О РАСЧЕТЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ЗАГРУЖЕННЫХ ПО ЛИНИЯМ

Э. И. Григолюк, В. М. Толкачев

(Москва)

Исследование напряженного состояния круговой цилиндрической оболочки, загруженной по линии на поверхности, выполнено, по-видимому, впервые Одквистом [1] в 1946. При этом была рассмотрена оболочка, подкрепленная на торцах жесткими шайбами и загруженная по отрезку образующей равномерно распределенной радиальной и окружной нагрузкой, а также окружным изгибающим моментом. Решение строилось, исходя из приближенного уравнения, полученного в предположении, что отсутствуют окружная деформация и сдвиг срединной поверхности, а также продольный изгибающий и крутящие моменты. В то же время опытами Шоесоу и Коойстра [2] (1945 г.) было показано, что неучет продольного момента не обоснован, так как отношение продольного изгибающего момента к окружному может достигать 0.5. В 1954 г. в работе [3] с использованием уравнений пологих оболочек была рассмотрена свободно опертая оболочка, нагруженная по образующим радиальными усилиями и окружными моментами. Решение строилось, исходя из системы однородных уравнений для оболочки, разрезанной по линии нагружения. Внешние усилия и искомые величины разложены в ряды Фурье по продольной координате. Такой способ решения не является рациональным, если ряды для внешних усилий сходятся медленно.

В настоящей работе при рассмотрении замкнутой круговой цилиндрической оболочки, нагруженной по произвольной линии срединной поверхности, метод расчета основывается на использовании функции Грина — решения от сосредоточенной силы. При этом строится частный интеграл, соответствующий решению задачи для бесконечно длинной оболочки. Граничным условиям на торцах можно удовлетворить, добавляя решение однородных уравнений.

1. Известно [4], что решение системы уравнений равновесия в смещениях эквивалентно решению трех раздельных линейных дифференциальных уравнений относительно трех функций смещений Ψ_j:

$$D\Psi_j + fX_j = 0 \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

где D — линейный дифференциальный оператор восьмого порядка в частных производных, f — известная константа, X_j — компоненты интенсивности внешней поверхностной нагрузки, направленные соответственно вдоль образующей, по дуге окружности и по окружной и нормали к поверхности оболочки.

Функции X_j в (1.1) при рассмотрении замкнутых цилиндрических оболочек являются периодическими в окружном направлении. Пусть вдоль некоторой произвольной линии l (ξ_0, θ_0) поверхности оболочки действует погонное усилие q с компонентами q_j $(j = 1, 2, 3)$. В этом случае X_j в (1.1) можно представить в виде

$$X_j(\xi, \theta) = \frac{1}{\pi^2 R}\int_l q_j(\xi_0, \theta_0)\, \delta(\xi - \xi_0, \theta - \theta_0)\, dl \qquad \left(\xi = \frac{x}{R}, \ \theta = \frac{y}{R}\right)$$

$$dl = \sqrt{d\xi^2 + d\theta^2} \tag{1.2}$$

Здесь x, y — продольная и окружная координаты поверхности, R — радиус срединной поверхности оболочки, $\delta(\xi, \theta)$ — периодическая дельтаобразная функция, которая может быть представлена в виде

$$\delta(\xi, \theta) = \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta\right)\int_0^{\infty} \cos \mu\xi\, d\mu \tag{1.3}$$

Решение уравнений (1.1) представим интегралами, аналогичными (1.2)

$$\Psi_j(\xi, \theta) = \frac{f}{\pi^2 R}\int_l q_j(\xi_0, \theta_0)\, G(\xi - \xi_0, \theta - \theta_0)\, dl \tag{1.4}$$

Для произвольной внешней нагрузки q_j задача сводится к нахождению функции Грина G, не зависящей от вида q_j. Для G имеем уравнение

$$DG(\xi, \theta) + \delta(\xi, \theta) = 0 \tag{1.5}$$

Решение уравнения (1.5) известно. Впервые оно получено Юанем [5] в 1946 г. при рассмотрении действия радиальной сосредоточенной силы на пологую цилиндрическую оболочку. В 1951 г. В. М. Даревский [6] обобщил решение (1.5) для уравнений пологой оболочки в варианте Лява.

Зная решение (1.4) от нормального погонного усилия q, можно получить решения от погонных изгибающих моментов M_1 и M_2, действующих вдоль линии l, если под этими моментами понимать предельные соотношения

$$M_1 = R \lim_{\Delta\xi\to 0}(2\Delta\xi q_3), \qquad M_2 = R \lim_{\Delta\theta\to 0}(2\Delta\theta q_3)$$

Такое решение имеет вид

$$\Psi_{3M}(\xi, \theta) = \frac{f}{\pi^2 R^2}\int_l \left[M_1(\xi_0, \theta_0)\frac{\partial}{\partial\xi} + M_2(\xi_0, \theta_0)\frac{\partial}{\partial\theta}\right] G(\xi - \xi_0, \theta - \theta_0)\, dl \tag{1.6}$$

Если функции (1.4) найдены, то осевое u, окружное v и радиальное w смещение рединной поверхности определяются по формулам

$$u = \sum_{j=1}^{3} D_{j1}\Psi_j, \qquad v = \sum_{j=1}^{3} D_{j2}\Psi_j, \qquad w = \sum_{j=1}^{3} D_{j3}\Psi_j \tag{1.7}$$

где $D_{ji} = D_{ij}$ — линейные дифференциальные операторы. Для варианта теории оболочек, приведенного в монографии [4]

$$D_{11} = \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\xi^2} + a^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2(2-\nu)\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\theta^2} + 2\frac{\partial^4}{\partial\theta^4} + \left(\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\nabla^4\right]$$

$$D_{12} = -\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\theta}\left\{\frac{1-\nu}{2} + a^2\left[\nu(2-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1+\nu}{2}\nabla^4\right]\right\}$$

$$D_{13} = \frac{1-\nu}{2}\left(\nu\frac{\partial^3}{\partial\xi^3} - \frac{\partial^3}{\partial\xi\,\partial\theta^2}\right) + \frac{1+\nu}{2}a^2\left[(2-\nu)\frac{\partial^5}{\partial\xi^3\partial\theta^2} + \frac{\partial^5}{\partial\xi\,\partial\theta^4}\right]$$

$$D_{22} = \frac{1-\nu}{2}\left[2(1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right] + a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\nabla^4$$

$$D_{23} = \frac{1-\nu}{2}\left[(2+\nu)\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\theta} - \frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\right] - a^2\left[(2-\nu)\frac{\partial^5}{\partial\xi^4\partial\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{4-3\nu+\nu^2}{2}\frac{\partial^5}{\partial\xi^2\partial\theta^3} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^5}{\partial\theta^5}\right], \qquad D_{33} = \frac{1-\nu}{2}\nabla^4$$

$$\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right), \qquad a^2 = \frac{h^2}{12R^2} \tag{1.8}$$

Здесь ν, h — соответственно коэффициент Пуассона и толщина оболочки. Оператор D, соответствующий (1.8) имеет вид

$$D = \nabla^4\nabla^4 + 4\varkappa^4\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + 2(4-\nu^2)\frac{\partial^6}{\partial\xi^4\partial\theta^2} + 8\frac{\partial^6}{\partial\xi^2\partial\theta^4} + 2\frac{\partial^6}{\partial\theta^6} + 4\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\theta^4} \tag{1.9}$$

$$4\varkappa^4 = \frac{1-\nu^2}{a^2}$$

Подчеркнутые в (1.8) и (1.9) слагаемые соответствуют теории пологих цилиндрических оболочек. Смещения от моментов M_1 и M_2 определяются третьим слагаемым в (1.7), если вместо Ψ_3 подставить Ψ_{3M} из (1.6).

Обозначим через ε_1, ε_2, ω, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — соответственно продольную и окружную деформацию, деформацию сдвига срединной поверхности, продольную и окружную изгибную деформацию.

Из геометрических соотношений с учетом (1.7) и (1.4) получим

$$\varepsilon_1(\xi,\theta) = \frac{2(1+\nu)}{\pi^2 Eh}\int\limits_l \sum_{j=1}^{3} q_j(\xi_0,\theta_0)\,\varepsilon_{1j}(\xi-\xi_0,\theta-\theta_0)\,dl \tag{1.10}$$

Деформации ε_2, ω, $R\varkappa_1$, $R\varkappa_2$ имеют аналогичный вид и представляются через соответствующие функции Грина ε_{2j}, ω_j, $\varkappa_{1j}$, $\varkappa_{2j}$. Усилия и моменты выражаются через (1.10) из физических соотношений.

Описанный метод удобен тем, что независимо от вида внешних усилий решение задачи сводится к определению функции Грина G из (1.5). Компоненты же деформаций и усилий определяются интегрированием по формулам типа (1.10). Метод годится для нагрузок, действующих по произвольно расположенным линиям, а также для произвольных поверхностных нагрузок. Его удобно использовать в задачах, где усилия q_j подлежат определению. В этом случае необходимо решать интегральные уравнения.

2. Частное решение уравнения (1.5) с учетом (1.3) берется в виде

$$G(\xi,\theta) = -{}^1/_2 G_0(\xi) - \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\xi)\cos n\theta \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.5) для $G_n(\xi)$, получим обыкновенные неоднородные дифференциальные уравнения, решение которых имеет вид

$$G_1(\xi) \approx G_0(\xi) = \frac{\pi}{32\varkappa^4}\left[\frac{2}{3}|\xi|^3 - \frac{e^{-\varkappa|\xi|}}{\varkappa^3}(\cos\varkappa\xi + \sin\varkappa|\xi|)\right] \tag{2.2}$$

$$G_n(\xi) = \frac{\pi}{4n^7\Delta}\sum_{j=1}^{2}\frac{e^{-q_j n|\xi|}}{p_j q_j(p_j^2+q_j^2)}(a_j\cos p_j n\xi + b_j \sin p_j n|\xi|) \tag{2.3}$$

где p_j, q_j — соответственно действительная и мнимая части корней характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению для $G_n(\xi)$, причем значения q_j берутся положительные

$$a_j = p_j[A^2 \mp 4(p_1^2q_1^2 - p_2^2q_2^2) \mp 4Aq_j^2],\quad b_j = q_j[A^2 \mp 4(p_1^2q_1^2 - p_2^2q_2^2) \pm 4Ap_j^2] \tag{2.4}$$

$$\Delta = [A^2 + 4(p_1q_1 + p_2q_2)^2][A^2 + 4(p_1q_1 - p_2q_2)^2],\qquad A = p_1^2 - q_1^2 - p_2^2 + q_2^2$$

Верхний знак в (2.4) берется при $j = 1$, нижний — при $j = 2$. При получении $G_1(\xi)$ предположено, что $\varkappa^2 \gg 1$.

3. Функции Грина ε_{ij}, ω_j, $\varkappa_{ij}$ ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$), фигурирующие в формулах типа (1.10), вообще говоря, неограниченно возрастают в окрестности точки $\xi = \xi_0$, $\theta = \theta_0$. Главное значение ε_{2j}°, ω_j°, $\varkappa_{ij}^\circ$ этих функций получим, если вместо функции Грина G из (5) взять G° из решения уравнения

$$\nabla^4\nabla^4 G^\circ(\xi,\theta) + \delta(\xi,\theta) = 0 \tag{3.1}$$

Это решение имеет вид

$$G^\circ(\xi,\theta) = -\frac{\pi}{96}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n|\xi|}}{n^7}[(n|\xi|)^3 + 6(n|\xi|)^2 + 15(n|\xi|+1)]\cos n\theta - \frac{1}{4}\frac{\pi}{7!}|\xi|^7$$

Проделывая над $G°$ те же операции, что и над G при получении функций Грина в (1.10), оставляя при этом в дифференциальных операторах для ε_{ij}, ω_j, $\varkappa_{ij}$ только старшие производные (ибо только такие операторы могут дать неограниченные слагаемые для ε_{ij}, ω_j, $\varkappa_{ij}$), получим

$$\varepsilon_{11}° = -\frac{\pi}{4}\left[(1-\nu)\varphi_1 + \frac{1+\nu}{2}\varphi_2\right], \quad \varepsilon_{12}° = -\frac{\pi(1+\nu)}{8}(\psi_2 - \psi_1)$$

$$\varepsilon_{21}° = \frac{\pi(1+\nu)}{8}\varphi_2, \quad \varepsilon_{22}° = -\frac{\pi}{4}\left[\frac{3-\nu}{2}\psi_1 - \frac{1+\nu}{2}\psi_2\right] \tag{3.2}$$

$$\omega_1° = -\frac{\pi}{4}[(1-\nu)\psi_1 + (1+\nu)\psi_2], \quad \omega_2° = -\frac{\pi}{4}[2\varphi_1 - (1+\nu)\varphi_2]$$

$$\varkappa_{13}° = \varkappa_{23}° = \frac{\pi(1+\nu)}{8a^2}\left[\frac{1}{2}|\xi| - \frac{1}{2}\ln(\operatorname{ch}\xi - \cos\theta)\right]$$

где

$$\varphi_1 = \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n|\xi|}\cos n\theta + \frac{1}{2}\right]\operatorname{sig} n\xi = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi - \cos\theta}$$

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n|\xi|e^{-n|\xi|}\cos n\theta \operatorname{sig} n\xi = -\frac{1}{2}\xi\frac{1-\operatorname{ch}\xi\cos\theta}{(\operatorname{ch}\xi - \cos\theta)^2} \tag{3.3}$$

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n|\xi|}\sin n\theta = \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\operatorname{ch}\xi - \cos\theta}$$

$$\psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n|\xi|e^{-n|\xi|}\sin n\theta = \frac{1}{2}\xi\frac{\operatorname{sh}\xi\sin\theta}{(\operatorname{ch}\xi - \cos\theta)^2}$$

Отметим, что формулы типа (1.10) при подстановке в них вместо ε_{ij}, ω_j, $\varkappa_{ij}$ функций (3.2) дают замкнутое решение для бесконечной пластины, нагруженной усилиями q_j по бесконечному числу отрезков, расположенных с шагом $2\pi R$ в направлении оси $y = R\theta$. Такая пластина получится, если цилиндрическую оболочку представить как бесконечно листную поверхность (рулон), каждая ветвь которой нагружена так же, как рассматриваемая оболочка, и затем такую поверхность с нагрузкой развернуть на плоскость. Если пластина не изгибается ($q_3 = 0$), то в окрестности бесконечно удаленной точки имеем следующие значения усилий: $T_1 = \sigma_x h$ и $T_2 = \sigma_y h$ и усилия сдвига

$$T_1 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi R}\int_l q_1 R\, dl\right]\operatorname{sign}\xi, \quad T_2 = -\nu T_1, \quad S = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi R}\int_l q_2 R\, dl \tag{3.4}$$

При изгибе полученные результаты можно рассматривать как частный интеграл для бесконечной полосы с кромками, параллельными оси y.

Главные значения функций Грина (3.2) позволяют получить асимптотические формулы для неограниченно возрастающих к окрестности концов отрезков нагружения деформаций и напряжений. Ниже приведены асимптотические формулы для случая, когда нагружение производится на отрезке образующей или дуги окружности. Рассмотрено отдельно два случая:

а) когда произвольно распределенные усилия q_1 и q_2 ограничены на отрезке $a \leqslant \xi \leqslant b$ образующей. В этом случае асимптотические формулы имеют вид

$$T_1 \approx \mp\frac{3+\nu}{4\pi}q_1(c)\ln\rho_c, \quad T_2 \approx \pm\frac{1-\nu}{4\pi}q_1(c)\ln\rho_c, \quad S \approx \mp\frac{1-\nu}{4\pi}q_2(c)\ln\rho_c \tag{3.5}$$

где T_1, T_2, S — соответственно продольные и окружные растягивающие усилия и усилия сдвига срединной поверхности; ρ_c — расстояние от точки c, совпадающей либо с a, либо с b, до точки, в которой разыскиваются усилия. Верхний знак берется для окрестности точки a, нижний — для b. Усилия T_1 и T_2 от нагрузки q_2, а также усилие S от нагрузки q_1 будут ограничены. Если функции q_1 и q_2 обращаются в нуль на концах отрезка, то все усилия будут ограничены;

b) усилия q_1 и q_2 в окрестности концов a и b соответственно имеют вид

$$q_j = q_j^\circ / \sqrt{\xi - a}, \quad q_j = q_j^\circ / \sqrt{b - \xi} \quad (j = 1, 2) \qquad (q_j^\circ = \mathrm{const})$$

Такой характер особенностей получим, например, для касательных усилий q_1, передающихся оболочке от стрингеров, нагруженных на концах подобными силами. В этом случае

$$\begin{aligned}
T_1 &\approx \pm \frac{q_1^\circ}{4\sqrt{\rho_c}}\left[3 + \nu + (1+\nu)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\right]\sin\frac{\alpha}{2} \\
T_2 &\approx \mp \frac{q_1^\circ}{4\sqrt{\rho_c}}\left[1 - \nu + (1+\nu)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\right]\sin\frac{\alpha}{2} \\
S_1 &\approx \mp \frac{q_1^\circ}{2\sqrt{\rho_c}}\left(1 - \frac{1+\nu}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} \\
T_1 &\approx \frac{q_2^\circ}{4\sqrt{\rho_c}}\left(-\nu + \frac{1+\nu}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} \\
T_2 &\approx -\frac{q_2^\circ}{4\sqrt{\rho_c}}\left(1 + \frac{1+\nu}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} \\
S_1 &\approx \pm \frac{q}{4\sqrt{\rho_c}}\left[1 - \nu - (1+\nu)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\right]\sin\frac{\alpha}{2}
\end{aligned} \qquad (3.6)$$

где α — угол между отрезком (a, b) и вектором, соединяющим точку a или b с точкой z, где определяется соответствующая величина. Этот угол отсчитывается от отрезка (a, b) против часовой стрелки, если z принадлежит окрестности точки a, и по часовой стрелке, если z принадлежит окрестности точки b. В формулах с двойным знаком верхний знак по-прежнему берется для точки a.

Формулы (3.5) и (3.6) остаются в силе и для усилий, действующих по отрезку дуги, если T_1, T_2, S, q_1, q_2 соответственно заменить на T_2, T_1, $-S$, q_2, $-q_1$.

Поведение моментов в окрестности точек a и b оболочки меняется при замене одного варианта теории другим. При использовании разных вариантов «строгой» теории характер особенностей будет такой же, как для усилий, однако асимптотические формулы для разных вариантов будут различными. Если исходить из теории пологих оболочек, то моменты от усилий q_1 и q_2 будут ограничены. При действии радиальных усилий q_3, мембранные напряжения будут ограничены, моменты нет.

Отметим, что асимптотические формулы (3.5) и (3.6) индентичны соответствующим формулам для пластины. В частном случае, когда усилия q_1 и q_2 постоянны, формулы (3.5) совпадают с формулами работы [6].

4. При исследовании напряженного состояния цилиндрических оболочек, подкрепленных стрингерами или шпангоутами, воспринимающими внешние усилия, возникает задача определения усилий в такого рода элементах жесткости и усилий, передающихся от элементов жесткости к оболочке. В этом случае нагрузки q_j, входящие в формулы типа (1.10), являются искомыми. Из условий сопряжения стрингеров и шпангоутов с оболочкой для нахождения усилий q_j можно получить интегральные уравнения. Эти уравнения зачастую являются сингулярными, вследствие сингулярности функций Грина ε_{ij}, которые в этом случае определены на линиях действия нагрузки — образующей или дуге окружности. В подобного рода задачах выделение главного значения функций Грина особенно важно, так как это дает возможность использовать хорошо развитую теорию сингулярных интегральных уравнений. Такой прием использован авторами при рассмотрении передачи нагрузки от стрингеров к обо-

лочке. Упростим вид главных значений функций Грина (1.10) с тем расчетом, чтобы их можно было удобно использовать в задачах сопряжения.

Можно показать, что в окрестности точки $\xi = 0$ справедливо асимптотическое равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\,|\xi|)^m l^{-n|\xi|} \approx m! \sum_{n=1}^{\infty} l^{-n|\xi|} = \frac{m!}{2}\left(\operatorname{cth}\frac{|\xi|}{2} - 1\right)$$

Учитывая это равенство, на образующей $\theta = 0$ вместо асимптотических формул (3.2) можно взять следующие:

$$\varepsilon_{11}{}^\circ(\xi) = -\frac{\pi(3-\nu)}{16}\operatorname{cth}\frac{\xi}{2}, \qquad \varepsilon_{21}{}^\circ = \frac{\pi(1+\nu)}{16}\operatorname{cth}\frac{\xi}{2}$$
$$\omega_2{}^\circ(\xi) = -\frac{\pi(1-\nu)}{8}\operatorname{cth}\frac{\xi}{2}, \qquad \varkappa_{13}{}^\circ(\xi) = \varkappa_{23}{}^\circ(\xi) = -\frac{\pi(1-\nu)}{8a^2}\ln\left(2\operatorname{sh}\frac{|\xi|}{2}\right) \tag{3.7}$$

Функции $\varepsilon_{12}{}^\circ(\xi)$, $\omega_1{}^\circ(\xi)$, $\varepsilon_{22}{}^\circ(\xi)$ при $\theta = 0$ равны нулю.

На дугах окружности $\xi = 0$ из (3.2) находим

$$\varepsilon_{12}{}^\circ(\theta) = \frac{\pi(1+\nu)}{16}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}, \qquad \varepsilon_{22}{}^\circ = -\frac{\pi(3-\nu)}{16}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$$
$$\omega_1{}^\circ(\theta) = -\frac{\pi(1-\nu)}{8}\operatorname{cth}\frac{\theta}{2}, \qquad \varkappa_{13}{}^\circ(\theta) = \varkappa_{23}{}^\circ(\theta) = -\frac{\pi(1-\nu)}{8a^2}\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{3.8}$$

Функции $\varepsilon_{11}{}^\circ$, $\varepsilon_{21}{}^\circ$, $\omega_2{}^\circ$ равны нулю при $\xi = 0$.

Интегральные уравнения, ядра которых имеют вид (3.7), могут решаться как непосредственно, так и сведением к уравнениям с ядром Коши. Теория уравнений с ядрами (3.8) также хорошо разработана — это уравнения с ядрами Гильберта.

Поступила 23 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Odquist F. K. G. Action of forces and moments symmetricaly distributed along a generatrix of thin cylindrical shell. J. Appl. Mech., 1946, vol. 13, No. 2, pp.106—108.
2. Shoessow G. L., Kooistra L. F. Stresses in cylindrical shell due to nozzle and pipe connections. Trans. A. S. M. E., 1945, vol. 67. p. A —107.
3. Hoff H. J., Kempner J., Pohle F. V. Line load applied along generators of thinwalled circular cylindrical shells of finite length. Quart. Appl. Math., 1954, vol. 11, No. 4, pp. 411—425. Русск. перев.: в сб. «Вопросы прочности цилиндрических оболочек». М., Оборонгиз, 1960, стр. 411—425.
4. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953, стр. 205—210.
5. Juan S. W. Thin cylindrical shells subjected to concentrated loads. Quart. Appl. Math., 1946, vol. 4, No. 1, pp. 13—26.
6. Даревский В. М. К теории цилиндрических оболочек. ПММ, 1951, т. 15, вып. 5, стр. 531—562.