot\cdot\lambda}_{\ \mu\nu\cdot} - S^{\wedge\cdot\lambda\cdot}_{\ \mu\cdot\nu} - S^{\wedge\cdot\lambda\cdot}_{\ \nu\cdot\mu} \tag{1.16}$$

где

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{*\lambda\omega} \left(\frac{\partial g^*{}_{\nu\omega}}{\partial \xi^\mu} + \frac{\partial g^*{}_{\mu\omega}}{\partial \xi^\nu} - \frac{\partial g^*{}_{\mu\nu}}{\partial \xi^\omega} \right)$$

Вычисление (с учетом (1.5) и (1.13)) показывает, что тензор кривизны многообразия M обращается в нуль

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta (\Gamma^*{}_{\mu\nu}{}^\lambda, \ \partial \Gamma^*{}_{\mu\nu}{}^\lambda / \partial \xi^\omega) = 0 \tag{1.17}$$

Подстановка (1.16) в (1.17) дает связь между метрическим тензором и тензором плотности дислокаций. Получающиеся в результате равенства

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \left(g^*{}_{\nu\omega}, \ \frac{\partial g^*{}_{\nu\omega}}{\partial \xi^\mu}, \ \frac{\partial^2 g^*{}_{\nu\omega}}{\partial \xi^\mu \partial \xi^\lambda}, \ S^\wedge{}_{\mu\nu}{}^\lambda, \ \frac{\partial S^\wedge{}_{\mu\nu}{}^\lambda}{\partial \xi^\omega} \right) = 0 \tag{1.18}$$

некоторые авторы называют основным геометрическим законом. Отметим, что в каждой (фиксированной) точке компоненты метрического тензора и тензора плотности дислокаций кинематически независимы, поскольку в (1.18) входят производные от $g^*{}_{\mu\nu}$ и $S^{\wedge\lambda}_{\mu\nu}$ по координатам.

В результате линеаризации уравнений (1.18) можно выделить части $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$, зависящие в отдельности [8] лишь от производных $g^*{}_{\mu\nu}$ и от $S^\wedge{}_{\mu\nu}{}^\lambda$

$$R^\wedge_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = K_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta (\partial^2 g^*_{\mu\nu} / \partial \xi^\omega \partial \xi^\lambda) + N_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta (\partial S^\wedge{}_{\mu\nu}{}^\lambda / \partial \xi^\omega) = 0 \tag{1.19}$$

Тензор $N_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$ называют тензором несовместности. Уравнения (1.19) рассматривались как основные уравнения статической линейной теории дислокаций [6,8,11]. Задавая тензор несовместности $N_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta}$, предлагалось находить метрический тензор $g^*{}_{\mu\nu}$ из уравнения (1.19). Такую постановку нельзя считать удовлетворительной, поскольку в естественно поставленных задачах тензор несовместности сам должен быть определен в результате решения задачи.

Ниже динамические уравнения будут получены для величин $A^\alpha{}_\mu$, при этом основной геометрический закон (1.18) всегда удовлетворяется тождественно. Тензоры $g^*{}_{\mu\nu}$ и $S^{\wedge\lambda}_{\mu\nu}$ определяются по известным $A^\alpha{}_\mu$ формулами (1.5) и (1.9).

2. Вариационный принцип. Построение моделей будем производить, исходя из вариационного принципа [7,15—17]

$$\delta \iint\limits_{Vt_1}^{t_2} \Lambda \, d\tau \, dt + \delta W + \delta W^* = 0 \tag{2.1}$$

Здесь Λ — лагранжиан, V — произвольная область, связанная с частицами среды, $d\tau$ — элемент объема

$$d\tau = \sqrt{g^\wedge} \, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \sqrt{g} \, dx^1 dx^2 dx^3, \qquad g^\wedge = \det \| g^\wedge{}_{\mu\nu} \|, \quad g = \det \| g_{\alpha\beta} \|$$

Уравнение (2.1) принимается в качестве базисного соотношения при произвольных вариациях определяющих параметров, в частности, отличных от нуля на границе области интегрирования. Функционал δW представляется интегралом по границе четырехмерной области в пространстве переменных ξ^μ, t от линейной комбинации вариаций, определяющих параметров и подлежит определению, а δW^* — некоторый задаваемый функционал [1]. Лагранжиан Λ по предположению зависит от компонент тензоров (1.3), имеет размерность объемной плотности энергии и представляет собой скаляр относительно группы преобразования (1.1). Дальше для простоты примем, что величины $\nabla\hat{}_\nu A^\alpha{}_\mu$ входят в лагранжиан только через компоненты тензора плотности дислокаций $\boldsymbol{\alpha}$, определенные по формуле (1.9).

Определим вариации системы аргументов Λ (1.3) в произвольно выбранной, но фиксированной системе отсчета наблюдателя. В (2.1) по условию варьированию подвергаются траектории частиц среды

$$\delta x^\alpha = x'^\alpha(\xi^\mu, t) - x^\alpha(\xi^\mu, t)$$

независимые параметры A и энтропия S. Для вариаций компонент тензора $\mathbf{A}$ по условию положим[2]

$$\delta \mathbf{A} = A'^\alpha{}_\mu \boldsymbol{\ni}_\alpha(x')\, \hat{\boldsymbol{\ni}}^\mu(\xi) - A^\alpha{}_\mu \boldsymbol{\ni}_\alpha(x)\, \hat{\boldsymbol{\ni}}^\mu(\xi) = \delta A^\alpha{}_\mu \boldsymbol{\ni}_\alpha \boldsymbol{\ni}\hat{}^\mu$$

Величины $\delta A^\alpha{}_\mu$ преобразуются при переходе к другой системе координат так же, как и $A^\alpha{}_\mu$. Для вариаций производных x^α и $\mathbf{A}$ воспользуемся формулами

$$\delta \mathbf{v} = v'^\alpha(x', t)\, \boldsymbol{\ni}_\alpha(x') - v^\alpha(x, t)\, \boldsymbol{\ni}_\alpha(x) = [d(\delta x^\alpha)/dt + \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha v^\gamma \delta x\ ]\, \boldsymbol{\ni}_\alpha = (D\delta x^\alpha)\, \boldsymbol{\ni}_\alpha$$

$$\delta \mathbf{G} = x'^\alpha{}_\mu \boldsymbol{\ni}_\alpha(x')\, \boldsymbol{\ni}\hat{}^\mu(\xi) - x^\alpha{}_\mu \boldsymbol{\ni}_\alpha(x)\, \boldsymbol{\ni}\hat{}^\mu(\xi) = x^\beta{}_\mu \nabla_\beta \delta x^\alpha \boldsymbol{\ni}_\alpha \boldsymbol{\ni}\hat{}^\mu$$

$$\delta(D\mathbf{A}) = \delta(DA^\alpha{}_\mu \boldsymbol{\ni}_\alpha \boldsymbol{\ni}\hat{}^\mu) = (D\delta A^\alpha{}_\mu)\, \boldsymbol{\ni}_\alpha \boldsymbol{\ni}\hat{}^\mu = D(\delta \mathbf{A})$$

$$\delta \boldsymbol{\alpha} = (\delta S\hat{}_{\mu\nu}{}^\lambda)\, \boldsymbol{\ni}\hat{}^\mu \boldsymbol{\ni}\hat{}^\nu \boldsymbol{\ni}\hat{}_\lambda \tag{2.2}$$

На основании (1.9) имеем

$$\delta S\hat{}_{\mu\nu}{}^\lambda = B^\lambda{}_\alpha \nabla\hat{}_{[\mu} \delta A^\alpha{}_{\nu]} - \delta B^\lambda{}_\alpha \nabla\hat{}_{[\mu} A^\beta{}_{\nu]} = B^\lambda{}_\alpha \nabla\hat{}_{[\mu} \delta A^\alpha{}_{\nu]} - S\hat{}_{\mu\nu}{}^\omega B^\lambda{}_\alpha \delta A^\alpha{}_\omega$$

Из определения $B^\lambda{}_\beta A^\beta{}_\mu = \delta^\lambda{}_\mu$ вытекает $\delta B^\lambda{}_\beta = - B^\lambda{}_\alpha B^\mu{}_\beta \delta A^\alpha{}_\mu$.

Компоненты тензоров $L_{(p)}$ рассматриваются как известные заданные функции от ξ^μ и поэтому не варьируются.

В основном равенстве (2.1), помимо варьирования функций (при постоянных ξ^μ), будем варьировать время t путем сдвига на бесконечно малую константу δt. Для ограниченных целей, достигаемых в предла-

[1] Функционал δW определяется по известным Λ и δW^* для произвольной области Vt. В связи с этим получаются уравнения состояния и кинетические уравнения. Задание δW на границе области Vt приводит также к краевым условиям. Тензор энергии-импульса (в частности, тензор напряжений) определяется при помощи функционала δW, а не только при помощи уравнений, как это обычно принято. Функционал δW^* содержит члены, учитывающие изменение энтропии и приток тепла — это позволяет получить правильное уравнение энергии для обратимых и необратимых процессов. Равенство вида (1.2) применялось Р. Тупиным [18] и Р. Миндлиным [19] с фиксированной областью Vt, занятой телом и данным интервалом времени $[t_1, t_2]$ для получения моделей сред только с обратимыми процессами и без учета тепловых эффектов. Функционал δW при этом задавался только для формулировки краевых условий.

[2] Произвольность вариаций позволяет определить их различными способами.

гаемой работе такое варьирование времени достаточно [1]. Очевидно, что для любой величины A имеем

$$\delta_1 \mathbf{A} = \mathbf{A}'(\xi^\mu,\ t') - \mathbf{A}(\xi^\mu,\ t) = \delta \mathbf{A} + D\mathbf{A} \cdot \delta t$$

Символом δ_1 дальше будем обозначать полную вариацию, а символом δ — вариацию при постоянном t. В частности, для $\delta_1 x^\alpha$ можно написать

$$\delta_1 x^\alpha = x'^\alpha(\xi^\mu,\ t') - x^\alpha(\xi^\mu,\ t) = \delta x^\alpha + v^\alpha \delta t$$

Под вариацией интеграла от Λ в (2.1) будем дальше понимать вариацию δ_1. На основании (2.2) и равенств (2.3)

$$\delta_1 \Lambda = \delta\Lambda + \frac{d\Lambda}{dt}\delta t, \quad \delta_1 d\tau = (\nabla_\alpha \delta_1 x^\alpha)\, d\tau, \quad \frac{d}{dt}\Lambda \sqrt{g^\wedge} = \rho \sqrt{g^\wedge}\, \frac{d}{dt}\frac{\Lambda}{\rho}$$

Здесь по определению плотность среды $\rho = f(\xi^\mu)/\sqrt{g^\wedge}$. Для вариации первого члена в (2.1) обычным путем находим

$$\delta_1 \iint\limits_{Vt} \Lambda\, d\tau\, dt = \iint\limits_{Vt} \Big\{ X_\alpha \delta x^\alpha + \frac{\delta\Lambda}{\delta A^\alpha{}_\nu}\delta A^\alpha{}_\nu + \frac{\partial\Lambda}{\partial S}\delta S + \Big[\rho \frac{d}{dt}\Big(\frac{\Lambda}{\rho} - v^\alpha \frac{\partial}{\partial v^\alpha}\frac{\Lambda}{\rho} -$$
$$- DA^\alpha{}_\mu \frac{\partial}{\partial(DA^\alpha{}_\mu)}\frac{\Lambda}{\rho}\Big) + \nabla_\beta(\sigma_\alpha{}^\beta v^\alpha + \sigma^\wedge{}^{\nu\mu\lambda}\pi^\wedge{}_{\nu\mu}x^\beta{}_\lambda)\Big]\delta t\Big\}\, d\tau\, dt -$$
$$- \iint\limits_{\Sigma t} (\sigma_\alpha{}^\beta \delta_1 x^\alpha + \sigma^\wedge{}_\nu{}^{\mu\lambda} x^\beta{}_\lambda B^\nu{}_\alpha \delta_1 A^\alpha{}_\mu)\, n_\beta\, d\sigma\, dt -$$
$$- \int\limits_V \rho \Big[\delta_1 x^\alpha \frac{\partial}{\partial v^\alpha}\frac{\Lambda}{\rho} + \delta_1 A^\alpha{}_\nu \frac{\partial}{\partial(DA^\alpha{}_\nu)}\frac{\Lambda}{\rho}\Big]_{t_1}^{t_2} d\tau \qquad (2.4)$$

Здесь n_β — компоненты вектора нормали к границе пространственной области V — поверхности Σ. В (2.4) введены следующие обозначения

$$\sigma_\alpha{}^\beta = -x^\beta{}_\mu \frac{\partial\Lambda}{\partial x^\alpha{}_\mu} - \Lambda\delta_\alpha^\beta, \quad \sigma^\wedge{}_\nu{}^{\mu\lambda} = -\frac{\partial\Lambda}{\partial S^\wedge{}_{\lambda\mu}{}^\nu}, \quad X_\alpha = -\rho D\frac{\partial\Lambda/\rho}{\partial v^\alpha} + \nabla_\beta \sigma_\alpha{}^\beta$$
$$\frac{\delta\Lambda}{\delta A^\alpha{}_\mu} = -\rho D\frac{\partial\Lambda/\rho}{\partial(DA^\alpha{}_\mu)} - \nabla^\wedge{}_\nu \frac{\partial\Lambda}{\partial(\nabla^\wedge{}_\nu A^\alpha{}_\mu)} + \frac{\partial\Lambda}{\partial A^\alpha{}_\mu} = \qquad (2.5)$$
$$= -\rho D\frac{\partial\Lambda/\rho}{\partial(DA^\alpha{}_\mu)} + \nabla^\wedge{}_\nu(\sigma^\wedge{}_\lambda{}^{\mu\nu}B^\lambda{}_\alpha) + \sigma^\wedge{}_\lambda{}^{\omega\nu}S^\wedge{}_{\nu\omega}{}^\mu B^\lambda{}_\alpha + \frac{\partial\Lambda}{\partial A^\alpha{}_\mu}$$

3. Основные уравнения. Далее по определению положим

$$\delta W^* = \iint\limits_{Vt}\Big\{\rho\Theta\delta S + F_\alpha \delta_1 x^\alpha - \tau_\alpha{}^\beta \nabla_\beta \delta x^\alpha -$$
$$- Q^{\wedge\mu\nu} B_{\mu\alpha}\delta A^\alpha{}_\nu - Q^{\wedge\mu\nu\lambda}\nabla^\wedge{}_\lambda(B_{\mu\alpha}\delta A^\alpha{}_\nu) + N\delta t\Big\}\, d\tau\, dt =$$
$$= \iint\limits_{Vt}\Big\{\rho\Theta\delta S + (F_\alpha + \nabla_\beta \tau_\alpha{}^\beta)\delta x^\alpha + (-Q^{\wedge\mu\nu} + \hat\nabla_\lambda \hat Q^{\mu\nu\lambda}) B_{\mu\alpha}\delta A^\alpha{}_\nu + [F_\alpha v^\alpha + N +$$
$$+ \nabla_\beta(\tau_\alpha{}^\beta v^\alpha + Q^{\wedge\mu\nu\lambda}\pi^\wedge{}_{\mu\nu}x^\alpha{}_\lambda)]\delta t\Big\}\, d\tau\, dt -$$
$$- \iint\limits_{\Sigma t}\{\tau_\alpha{}^\beta \delta_1 x^\alpha + Q^{\wedge\nu\mu\lambda} x^\beta{}_\lambda B_{\nu\alpha}\delta_1 A^\alpha{}_\mu\}\, n_\beta\, d\sigma\, dt \qquad (3.1)$$

---

[1] Кроме того, принято, что t_1 и t_2, не зависят от ξ^μ.

Здесь Θ — некоторый скаляр, который для большинства моделей имеет смысл абсолютной температуры,

$$F_\alpha, \ \tau_\alpha{}^\beta, \ Q^{\wedge\mu\nu}, \ Q^{\wedge\mu\nu\lambda}, \ N$$

некоторые обобщенные силы и напряжения, определяющие для данной малой частицы внешние воздействия и внутренние необратимые эффекты. Полагая сначала полные вариации δ_1 переменных на границе четырехмерной области Vt равными нулю (при этом по определению $\delta W = 0$) из основного вариационного равенства (2.1) с учетом (2.4), (2.5) и (3.1) получим систему уравнений

$$-\rho DJ_\alpha + \nabla_\beta p_\alpha{}^\beta + F_\alpha = 0 \tag{3.2}$$

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\Lambda}{\rho} - v^\alpha J_\alpha - A^{\beta\mu} DA^\alpha{}_\mu J_{\alpha\beta}\right) + \tag{3.3}$$

$$+\nabla_\beta (p_\alpha{}^\beta v^\alpha + q^{\wedge\mu\nu\lambda} \pi^\wedge{}_{\mu\nu} x^\beta{}_\lambda) + Q^{\wedge\mu\nu} \pi^\wedge_{\mu\nu} + N + F_\alpha v^\alpha = 0$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial S} + \rho\Theta = 0, \qquad \frac{\delta\Lambda}{\delta A^\alpha{}_\nu} A^{\alpha\mu} = Q^{\wedge\mu\nu} - \nabla^\wedge{}_\lambda Q^{\wedge\mu\nu\lambda} \tag{3.4}$$

$$p_\alpha{}^\beta = \sigma_\alpha{}^\beta + \tau_\alpha{}^\beta, \qquad q^{\wedge\mu\nu\lambda} = \sigma^{\wedge\mu\nu\lambda} + Q^{\wedge\mu\nu\lambda} \tag{3.5}$$

$$J_\alpha = \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \frac{\Lambda}{\rho}, \qquad J_{\alpha\beta} = A_{\beta\mu} \frac{\partial}{\partial (DA^\alpha{}_\mu)} \frac{\Lambda}{\rho}$$

Вводя произвольные вариации, отличные от нуля на границе, можно получить выражение

$$\delta W = \iint\limits_{\Sigma t} (p_\alpha{}^\beta \delta_1 x^\alpha + q^{\wedge\mu\nu\lambda} x^\beta{}_\lambda B_{\mu\alpha} \delta_1 A^\alpha{}_\nu) n_\beta \, d\sigma \, dt +$$

$$+ \int\limits_V \rho \, [J_\alpha \delta_1 x^\alpha + J_{\alpha\beta} A^{\beta\mu} \delta_1 A^\alpha{}_\mu]_{t_1}^{t_2} d\tau \tag{3.6}$$

Уравнения (3.2) представляют собой уравнения импульсов, уравнение (3.3) — уравнение энергии. Система уравнений (3.2) — (3.4) вместе с уравнениями состояния (2.6) и (3.5) образует замкнутую систему, если заданы Λ и δW^* (т. е. заданы Λ, F_α, $\tau_\alpha{}^\beta$, $Q^{\wedge\mu\nu}$, $Q^{\wedge\mu\nu\lambda}$, N).

При постановке конкретных задач для нахождения решения надо задать также функционал δW на границе среды, что сводится к следующим краевым условиям и условиям при $t = t_1$ и $t = t_2$:

$$p_\alpha{}^\beta n_\beta = T_\alpha, \qquad q^{\wedge\mu\nu\lambda} x^\gamma{}_\lambda n_\gamma = q^{\wedge\mu\nu} \qquad \text{на } \Sigma \tag{3.7}$$

$$J_\alpha = J_\alpha{}^1, \quad J_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta}^1 \quad \text{при } t = t_1; \qquad J_\alpha = J^2{}_\alpha, \quad J_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta}^2 \quad \text{при } t = t_2$$

При помощи равенства (2.1) можно получать также условия на скачках [20].

Если принять, что лагранжиан Λ равен разности кинетической и внутренней энергии

$$\Lambda = T - \rho U \tag{3.8}$$

то уравнения движения (4.2) можно привести к обычному виду

$$\rho \frac{dv_\alpha}{dt} = \nabla_\beta p_\alpha{}^\beta + F_\alpha \tag{3.9}$$

Из (3.6) и (3.9) следует, что $p_\alpha{}^\beta$ имеют смысл компонент тензора напряжений, а F_α — компонент вектора массовых сил. Используя равенство

$$\partial\rho / \partial x^\alpha{}_\mu = -\rho\xi^\mu{}_\alpha$$

с учетом (2.5) и (3.5) для $p_\alpha{}^\beta$ получим

$$p_\alpha{}^\beta = x^\beta{}_\mu \frac{\partial U}{\partial x^\alpha{}_\mu} + \tau_\alpha{}^\beta \tag{3.10}$$

Обратимся теперь к установленным выше уравнениям Эйлера (3.4) для внутренних степеней свободы, связанных с компонентами $A^\alpha{}_\mu$. После очевидных преобразований уравнение (3.4) с учетом (3.5) можно привести к виду

$$\rho D J_{\alpha\beta} = \nabla_\gamma K_{\alpha\beta}{}^\gamma + \rho h_{\alpha\beta}, \qquad K_{\alpha\beta}{}^\gamma = q^{\wedge\mu\nu\lambda} A_{\alpha\nu} A_{\beta\mu} x^\gamma{}_\lambda \tag{3.11}$$

$$\rho h_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Lambda}{\partial A^\alpha{}_\mu} A_{\beta\mu} + \frac{\partial\Lambda}{\partial (DA^\alpha{}_\mu)} DA_{\beta\mu} - Q^{\wedge\mu\nu} A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu} - Q^{\wedge\mu\nu\lambda} \nabla^\wedge{}_\lambda (A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu})$$

Уравнения (3.11) антисимметрированные по индексам $\alpha\beta$, представляют собой уравнения внутреннего момента количества движения. При этом величины $J_{[\alpha\beta]}$ можно рассматривать как компоненты тензора внутреннего момента количества движения, $K_{[\alpha\beta]}{}^\gamma$ — компоненты тензора поверхностных моментов, $h_{[\alpha\beta]}$ — как компоненты тензора внутреннего массового момента.

4. Уравнение баланса энтропии. Феноменологическая теория необратимых процессов. Рассмотрим уравнение энергии (3.3). При помощи (3.1) и (3.4) его можно преобразовать к форме

$$\rho\Theta \frac{dS}{dt} = N + Q^{\wedge\mu\nu} \pi^\wedge{}_{\mu\nu} + Q^{\wedge\mu\nu\lambda} \nabla_\lambda{}^\wedge \pi^\wedge{}_{\mu\nu} + \tau^{\wedge\mu\nu} \nabla^\wedge{}_\nu v^\wedge{}_\mu \tag{4.1}$$

Равенство (4.1) представляет собой уравнение баланса энтропии и может служить основой для задания обобщенных сил и напряжений в δW^*. Будем считать, что прирост энтропии, связанный с N, обусловлен лишь потоком тепла $\mathbf{q}$ и для N имеет место равенство $N = -\operatorname{div} \mathbf{q}$.

Внутреннее производство энтропии $\rho\,\Theta\, d_i\, S$ обозначим через σdt и по определению выделим σ из правой части (4.1) следующим образом:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{4.2}$$

$$\sigma_1 = -\Theta^{-1} q^{\wedge\mu} \nabla^\wedge{}_\mu \Theta, \qquad \sigma_2 = Q^{\wedge\mu\nu} \pi^\wedge{}_{\mu\nu} + Q^{\wedge\mu\nu\lambda} \nabla^\wedge{}_\lambda \pi^\wedge{}_{\mu\nu}, \qquad \sigma_3 = \tau^{\wedge\mu\nu} \nabla^\wedge{}_\nu v^\wedge_\mu$$

Величина σ_1 характеризует необратимые эффекты за счет теплопроводности, σ_2 — за счет пластических деформаций и движения дислокаций, а σ_3 — за счет вязкой диссипации. Величина σ согласно второму закону термодинамики удовлетворяет неравенству $\sigma \geqslant 0$, в то время как σ_1, σ_2 и σ_3, вообще говоря, могут быть как положительными, так и отрицательными.

В качестве основного допущения примем, что величина σ является функцией термодинамических потоков

$$\nabla^\wedge{}_\mu \Theta, \quad \pi^\wedge{}_{\mu\nu}, \quad \nabla^\wedge{}_\lambda \pi^\wedge{}_{\mu\nu}, \quad \nabla^\wedge{}_\nu v^\wedge{}_\mu$$

системы величин (2.3) и некоторых добавочных (постоянных и возможно переменных) параметров χ_s, появляющихся [1] при задании δW^*.

Дальше подразумевается, что χ_s представляют собой заданные функционалы основных определяющих параметров (1.3). Согласно общей теории необратимых процессов [21,22] зададим зависимость функции диссипации σ (или σ_1, σ_2 и σ_3) от своих аргументов и примем, что для необратимых процессов обобщенные силы $q^{\wedge\mu}$, $Q^{\wedge\mu\nu}$, $Q^{\wedge\mu\nu\lambda}$ и $\tau^{\wedge\mu\nu}$ связаны с термодинамическими потоками соотношениями вида

$$-\Theta^{-1}q^{\wedge\mu} = \mu_1\frac{\partial\sigma}{\partial(\nabla^{\wedge}_{\mu}\Theta)}, \quad Q^{\wedge\mu\nu} = \mu_2\frac{\partial\sigma}{\partial\pi^{\wedge}_{\mu\nu}}, \quad Q^{\wedge\mu\nu\lambda} = \mu_2\frac{\partial\sigma}{\partial\pi^{\wedge}_{\mu\nu}}$$

$$\tau^{\wedge\mu\nu} = \mu_3\frac{\partial\sigma}{\partial(\nabla^{\wedge}_{\nu}v^{\wedge}_{\mu})} \tag{4.3}$$

Здесь частные производные вычисляются при $\chi_s = \text{const}$, а μ_1, μ_2, μ_3 — некоторые множители. Вместо постулирования равенств (4.3) можно было бы взять другие эквивалентные предположения, например, предположения, аналогичные постулату Д. Друккера [23], гипотезам П. Циглера [21], И. Пригожина [24] и т. п. Добавление параметров χ_s и использование различных множителей μ_1, μ_2, μ_3 для разных термодинамических потоков в (4.3) дает ослабление обычно принимаемых гипотез.

Кроме σ_1, σ_2, и σ_3, необходимо задать множители μ_1, μ_2, μ_3, причем так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\sigma = \mu_1\gamma_1 + \mu_2\gamma_2 + \mu_3\gamma_3, \qquad \gamma_1 = \nabla^{\wedge}_{\mu}\Theta\frac{\partial\sigma}{\partial(\nabla^{\wedge}_{\mu}\Theta)} \tag{4.4}$$

$$\gamma_2 = \pi^{\wedge}_{\mu\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial\pi^{\wedge}_{\mu\nu}} + \nabla^{\wedge}_{\lambda}\pi^{\wedge}_{\mu\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial(\nabla^{\wedge}_{\lambda}\pi^{\wedge}_{\mu\nu})}, \qquad \gamma_3 = \nabla^{\wedge}_{\nu}v^{\wedge}_{\mu}\frac{\partial\sigma}{\partial(\nabla^{\wedge}_{\nu}v^{\wedge}_{\mu})}$$

В частности, если термодинамические потоки $\nabla^{\wedge}_{\mu}\Theta$ входят лишь в σ_1, $\pi^{\wedge}_{\mu\nu}$ и $\nabla^{\wedge}_{\lambda}\pi^{\wedge}_{\mu\nu}$ — лишь в σ_2, $\nabla^{\wedge}_{\nu}v^{\wedge}_{\mu}$ — лишь в σ_3, то для μ_1, μ_2 и μ_3 верны соотношения

$$\mu_1\gamma_1 = \sigma_1, \qquad \mu_2\gamma_2 = \sigma_2, \qquad \mu_3\gamma_3 = \sigma_3 \tag{4.5}$$

Из (4.2) следует, что отсутствие диссипации связано с равенством $\sigma = 0$. Физически очевидно, что при

$$\nabla^{\wedge}_{\mu}\Theta = 0, \qquad \pi^{\wedge}_{\mu\nu} = 0, \qquad \nabla^{\wedge}_{\lambda}\pi^{\wedge}_{\mu\nu} = 0, \qquad \nabla^{\wedge}_{\nu}v^{\wedge}_{\mu} = 0 \tag{4.6}$$

обращаются в нуль и каждое из σ_1, σ_2, σ_3. Обратное утверждение связано со свойствами задаваемых при конструировании моделей функций σ_1, σ_2, σ_3. В общем случае из $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ равенства (4.6) могут не следовать.

---

[1] В частных примерах известных моделей теории пластичности в качестве χ_s берутся следующие величины:

$$\chi_1 = \int p^{\alpha\beta}\, d\varepsilon^{(p)}_{\alpha\beta}, \qquad \chi_2 = \int\sqrt{d\varepsilon^{(p)}_{\alpha}{}_{\beta}\, d\varepsilon^{(p)\alpha\beta}}$$

Предыдущая теория развита в предположении, что лагранжиан Λ не зависит от χ_s.

Соотношения (4.3) связаны существенно с наличием необратимых диссипативных процессов при $\sigma_\alpha \neq 0$. При обратимых процессах второе и третье из равенств (4.3) нужно заменить соответствующими соотношениями для $\pi\hat{}_{\mu\nu}$ и $\nabla\hat{}_\lambda\pi\hat{}_{\mu\nu}$ в обратимых процессах.

Ниже показано, что развитым путем можно построить и обобщить многие из употребляемых в приложениях моделей, в частности, модели пластических сред. Всякий раз при этом в качестве σ_α ($\alpha = 1, 2, 3$) выбираются однородные функции некоторой степени k_α от соответствующих термодинамических потоков. Множители μ_α определяются тогда из (4.5) и оказываются постоянными: $\mu_\alpha = k_\alpha^{-1}$. В частности, если σ — квадратичная форма по всем своим аргументам, то $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = {}^1/_2$, а связь между термодинамическими силами и потоками будет линейной. В этом случае из (4.3) следуют соотношения Онзагера.

Для получения моделей пластических сред нельзя пользоваться линейными соотношениями между термодинамическими силами и потоками. В этом случае функцию диссипации σ_2 можно выбирать однородной функцией первой степени ($\mu_2 = 1$) относительно $\pi\hat{}_{\mu\nu}$, $\nabla\hat{}_\lambda\pi\hat{}_{\mu\nu}$. Очевидно, что при этом компоненты тензоров $Q\hat{}^{\mu\nu}$ и $Q\hat{}^{\mu\nu\lambda}$ будут лежать на некоторых поверхностях в пространстве переменных $\{Q\hat{}^{\mu\nu}, Q\hat{}^{\mu\nu\lambda}\}$:

$$f_k(Q\hat{}^{\mu\nu}, Q\hat{}^{\mu\nu\lambda}, \chi_s) = 0, \qquad (k = 1, \ldots, m < 36) \tag{4.7}$$

которые можно называть поверхностями нагружения [1]. В самом деле, в рассматриваемом случае $Q\hat{}^{\mu\nu}$, $Q\hat{}^{\mu\nu\lambda}$, определяемые из (4.3), будут однородными функциями нулевой степени и, следовательно, будут зависеть не от всех величин $\pi\hat{}_{\mu\nu}$ и $\nabla\hat{}_\lambda\pi\hat{}_{\mu\nu}$, а лишь от независимых аргументов вида $\pi\hat{}_{22}/\pi\hat{}_{11}, \ldots$, число которых на единицу меньше, чем число компонент тензоров $Q\hat{}^{\mu\nu}$, $Q\hat{}^{\mu\nu\lambda}$. Поэтому между компонентами обобщенных сил $Q\hat{}^{\mu\nu}$ и $Q\hat{}^{\mu\nu\lambda}$ должно существовать по крайней мере одно соотношение вида (4.7)[2].

---

[1] В случаях классических моделей теории пластичности при $k = 1$ связь между функцией диссипации и функцией нагружения рассматривалась Д. Д. Ивлевым [25].

[2] Если $\sigma(x^i)$ — однородная функция первой степени, то существует связь между обобщенными напряжениями, которые определены формулами

$$X_i = \frac{\partial\sigma}{\partial x^i} = \varphi_i(\nu^j), \qquad \nu^j = \frac{x^j}{x^1} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \end{pmatrix}$$

В самом деле, принимая, что эти соотношения при $i = 2, \ldots, n$ разрешимы относительно ν^j, можно написать

$$\nu^j = \psi^j(X_2, \ldots, X_n)$$

Подставляя эти функции в равенство, отвечающее $i = 1$

$$X_1 - \varphi_1(\nu^j) = X_1 - \varphi_1(\psi^j(X_2, \ldots, X_n)) = f(X_i) = 0 \quad (A)$$

получим искомое соотношение $f(X_i) = 0$, связывающее напряжения X_i. Это соотношение можно рассматривать как уравнение поверхности нагружения в пространстве X_i. Если среди n функций φ_i $(\nu^2, \ldots, \nu^n)$ имеется только $s < n - 1$ независимых функций, то указанное выше предположение (соответствующее $s = n - 1$) о разрешимости не выполняется. В этом случае вместо одного уравнения (A) получится $n - s$ уравнений вида

$$f_k(X_i) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n - s)$$

Вся предыдущая теория развита в рамках теории конечных деформаций, допущения о малости деформации может только привести к упрощению или линеаризации полученных соотношений.

5. Классические модели. 1°. *Модель идеальной жидкости* (*газа*). Здесь $\Lambda = {}^1/_2\, \rho v^2 - \rho\, U$, причем внутренняя энергия задается как функция только от плотности ρ и энтропии S, а функционал δW^* задается в виде

$$\delta W^* = \int_V\int_t [\rho\Theta\delta S + F_\alpha \delta_1 x^\alpha + N\delta t]\, d\tau\, dt \tag{5.1}$$

Тензор напряжения вычисляем по (3.10). Он оказывается шаровым

$$p_\alpha{}^\beta = -p\delta_\alpha{}^\beta, \qquad p = \rho^2 \partial U / \partial \rho$$

Уравнения Эйлера (4.2) превращаются в уравнения движения идеальной жидкости. Далее имеем

$$\Theta = (\partial U / \partial S)_{\rho=\mathrm{const}}$$

Уравнение (5.1) дает уравнение для определения S по заданному N:

$$\rho\Theta\, dS \,/\, dt = N$$

В этом случае при решении задач можно рассматривать и находить остаточные деформации, которые обратимы по своей природе.

2°. *Модель вязкой теплопроводной жидкости* (*газа*). Отличие от идеальной жидкости заключается только в усложнении функционала δW^*. Для модели вязкой жидкости нужно положить

$$\delta W^* = \int_V\int_t [\rho\Theta\delta S + F_\alpha \delta_1 x^\alpha - \tau_\alpha{}^\beta \nabla_\beta \delta x^\alpha - \operatorname{div} \mathbf{q}\delta t]\, d\tau\, dt$$

Уравнение баланса энтропии в этом случае имеет форму

$$\rho\Theta \frac{dS}{dt} = -\Theta \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\Theta} - \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \operatorname{grad} \Theta + \tau^{\wedge\mu\nu} \nabla^\wedge{}_\nu v^\wedge{}_\mu$$

Если принять по определению, что существует функция диссипации

$$\sigma(\nabla^\wedge{}_\mu \Theta, \nabla^\wedge{}_\mu v^\wedge{}_\nu, \mathbf{L}_{(p)}) = -\frac{\mathbf{q}}{\Theta} \operatorname{grad} \Theta + \tau^{\wedge\mu\nu} \nabla^\wedge{}_\nu v^\wedge{}_\mu$$

где $\mathbf{L}_{(p)}$ — некоторые величины, определенные в п. 2, то при наличии законов (4.3) будут иметь место следующие соотношения:

$$-\frac{1}{\Theta} q^{\wedge\mu} = \mu_1 \frac{\partial\sigma}{\partial(\nabla^\wedge{}_\mu \Theta)}, \qquad \tau^{\wedge\mu\nu} = \mu_3 \frac{\partial\sigma}{\partial(\nabla^\wedge{}_\nu v^\wedge{}_\mu)} \tag{5.2}$$

Если функция диссипации зависит от $\nabla^\wedge{}_\nu v^\wedge{}_\mu$ только через компоненты тензора скоростей деформации, то тензор $\tau^{\wedge\mu\nu}$ симметричный.

Классическая модель вязкой среды Навье-Стокса получится, если принять, что функция диссипации σ есть положительно определенная квадратичная форма по $\nabla^\wedge{}_\mu\Theta$ и $\nabla^\wedge{}_\nu \mu^\wedge{}_\mu$. В этом случае соотношения (5.2) линейны и отвечают принципу Онзагера.

Предположение об изотропии вносит существенное упрощение в вид квадратичной формы для σ, причем в этом случае будут отсутствовать перекрестные тепловые и вязкие эффекты.

3°. *Модель упругого тела*. В этом случае имеем

$$\Lambda = {}^1/_2 \rho v^2 - \rho U(\varepsilon^\wedge{}_{\mu\nu}^{(e)}, S, L_{(p)}), \qquad \varepsilon^\wedge{}_{\mu\nu}^{(e)} = {}^1/_2 (g^\wedge{}_{\mu\nu} - g^*{}_{\mu\nu})$$

$$\delta W^* = \int_V\int_t [\rho\Theta\delta S + F_\alpha \delta_1 x^\alpha + N\delta t]\, d\tau\, dt$$

Для получения всех соотношений в виде частного случая системы уравнений в пп. 3 и 4 надо положить

$$g^*_{\mu\nu} = g^\circ_{\mu\nu}(\xi^\lambda), \qquad A^\alpha_{\ \mu}(\xi^\lambda) = x^\alpha_{\ \mu}(\xi^\lambda, t_0)$$

Так как $A^\alpha_{\ \mu}$ определяют переход от системы координат наблюдателя x^α к фиксированному базису «начального состояния», то величины $A^\alpha_{\ \mu}$ исключаются из числа неизвестных переменных величин и превращаются в параметры типа $L_{(p)}$.

Система уравнений импульсов сводится к уравнениям (3.9), в которых компоненты тензора напряжений $p^{\gamma\beta} = g^{\gamma\alpha} p_\alpha^{\ \beta}$ согласно (3.10) можно написать в виде

$$p^{\gamma\beta} = \rho \frac{\partial U}{\partial x^\alpha_{\ \mu}} x^\beta_{\ \mu} g^{\gamma\alpha} = \rho \frac{\partial U}{\partial \hat{\varepsilon}^{(e)}_{\mu\nu}} x^\gamma_{\ \mu} x^\beta_{\ \nu} = p^{\wedge\mu\nu} x^\gamma_{\ \mu} x^\beta_{\ \nu}$$

Формулу для Θ и уравнение энергии, равносильное уравнению баланса энтропии, можно представить в виде

$$\Theta = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{\hat{\varepsilon}^{(e)}_{\mu\nu} = \mathrm{const}}, \quad \rho\Theta \frac{dS}{dt} = N$$

4°. *Модели пластических тел.* При некоторых добавочных частных предположениях многие известные модели теории идеальной пластичности и пластичности с упрочнением можно получить из общей теории, развитой в пп. 3 и 4. Для этого достаточно принять

$$\Lambda = {}^1\!/_2 \rho v^2 - \rho U (g^*_{\mu\nu}, g^\wedge_{\mu\nu} S, L_{(p)})$$
$$\delta W^* = \int\limits_V \int\limits_t [\rho\Theta\delta S + F_\alpha \delta_1 x^\alpha - Q^{\wedge\mu\nu} \delta \hat{\varepsilon}^{(p)}_{\mu\nu} + N\delta t]\, d\tau\, dt \tag{5.4}$$

В отличие от общего случая компоненты $A^\alpha_{\ \mu}$ входят в Λ и δW^* только через компоненты метрического тензора в начальном состоянии

$$g^*_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} A^\alpha_{\ \mu} A^\beta_{\ \nu}, \quad [\hat{\varepsilon}^{(p)}_{\mu\nu} = {}^1\!/_2 (g^*_{\mu\nu} - g^\circ_{\mu\nu})]$$

Очевидно, что $Q^{\wedge\mu\nu}$ можно считать симметричным; при приложении общей теории необходимо учесть тождество

$$Q^{\wedge\mu\nu} \delta \hat{\varepsilon}^{(p)}_{\mu\nu} = Q^{\wedge\mu\nu} B_{\nu\alpha} \delta A^\alpha_{\ \mu}$$

Произвольность вариаций $\delta \hat{\varepsilon}^{(p)}_{\mu\nu} = {}^1\!/_2\, \delta g^*_{\mu\nu}$ теперь приводит вместо девяти уравнений (3.4) только к шести

$$-\rho \frac{\partial U}{\partial g^*_{\mu\nu}} = {}^1\!/_2 Q^{\wedge\mu\nu} \tag{5.5}$$

Для тензора напряжений из формулы (3.10) так же как и при выводе формулы (5.3) получим

$$p^{\wedge\mu\nu} = \rho \frac{\partial U}{\partial \hat{\varepsilon}^{(e)}_{\mu\nu}} \tag{5.6}$$

В важном частном случае, когда в (5.4) компоненты $g^*_{\mu\nu}$ и $g^\wedge_{\mu\nu}$ входят только через разность $g^\wedge_{\mu\nu} - g^*_{\mu\nu} = 2\hat{\varepsilon}^{(e)}_{\mu\nu}$ (среда «без памяти»), получается равенство

$$p^{\wedge\mu\nu} = Q^{\wedge\mu\nu} \tag{5.7}$$

Следует подчеркнуть, что равенство (5.7) не имеет места для среды с «памятью», когда внутренняя энергия зависит от компонент упругих деформаций и от компонент пластических деформаций $\hat{\varepsilon}^{(p)}_{\mu\nu}$. Согласно (4.2) для σ_2 имеем

$$\sigma_2 = Q^{\wedge\mu\nu} e^{\wedge(p)}_{\mu\nu} \tag{5.8}$$

если имеет место равенство (5.7), то формула (5.8) дает

$$\sigma_2 = p^{\wedge\mu\nu} e^{\wedge(p)}_{\mu\nu} \tag{5.9}$$

Однако в общем случае формула (5.9) неверна. Для среды «с памятью» уравнение (5.5) можно написать в виде

$$-2\rho\frac{\partial U}{\partial g^*_{\mu\nu}}=\rho\frac{\partial U}{\partial\varepsilon^{\wedge(e)}_{\mu\nu}}-\rho\frac{\partial U}{\partial\varepsilon^{\wedge(p)}_{\mu\nu}}=Q^{\wedge\mu\nu}.$$

Поэтому в этом случае вместо равенства (5.7) на основании (5.6) получим

$$Q^{\wedge\mu\nu}=p^{\wedge\mu\nu}-\rho\frac{\partial U}{\partial\varepsilon^{\wedge(p)}_{\mu\nu}} \tag{5.10}$$

Для среды «с памятью» формула (5.9) заменится формулой [1]

$$\sigma_2=\left(p^{\wedge\mu\nu}-\rho\frac{\partial U}{\partial\varepsilon^{\wedge(p)}_{\mu\nu}}\right)e^{\wedge(p)}_{\mu\nu} \tag{5.11}$$

Данное выше обсуждение величины σ_2 существенно, так как в научной литературе широко распространено использование равенства (5.9).

Полное уравнение баланса энтропии (4.1) в рассматриваемой модели имеет вид

$$\rho\Theta\frac{dS}{dt}=-\Theta\nabla^{\wedge}_{\mu}\frac{q^{\wedge\mu}}{\Theta}-\frac{q^{\wedge\mu}}{\Theta}\nabla^{\wedge}_{\mu}\Theta+Q^{\wedge\mu\nu}e^{\wedge(p)}_{\mu\nu} \tag{5.12}$$

Для величины диссипации σ имеем

$$\sigma=-\frac{q^{\wedge\mu}}{\Theta}\nabla^{\wedge}_{\mu}\Theta+\sigma_2,\qquad \sigma_2=Q^{\wedge\mu\nu}e^{\wedge(p)}_{\mu\nu} \tag{5.13}$$

Формула (5.13) показывает, что только для изотермических состояний требование $\sigma_2\geqslant 0$ вполне обосновано.

Из условия о независимости приращения энтропии от времени деформирования получается, что σ_2 — однородная функция первой степени от $e^{\wedge(p)}_{\mu\nu}$, быть может зависящая еще и от соответствующих параметров упрочнения χ_s.

Из теории, развитой в п. 4 следует, что для необратимых процессов

$$Q^{\wedge\mu\nu}=\frac{\partial\sigma_2}{\partial e^{\wedge(p)}_{\mu\nu}} \tag{5.14}$$

Соотношения (5.14) вместе с (5.5) можно рассматривать как уравнения для определения компонент тензора скоростей пластических деформаций $e^{\wedge(p)}_{\mu\nu}$.

Эти соотношения заменяют ассоциированный закон. После определения функции нагружения из (5.14) можно вывести [25] ассоциированный закон, в который в общем случае входят компоненты $Q^{\wedge\mu\nu}$, а не компоненты тензора напряжений $p^{\wedge\mu\nu}$, как это принято в работе [25].

Отметим, что в рассматриваемом случае для $p^{\wedge\mu\nu}$ так же как и для $Q^{\wedge\mu\nu}$, можно написать соотношения типа (5.14)

$$p^{\wedge\mu\nu}=\frac{\partial\varphi}{\partial e^{\wedge(p)}_{\mu\nu}}$$

Однако функция $\varphi\lesseqgtr 0$ отличается от функции диссипации σ_2 и, как следует из (5.10), (5.14) и (5.4), связана с ней равенством

$$\varphi=\sigma_2+\rho\frac{\partial U}{\partial\varepsilon^{\wedge(p)}_{\mu\nu}}e^{\wedge(p)}_{\mu\nu}+\omega$$

где ω — произвольная функция, не зависящая от $e^{\wedge(p)}_{\mu\nu}$.

Для среды «с памятью» в аргументы функции нагружения вместо $Q^{\wedge\mu\nu}$ согласно (5.10) можно ввести $p^{\wedge\mu\nu}$. Для обратимых процессов можно принять, что

---

[1] Пояснение различия и связи величины диссипации с величиной работы тензора напряжений на пластических деформациях дано в книге [14] (см. стр. 269).

$\sigma_2 = 0$. Во многих типичных случаях из равенства $\sigma_2 = 0$ следует, что $e\hat{}^{(p)}_{\mu\nu} = 0$. Однако можно рассматривать и такие функции σ_2, когда при обратимых процессах могут возникать остаточные или пластические деформации.

Задавая соответствующим образом внутреннюю энергию и функцию диссипации, из (3.2), (5.12) и (5.14) можно получить конкретные модели теории пластичности, в которых параметры упрочнения χ_s — заданные функции или функционалы определяющих параметров. Если функция диссипации σ_2 имеет форму[1]

$$\sigma_2 = k\sqrt{e_{\mu\nu}^{(p)} e^{(p)\mu\nu}}$$

где k не зависит от $e_{\mu\nu}^{(p)}$, то величины $Q\hat{}^{\mu\nu}$, определяемые по (5.14), как нетрудно видеть, лежат на поверхности

$$Q\hat{}^{\mu\nu} Q\hat{}_{\mu\nu} = k^2 \tag{5.15}$$

В модели идеальной пластичности по Мизесу [21]

$$U = U(\varepsilon\hat{}^{(e)}_{\mu\nu}, S, \mathbf{L}_{(p)}), \qquad k = \mathrm{const}$$

В модели пластичности с упрочнением Шмидта — Осгуда

$$U = U(\varepsilon\hat{}^{(e)}_{\mu\nu}, S, \mathbf{L}_{(p)}), \qquad k = k(\chi)$$

где χ определено равенством $d\chi = \sqrt{d\varepsilon_{\mu\nu}^{(p)} d\varepsilon^{(p)\mu\nu}}$, а $k(\chi)$ — функция, устанавливаемая эмпирически. Поскольку в этих случаях внутренняя энергия не зависит от пластических деформаций, имеет место равенство (5.7) и уравнение для поверхности нагружения можно записать в виде

$$p\hat{}^{\mu\nu} p\hat{}_{\mu\nu} = k^2$$

В модели с трансляционным упрочнением можно положить

$$U = U_0(\varepsilon\hat{}^{(e)}_{\mu\nu}, S, \mathbf{L}_{(p)}) + {}^1/_2 c\varepsilon\hat{}^{(p)}_{\mu\nu}\varepsilon\hat{}^{(p)\mu\nu}, \qquad k = \mathrm{const}$$

Здесь вместо (5.7) получим

$$Q\hat{}^{\mu\nu} = p\hat{}^{\mu\nu} - c\varepsilon\hat{}^{(p)\mu\nu}$$

Поэтому уравнение поверхности нагружения (5.15) имеет вид

$$(p\hat{}^{\mu\nu} - c\varepsilon\hat{}^{(p)\mu\nu})(p\hat{}_{\mu\nu} - c\varepsilon\hat{}^{(p)}_{\mu\nu}) = k^2$$

6. Пример модели континуальной теории дислокаций. Вариационный принцип позволяет строить различные модели сред с континуальным распределением дислокаций. Ниже рассмотрим частный пример в рамках теории малых деформаций [2], в котором кинетическая энергия связана лишь с инерционными свойствами актуального состояния $T = {}^1/_2\,\rho v^2$, а внутренняя энергия представляет собой квадратичную форму от компонент тензора упругих деформаций $\varepsilon_{\mu\nu}^{(e)}$, от разности энтропий $S - S_0$ деформированного и начального состояний и в отличие от классической теории упру-

---

[1] При таком задании σ_2 вместо компонент тензора скоростей пластических деформаций, можно было бы взять компоненты девиатора тензора скоростей пластических деформаций. Соответствующие изменения последующих формул очевидны.

[2] Как известно, в теории малых деформаций можно принимать, что компоненты малых тензоров в системе отсчета наблюдателя и в сопутствующей системе отсчета одинаковы. В связи с этим дальше опускается символ ^ и не различаются операторы D, $d(\ldots)/dt$, $\partial(\ldots)/\partial\xi^\mu$, $\partial(\ldots)/\partial x^\alpha$, когда они применяются к компонентам малых тензоров. Кроме этого, дальше принято, что $g^\circ_{\mu\nu}(\xi^\lambda) = g_{\mu\nu}(\xi^\lambda)$.

гости еще от девяти внутренних параметров-компонент тензора плотности дислокаций $S^{\alpha\beta}$:

$$U = {}^1/_2 A^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta}^{(e)}\varepsilon_{\gamma\delta}^{(e)} + B^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}^{(e)}(S - S_0) + C^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta}^{(e)}S^{\gamma\delta} + $$
$$+ D_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}(S - S_0) + {}^1/_2 E_{\alpha\beta\gamma\delta}S^{\alpha\beta}S^{\gamma\delta} + f(S) \qquad (6.1)$$

где $A^{\alpha\beta\gamma\delta}$, ..., $E_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — заданные неварьируемые параметры (в общей теории они соответствуют параметрам $L_{(p)}$). Аддитивную постоянную можно считать произвольной функций от энтропии $f(S)$.

Положим

$$\Lambda = T - \rho U$$

$$\delta W^* = \int\limits_V \int\limits_t [\rho\Theta\delta S + F_\alpha \delta_1 x^\alpha - Q^{\mu\nu}\delta\varepsilon_{\mu\nu}^{(p)} - Q^{\mu\nu\lambda}\nabla_\lambda (B_{\mu\alpha}\delta A^\alpha{}_\nu) - \operatorname{div} \mathbf{q}\delta t]\, d\tau\, dt \qquad (6.2)$$

В соответствии с общей теорией п. 5 компоненты $Q^{\mu\nu}$ и q^α определены формулами (4.3). Диссипативные функции зададим следующими выражениями:

$$\sigma_1 = \Theta^{-1}F^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha\Theta)(\nabla_\beta\Theta) \qquad (6.3)$$

$$\sigma_2 = \left(K^{\alpha\beta\gamma\delta}e_{\alpha\beta}^{(p)}e_{\gamma\delta}^{(p)} + 2L^{\alpha\beta\gamma\delta}e_{\alpha\beta}^{(p)}\frac{dS_{\gamma\delta}}{dt} + M^{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{dS_{\alpha\beta}}{dt}\frac{dS_{\gamma\delta}}{dt}\right)^{1/2} \qquad (6.4)$$

Здесь $F^{\alpha\beta}$, $K^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $L^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $M^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — компоненты тензоров физических характеристик среды, которые в силу положительной определенности σ_1 и σ_2 должны удовлетворять известным неравенствам. При использовании формул (4.3) учтем, что для малых деформаций верны равенства

$$dS_{\alpha\beta} / dt = {}^1/_2 \varepsilon^{\gamma\sigma}{}_\alpha \nabla_\gamma \pi_{\beta\sigma} \qquad (6.5)$$

Из (4.3), (6.3) — (6.5) следует, что

$$q^\alpha = -F^{\alpha\beta}\nabla_\beta\Theta \qquad (6.6)$$

$$Q^{\alpha\beta} = Q^{\beta\alpha} = \frac{\partial\sigma_2}{\partial e_{\alpha\beta}^{(p)}} = \frac{1}{\sigma_2}\left(K^{\alpha\beta\gamma\delta}e_{\gamma\delta}^{(p)} + L^{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{dS_{\gamma\delta}}{dt}\right) \qquad (6.7)$$

$$Q^{\beta\sigma\gamma} = \frac{\partial\sigma_2}{\partial(\nabla_\gamma\pi_{\beta\sigma})} = {}^1/_2\frac{\partial\sigma_2}{\partial(dS_{\alpha\beta}/dt)}\varepsilon^{\gamma\sigma}{}_\alpha = {}^1/_2 R^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\sigma}{}_\alpha \qquad (6.8)$$

Из равенств (6.8) вытекают восемнадцать соотношений

$$Q^{\beta\sigma\gamma} + Q^{\beta\gamma\sigma} = 0 \qquad (6.9)$$

которые представляют собой часть уравнений (4.7), определяющих поверхность нагружения в пространстве переменных $\{Q^{\alpha\beta}, Q^{\alpha\beta\gamma}\}$. Остальные девять компонент $Q^{\beta[\sigma\gamma]}$ выражаются через девять компонент тензора

$$R^{\alpha\beta} = \frac{\partial\sigma_2}{\partial(dS_{\alpha\beta}/dt)} = \frac{1}{\sigma_2}\left(L^{\gamma\delta\alpha\beta}e_{\alpha\beta}^{(p)} + M^{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{dS_{\gamma\delta}}{dt}\right) \qquad (6.10)$$

В пространстве переменных $\{Q^{\alpha\beta}, R^{\alpha\beta}\}$ уравнение поверхности нагружения имеет вид

$$f(Q^{\alpha\beta}, R^{\alpha\beta}, K^{\alpha\beta\gamma\delta}, L^{\alpha\beta\gamma\delta}, M^{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0 \qquad (6.11)$$

В рассматриваемом случае из общей теории пп. 4,5 получаем следующую систему уравнений, состоящую из уравнений движения (3.9), уравнения баланса энтропии

$$\rho\Theta\frac{dS}{dt} = -\Theta\nabla_\alpha\frac{q^\alpha}{\Theta} + \sigma_1 + \sigma_2$$

уравнений для внутренних параметров (3.4)

$${}^1/_2\varepsilon^{\gamma\beta}{}_\sigma\nabla_\gamma(R^{\sigma\alpha} + \Sigma^{\sigma\alpha}) + p^{\alpha\beta} = Q^{\alpha\beta} \qquad (6.12)$$

уравнений состояния

$$\rho^{-1}p^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma\delta}^{(e)} + B^{\alpha\beta}(S - S_0) + C^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}S^{\gamma\delta} \tag{6.13}$$

$$\rho^{-1}\Sigma_{\gamma\delta} = C^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta}^{(e)} + D_{\gamma\delta}(S - S_0) + E_{\alpha\beta\gamma\delta}S^{\gamma\delta} \tag{6.14}$$

а также равенств (6.6), (6.7), (6.10). Уравнения (6.12), симметрированные по индексам $\alpha\beta$, отличаются от (5.7) в теории пластичности членом $^1/_2\, \varepsilon^{\gamma\beta}{}_\sigma\nabla_\gamma(R^{\sigma\alpha} + \Sigma^{\sigma\alpha})$. Уравнения (6.12), альтернированные по $\alpha\beta$ имеют вид

$$\nabla_\beta(R'^{\beta}_{\alpha} + \Sigma'^{\beta}_{\alpha}) - {}^2/_3\nabla_\alpha(R_\beta^\beta + \Sigma_\beta^\beta) = 0 \tag{6.15}$$

Здесь штрихом обозначена операция взятия девиатора. В задачах, в которых имеет место однородность по частицам, т. е. когда $\nabla^{\wedge}{}_{\nu}A^{\alpha}{}_{\mu} = 0$ и $\nabla^{\wedge}{}_{\nu}\, S = 0$, получим $S^{\mu\nu} = 0$, поэтому решение в этом случае в рамках предлагаемой модели совпадает с решением этой же задачи в рамках модели пластической среды «без» памяти в п. 6.

Соотношения (6.12) можно использовать для замены в (6.11) $Q^{\alpha\beta}$ через $p^{\alpha\beta}$, $R^{\sigma\alpha}$ и $\Sigma^{\sigma\alpha}$ и через $\nabla_\gamma R^{\sigma\alpha}$ и $\nabla_\gamma\Sigma^{\sigma\alpha}$. Отсюда ясно, что удобнее оперировать с величинами $Q^{\alpha\beta}$ вместо $p^{\alpha\beta}$ при формулировке условий нагружения.

(Отметим, что учет в кинетической энергии инерционных свойств начального состояния привел бы к усложнению равенства (6.15) членом вида dK_α / dt, где K_α — обобщенный импульс, связанный с движением дислокаций).

Такова общая линейная теория с учетом анизотропии. Все предыдущие формулы существенно упрощаются, если свойства анизотропии проявляются [22] только через $e^{(p)}_{\alpha\beta}$ и $S^{\alpha\beta}$. В этом случае вместо (6.6), (6.7) и (6.10) получим

$$q^\alpha = -\varkappa\nabla^\alpha\Theta \tag{6.16}$$

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sigma_2}\left[l_1 e^{(p)}_{\alpha\beta} + \left(l_2 e^{(p)}_{\gamma\delta} + l_3\frac{dS_{\gamma\delta}}{dt}\right)g^{\gamma\delta}g_{\alpha\beta} + l_4\frac{dS_{(\alpha\beta)}}{dt}\right]$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sigma_2}\left[l_4 e_{\alpha}{}^{(p)}_{\beta} + \left(l_3 e^{(p)}_{\beta\gamma} + l_5\frac{dS_{\gamma\delta}}{dt}\right)g^{\gamma\delta}g_{\alpha\beta} + l_6\frac{dS_{\alpha\beta}}{dt} + l_7\frac{dS_{\beta\alpha}}{dt}\right]$$

где $\varkappa$, $l_1,\ldots, l_7$ — скаляры, которые в общем случае можно рассматривать как функции скалярных инвариантов определяющих параметров, а в линейной теории как константы. Функция нагружения (6.11), соответствующая функции диссипации (6.4), находится путем подстановки в правую часть равенства

$$\sigma_2 = Q^{\alpha\beta}e^{(p)}_{\alpha\beta} + Q^{\alpha\beta\gamma}\nabla_\gamma\pi_{\alpha\beta} = Q^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}^{(p)} + R^{\alpha\beta}\frac{dS_{\alpha\beta}}{dt}$$

величин $e^{(p)}_{\alpha\beta}$ и $dS_{\alpha\beta} / dt$, выраженных из (6.16) через $\sigma_2\, Q^{\alpha\beta}$ и $\sigma_2 R^{\alpha\beta}$, и имеет форму

$$f(Q^{\alpha\beta}, R^{\alpha\beta}, l_1, \ldots, l_7) = (Q'_{\alpha\beta} - c_1R_{\alpha\beta})(Q'^{\alpha\beta} - c_1R^{\alpha\beta}) - c_2R'_{(\alpha\beta)}R'^{(\alpha\beta)} -$$
$$- c_3R_{[\alpha\beta]}R^{[\alpha\beta]} - c_4(g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta})^2 - c_5(g_{\alpha\beta}Q^{\alpha\beta})^2 - c_6(g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta})(g_{\alpha\beta}Q^{\alpha\beta}) - c_0 \tag{6.17}$$

где c_0, $c_1,\ldots$ c_6 определяются через $l_1,\ldots,$ l_7 очевидным образом. Функция нагружения (6.17) представляет собой поверхность второго порядка в пространстве переменных $\{Q^{\alpha\beta}, R^{\alpha\beta}\}$. Если $c_i = \mathrm{const}$, то эта поверхность неподвижна. Если $c_5 = c_6 = 0$, то пластические деформации несжимаемы. Случай $l_1 = \mathrm{const}$, $l_2 = l_3 = \ldots = l_7 \neq 0$ $(c_1 = \ldots = c_6 = 0,\ c_0 = \mathrm{const})$ соответствует идеально пластическому телу, рассмотренному в п. 5, при этом $R^{\alpha\beta} = 0$.

В общем случае $R^{\alpha\beta}$ отличны от нуля и описывают явление упрочнения. В пространстве напряжений $\{Q'^{\alpha\beta}\}$ поверхность нагружения представляет собой сферу с изменяющимся с течением времени центром $c_1\, R^{\alpha\beta}$ и радиусом r

$$r^2 = c_0 + c_2R'_{(\alpha\beta)}R'^{(\alpha\beta)} + c_3R_{[\alpha\beta]}R^{[\alpha\beta]} + c_4(g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta})^2$$

который также меняется в процессе деформации. Конкретные модели фиксируются выбором коэффициентов l_i (или c_i).

Поступила 11 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Kondo K. On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding. Proc. 2. Japan. Nat. Congr. Appl. Mech. (1952) Tokyo, 1953, pp. 41—47.
2. Kondo K. Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering by means of geometry. Tokyo, 1955—1962, vol. 1—3.
3. Bilby B. A., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non — Riemannian geometry. Proc. Roy. Soc., 1955, A 231, pp. 263—273.
4. Bilby B. A., Smith E. Continuous distribution of dislocations. Proc. Roy. Soc., 1956, A 236, pp. 481—505.
5. Bilby B. A. Continuous distribution of dislocations. Progr. Sol. Mech., vol. 1, New York Interscience, 1960.
6. Крёнер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. М., Мир, 1965.
7. Седов Л. И. Математические методы построения моделей сплошных сред. Усп. матем. н., 1965, т. 20, вып. 5, стр. 121 –180.
8. Кунин И. А. Теория дислокаций. В кн.: Схоутен Я. Н. «Тензорный анализ для физиков». М., «Наука», 1965.
9. Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1962.
10. Схоутен И. А., Стройк Д.-Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. М.- Л., Изд-во иностр. лит., 1939.
11. Kröner E. Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Berlin, Springer, 1958.
12. Косевич А. М. Динамическая теория дислокаций. Усп. физ. н., 1964, т. 84, вып. 4, стр. 579.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. Изд. 3-е, М., Физматгиз, 1965.
14. Седов Л. И. Введение в механику сплошных сред. М., Физматгиз, 1962.
15. Бердичевский В. Л. Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3, стр. 510—530.
16. Бердичевский В. Л. Вариационные методы построения моделей сплошных сред с необратимыми процессами в специальной теории относительности. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, стр. 1081—1086.
17. Седов Л. И. О тензоре энергии - импульса и о макроскопических внутренних взаимодействиях в гравитационном поле и материальных средах. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 3, стр. 519—522.
18. Toupin R. A. Theories of elasticity wilh couple-stress, Arch. Rat. Mech. and Anal. 17, No. 2, 85—112, 1964.
19. Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity, Arch. Rat. Mech. and Anal. 17, No. 1, 51—78, 1964.
20. Лурье М. В. Применение вариационного принципа для исследования разрывов в сплошной среде. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4, стр. 747—753.
21. Ziegler H. Uber ein Prinzip der gröten srezifischen Entropie produktion und seine Bedeutung für die Rheologie. Pheol. Acta, 1962, Bd. 2, No. 3, pp. 230—235.
22. Besseling J.F. A thermodynamic approach to Rheology, Rep. IUTAM —symposium on «Irreversible Aspects of Continuum Mechanics» in Wien, 1966; Рус. пер.: Сб. пер., «Механика», 1967, № 2, стр. 108—135.
23. Drucker D. C. A more Fundamental Approach to Plastic Stressstrain Relations. Proc. of the First US. Nat Congr. of Appl. Mech., ASME, 1951.
24. Prigogine I. Etude thermodinamique des phènomenes irrèversibles, 1947. (Desoer, Liege).
25. Ивлев Д. Д. О диссипативной функции в теории пластических сред. Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 5.
26. Лохин В. В., Седов Л.И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, стр. 393—417.