О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОГО УПРУГОГО СЛОЯ

М. И. Гусейн-Заде

(Москва)

На основе асимптотического метода в [1,2] дано построение двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок, причем за исходные уравнения взяты уравнения теории упругости в напряжениях и соотношения закона Гука. При исследовании внутреннего напряженного состояния[1] в [1,2] принято предположение, что смещения и напряжения имеют определенные порядки, что подтвердилось в случае изгиба и симметричной деформации однородной пластинки. Но в рамки этого предположения не умещается напряженное состояние в относительно слабом упругом слое, зажатом более жесткими слоями. Необходимость исследования таких напряженных состояний возникает при рассмотрении слабых слоев в многослойных пластинках.

В настоящей работе исследование внутреннего напряженного состояния тонкого слоя проводится методом асимптотического интегрирования уравнений Ламе, причем не делается никаких предположений о порядке поверхностной нагрузки, а считается только, что смещения в плоскости слоя на порядок меньше смещений из его плоскости. Это позволяет для внутреннего напряженного состояния получить асимптотическое решение уравнений теории упругости более общего, чем в [1,2], вида, пригодного для описания как поведения однородной пластинки под действием произвольной поверхностной нагрузки, так и поведения слоя, зажатого более жесткими слоями (слабые слои в многослойных пластинках).

Заметим, что полное исследование внутреннего напряженного состояния тонкой пластинки предусматривает как построение дифференциальных уравнений, так и формулировку соответствующих граничных условий [3]. Последнее связано с изучением напряженных состояний погранслоя; в настоящей работе они не рассматриваются. Поэтому проведенные исследования касаются лишь вопроса получения дифференциальных уравнений внутреннего напряженного состояния.

1. Предположим, что координатная плоскость α, β ортогональной системы криволинейных координат параллельна срединной плоскости пластинки. Уравнения Ламе возьмем в виде, явно указывающем, что его коэффициенты не зависят от модуля упругости E и выражаются только через коэффициент Пуассона ν.

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_\beta u_\alpha)+\frac{\partial}{\partial\beta}(H_\alpha u_\beta)\right]+\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}\right\}-$$
$$-\frac{1}{2H_\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_\beta u_\beta)-\frac{\partial}{\partial\beta}(H_\alpha u_\alpha)\right]\right\}+ \qquad (1.1)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial\gamma^2}-\frac{1}{2H_\alpha}\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial\alpha\,\partial\gamma}=0 \qquad (\alpha\beta)$$

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_\beta u_\alpha)+\frac{\partial}{\partial\beta}(H_\alpha u_\beta)\right]+\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}\right\}-$$
$$-\frac{1}{2H_\alpha H_\beta}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[H_\beta\frac{\partial u_\alpha}{\partial\gamma}-\frac{H_\beta}{H_\alpha}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\alpha}\right]+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[H_\alpha\frac{\partial u_\beta}{\partial\gamma}-\frac{H_\alpha}{H_\beta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\beta}\right]\right\}=0$$

Здесь u_α, u_β, u_γ — компоненты вектора смещений, H_α, H_β — параметры Ламе[2]. Символ $(\alpha\beta)$ означает, что имеется другое соотношение, получаемое из приведенного заменой α на β и наоборот.

---

[1] В [1,2] это напряженное состояние названо основным.

[2] В цитированной выше работе [2] через H_α, H_β обозначены величины, обратные параметрам Ламе.

Введем безразмерные величины

$$v_\alpha=\frac{u_\alpha}{h},\quad v_\beta=\frac{u_\beta}{h},\quad v_\gamma=\frac{u_\gamma}{h},\quad \xi=\frac{\alpha}{l},\quad \eta=\frac{\beta}{l},\quad \zeta=\frac{\gamma}{h} \tag{1.2}$$

Здесь $2h$ — толщина слоя, l — характерный размер рисунка деформации. Предполагаем, что относительная толщина слоя $\varepsilon=h/l$ мала.

Решение системы уравнений, получаемой из (1.1) в результате перехода к безразмерным переменным (1.2), ищем в виде

$$v_\alpha=\varepsilon^{\varkappa+1}\sum_{s=0}\varepsilon^s v_\alpha^{(s)}\quad(\alpha\beta),\qquad v_\gamma=\varepsilon^{\varkappa}\sum_{s=0}\varepsilon^s v_\gamma^{(s)} \tag{1.3}$$

Если (1.3) подставить в уравнения Ламе, преобразованные к безразмерному виду, и приравнять нулю члены с одинаковыми степенями ε, то для определения $v_\alpha^{(s)}$, $v_\beta^{(s)}$, $v_\gamma^{(s)}$ получим уравнения

$$\frac{1}{2(1-2\nu)}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial^2 v_\gamma^{(s)}}{\partial\xi\,\partial\zeta}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_\alpha^{(s)}}{\partial\zeta^2}=$$
$$=-\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_\alpha^{(s-2)})+\frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_\beta^{(s-2)})\right]\right\}+$$
$$+\frac{1}{2H_\beta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_\beta^{(s-2)})-\frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_\alpha^{(s-2)})\right]\right\}\qquad(\alpha\beta)$$

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial^2 v_\gamma^{(s)}}{\partial\zeta^2}=-\frac{1}{2(1-2\nu)}\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}(H_\beta v_\alpha^{(s-2)})+\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\zeta}(H_\alpha v_\beta^{(s-2)})\right]-$$
$$-\frac{1}{2H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{H_\beta}{H_\alpha}\frac{\partial v_\gamma^{(s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{H_\alpha}{H_\beta}\frac{\partial v_\gamma^{(s-2)}}{\partial\eta}\right] \tag{1.4}$$

Правые части этих уравнений выражаются через величины $(s-2)$-го приближения, которые следует считать известными при определении s-го приближения. Уравнения (1.4) можно проинтегрировать по ζ, что приводит к решению вида

$$v_\alpha^{(s)}=\sum_{k=0}^{r+1}\zeta^k v_{\alpha k}^{(s)}\quad(\alpha\beta),\qquad v_\gamma^{(s)}=\sum_{k=0}^{r}\zeta^k v_{\gamma k}^{(s)} \tag{1.5}$$

где

$$r=\begin{cases}s\,, & \text{если } s \text{ — четное число}\\ s-1, & \text{если } s \text{ — нечетное число}\end{cases} \tag{1.6}$$

Величины $v_{\alpha k}^{(s)}$, $v_{\beta k}^{(s)}$, $v_{\gamma k}^{(s)}$ являются функциями только ξ, η: нижний индекс k у этих величин указывает на степень ζ, при которой в (1.5) стоит множителем данная величина. Коэффициенты при ζ^k в (1.5) связаны дифференциальными зависимостями, которые можно получить, если (1.5) подставить в (1.4) и приравнять члены с одинаковыми степенями ζ. Эти зависимости имеют вид

при $k\geqslant 1$

$$v_{\alpha,\,k+2}^{(s)}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left\{-\frac{3-2\nu}{2(1-\nu)}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha k}^{(s-2)})+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta k}^{(s-2)})\right]\right\}+\frac{1}{H_\beta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\beta k}^{(s-2)})-\frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\alpha k}^{(s-2)})\right]\right\}+$$
$$\left.+\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{1}{k}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla v_{\gamma,\,k-1}^{(s-2)}\right\}\quad(\alpha\beta) \tag{1.7}$$

при $k \geqslant 0$

$$v_{\gamma, k+2}^{(s)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left\{ -\frac{1}{2(1-\nu)}(k+1)\frac{1}{H_\alpha H_\beta} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{\partial}{\partial \xi}(H_\beta v_{\alpha, k+1}^{(s-2)}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_\alpha v_{\beta, k+1}^{(s-2)}) \right] - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \nabla v_{\gamma k}^{(s-2)} \right\}$$

Кроме того, получим

$$v_{\alpha 2}^{(s)} = \frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{ \frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(H_\beta v_{\alpha 0}^{(s-2)}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_\alpha v_{\beta 0}^{(s-2)}) \right] \right\} + \tag{1.8}$$

$$+ \frac{1}{2H_\beta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{ \frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(H_\beta v_{\beta 0}^{(s-2)}) - \frac{\partial}{\partial \eta}(H_\alpha v_{\alpha 0}^{(s-2)}) \right] \right\} - \frac{1}{2(1-2\nu)}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial v_{\gamma 1}^{(s)}}{\partial \xi}$$

Соотношения (1.7) имеют рекуррентный характер; они позволяют определять $v_{\alpha k}^{(s)}$, $v_{\beta k}^{(s)}$ (при $k \geqslant 3$), $v_{\gamma k}^{(s)}$ (при $k \geqslant 2$) через величины (s — 2)-го приближения.

2. Определим напряжения, соответствующие смещениям (1.3). Если в соотношения закона Гука подставить выражения компонент деформации и перейти к безразмерным величинам (1.2), то получим

$$\frac{1}{E}\sigma_{\alpha\alpha} = \varepsilon \left\{ \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(H_\beta v_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_\alpha v_\beta) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1+\nu}\left(\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \xi} + \frac{1}{H_\alpha H_\beta}\frac{\partial H_\alpha}{\partial \eta} v_\beta \right) \right\} + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial v_\gamma}{\partial \zeta} \quad (\alpha\beta) \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{E}\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon \frac{1}{2(1+\nu)}\left[\frac{H_\beta}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{v_\beta}{H_\beta} \right) + \frac{H_\alpha}{H_\beta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{v_\alpha}{H_\alpha} \right) \right]$$

$$\frac{1}{E}\sigma_{\alpha\gamma} = \varepsilon \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial v_\gamma}{\partial \xi} + \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \zeta} \quad (\alpha\beta)$$

$$\frac{1}{E}\sigma_{\gamma\gamma} = \varepsilon \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(H_\beta v_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_\alpha v_\beta) \right] + \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial v_\gamma}{\partial \zeta}$$

Подставляя в эти соотношения разложения (1.3) и собирая члены с одинаковыми степенями ε, имеем

$$\frac{1}{E}\sigma_{\alpha\alpha} = \varepsilon^{\varkappa+2}\sum_{s=0} \varepsilon^s \sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} \quad (\alpha\beta), \qquad \frac{1}{E}\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\varkappa+2}\sum_{s=0} \varepsilon^s \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{E}\sigma_{\alpha\gamma} = \varepsilon^{\varkappa+1}\sum_{s=0} \varepsilon^s \sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} \quad (\alpha\beta), \qquad \frac{1}{E}\sigma_{\gamma\gamma} = \varepsilon^{\varkappa+2}\sum_{s=0} \varepsilon^s \sigma_{\gamma\gamma}^{(s)} \tag{2.3}$$

где

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(H_\beta v_\alpha^{(s)}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_\alpha v_\beta^{(s)}) \right] +$$

$$+ \frac{1}{1+\nu}\left[\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{1}{H_\alpha H_\beta}\frac{\partial H_\alpha}{\partial \eta} v_\beta^{(s)} \right] + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial v_\gamma^{(s+2)}}{\partial \zeta} \quad (\alpha\beta) \tag{2.4}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(s)} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left[\frac{H_\beta}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{v_\beta^{(s)}}{H_\beta} \right) + \frac{H_\alpha}{H_\beta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{v_\alpha^{(s)}}{H_\alpha} \right) \right]$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial v_\gamma^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial \zeta} \right) \quad (\alpha\beta)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(H_\beta v_\alpha^{(s)}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_\alpha v_\beta^{(s)}) \right] +$$

$$+ \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial v_\gamma^{(s+2)}}{\partial \zeta}$$

В полученные соотношения подставим (1.5) и объединим члены с одинаковыми степенями ζ. В результате получим

$$\sigma_{\alpha\alpha}{}^{(s)} = \sum_{k=0}^{r+1} \zeta^k \sigma_{\alpha\alpha k}^{(s)} \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\alpha\beta}{}^{(s)} = \sum_{k=0}^{r+1} \zeta^k \sigma_{\alpha\beta k}^{(s)} \tag{2.5}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}{}^{(s)} = \sum_{k=0}^{r} \zeta^k \sigma_{\alpha\gamma k}^{(s)} \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\gamma\gamma}{}^{(s)} = \sum_{k=0}^{r+1} \zeta^k \sigma_{\gamma\gamma k}^{(s)} \tag{2.6}$$

Здесь r определяется в соответствии с (1.6). Для величин с нижним индексом k в (2.5) и (2.6) имеем

$$\sigma_{\alpha\alpha k}^{(s)} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha k}^{(s)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta k}^{(s)})\right] + (k+1)\, v_{\gamma,\, k+1}^{(s+2)}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{1+\nu}\left[\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial v_{\alpha k}{}^{(s)}}{\partial\xi} - \frac{1}{H_\alpha H_\beta}\frac{\partial H_\alpha}{\partial\eta} v_{\beta k}{}^{(s)}\right] \quad (\alpha\beta)$$

$$\sigma_{\alpha\beta k}^{(s)} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left[\frac{H_\beta}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{v_{\beta k}{}^{(s)}}{H_\beta} + \frac{H_\alpha}{H_\beta}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{v_{\alpha k}{}^{(s)}}{H_\alpha}\right] \tag{2.7}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma k}^{(s)} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left[\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial v_{\gamma k}{}^{(s)}}{\partial\xi} + (k+1) v_{\alpha,\, k+1}^{(s)}\right] \quad (\alpha\beta)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma k}^{(s)} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha k}{}^{(s)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta k}{}^{(s)})\right] +$$

$$+ \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(k+1)\, v_{\gamma,\, k+1}^{(s+2)}$$

Между величинами $\sigma_{\alpha\alpha k}^{(s)}$, $\sigma_{\beta\beta k}^{(s)}$, $\sigma_{\alpha\beta k}^{(s)}$, $\sigma_{\gamma\gamma k}^{(s)}$, $\sigma_{\alpha\gamma k}^{(s)}$, $\sigma_{\beta\gamma k}^{(s)}$, являющимися функциями ξ, η, имеются следующие зависимости:

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta \sigma_{\alpha\alpha k}^{(s)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha \sigma_{\alpha\beta k}^{(s)}) - \frac{\partial H_\beta}{\partial\xi}\sigma_{\beta\beta k}^{(s)} + \frac{\partial H_\alpha}{\partial\eta}\sigma_{\alpha\beta k}^{(s)}\right] +$$

$$+ (k+1)\,\sigma_{\alpha\gamma,\, k+1}^{(s+2)} = 0 \quad (\alpha\beta) \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta \sigma_{\alpha\gamma k}^{(s)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha \sigma_{\beta\gamma k}^{(s)})\right] + (k+1)\,\sigma_{\gamma\gamma,\, k+1}^{(s)} = 0 \tag{2.9}$$

Эти зависимости легко получить, если воспользоваться уравнениями равновесия в напряжениях

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_\beta\sigma_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(H_\alpha\sigma_{\alpha\beta}) - \frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha}\sigma_{\beta\beta} + \frac{\partial H_\alpha}{\partial\beta}\sigma_{\alpha\beta}\right] + \frac{\partial\sigma_{\alpha\gamma}}{\partial\gamma} = 0 \quad (\alpha\beta) \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_\beta\sigma_{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(H_\alpha\sigma_{\beta\gamma})\right] + \frac{\partial\sigma_{\gamma\gamma}}{\partial\gamma} = 0$$

Если в этих уравнениях перейти к безразмерным переменным ξ, η, ζ и учесть (2.2), (2.5) и (2.6), то получим соотношения (2.8) и (2.9). Заметим, что если все величины, входящие в (2.8) и (2.9), заменить их выражениями (2.7), то нетрудно убедиться, что эти соотношения выполняются тождественно.

3. Рассмотрим однородную пластинку под действием произвольной поверхностной нагрузки. Граничные условия на верхней ($\zeta = \zeta_+$) и нижней ($\zeta = \zeta_\pm$) плоскостях имеют вид

$$\sigma_{\alpha\gamma} = \tau_\alpha{}^\pm(\alpha, \beta) \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\gamma\gamma} = \tau_\gamma{}^\pm(\alpha, \beta) \quad \text{при } \zeta = \zeta_\pm \tag{3.1}$$

Условия (3.1) должны выполняться для первых отличных от нуля членов разложений (2.3), номер которых обозначим через s_0, т. е. при $\zeta = \zeta_\pm$ имеем условия

$$E\varepsilon^{\varkappa+1+s_0}\sigma_{\alpha\gamma}^{(s_0)} = \tau_\alpha^{\pm} \quad (\alpha\beta), \qquad E\varepsilon^{\varkappa+2+s_0}\sigma_{\gamma\gamma}^{(s_0)} = \tau_\gamma^{\pm} \tag{3.2}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} = 0 \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\gamma\gamma}^{(s)} = 0 \quad \text{при } s > s_0 \tag{3.3}$$

Покажем, что $s_0 = 2$, т. е. в разложениях (2.3) по два первых члена обращаются в нуль.

Предположим сначала, что $s_0 = 0$, и выясним возможность выполнения условий (3.2). Из (1.3), (1.5), (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) следует, что при $s_0 = 0$ в нулевом приближении

$$v_\alpha^{(0)} = v_{\alpha 0}^{(0)} + \zeta v_{\alpha 1}^{(0)} \quad (\alpha\beta), \qquad v_\gamma^{(0)} = v_{\gamma 0}^{(0)} \tag{3.4}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} = \sigma_{\alpha\alpha 0}^{(0)} + \zeta\sigma_{\alpha\alpha 1}^{(0)} \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} = \sigma_{\alpha\beta 0}^{(0)} + \zeta\sigma_{\alpha\beta 1}^{(0)}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(0)} = \sigma_{\alpha\gamma 0}^{(0)} \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\gamma\gamma}^{(0)} = \sigma_{\gamma\gamma 0}^{(0)} + \zeta\sigma_{\gamma\gamma 1}^{(0)} \tag{3.5}$$

В (3.4) и (3.5) входят шесть произвольных функций: $v_{\alpha 0}^{(0)}$, $v_{\beta 0}^{(0)}$, $v_{\gamma 0}^{(0)}$, $\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(0)}$, $\sigma_{\beta\gamma 0}^{(0)}$, $\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(0)}$. Величины $\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(0)}$, $\sigma_{\beta\gamma 0}^{(0)}$, $\sigma_{\gamma\gamma 1}^{(0)}$ связаны соотношением (2.9) при $k = 0$.

Поэтому граничные условия (3.2) можно выполнить только в случае, если на поверхностную нагрузку наложены условия

$$\tau_\alpha^+ = \tau_\alpha^- \quad (\alpha\beta) \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta\tau_\alpha^+) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha\tau_\beta^+)\right] = -\frac{1}{2\varepsilon}(\tau_\gamma^+ - \tau_\gamma^-)$$

Но по предположению нагрузка, действующая на пластинку, произвольная. Исключая из рассмотрения частный случай поверхностной нагрузки, подчиняющейся условиям (3.6), приходим к выводу, что при $s_0 = 0$ нельзя выполнить условия (3.2). Кроме того, остаются неопределенными $v_{\alpha 0}^{(0)}$, $v_{\beta 0}^{(0)}$, $v_{\gamma 0}^{(0)}$. На основании этого делаем заключение, что $s_0 \neq 0$, т. е. в разложениях (2.3) первые члены должны обращаться в нуль.

Предположим теперь, что $s_0 = 1$. Тогда к нулевому приближению относятся величины: $v_\alpha^{(0)}$, $v_\beta^{(0)}$, $v_\gamma^{(0)}$, $\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}$, $\sigma_{\beta\beta}^{(0)}$, $\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}$, $\sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}$, $\sigma_{\beta\gamma}^{(1)}$, $\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}$. Для первых шести из этих величин по-прежнему имеют место выражения (3.4), а для трех последних имеем

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(1)} = \sigma_{\alpha\gamma 0}^{(1)} \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\gamma\gamma}^{(1)} = \sigma_{\gamma\gamma 0}^{(1)} + \zeta\sigma_{\gamma\gamma 1}^{(1)} \tag{3.7}$$

В (3.4) и (3.7) содержится шесть произвольных функций: $v_{\alpha 0}^{(0)}$ $v_{\beta 0}^{(0)}$, $v_{\gamma 0}^{(0)}$, $\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(1)}$, $\sigma_{\beta\gamma 0}^{(1)}$, $\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(1)}$. Величина же $\sigma_{\gamma\gamma 1}^{(1)}$ связана с $\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(1)}$, $\sigma_{\beta\gamma 0}^{(1)}$ соотношением (2.9) при $k = 0$. Поэтому граничные условия (3.2) можно выполнить опять только в случае, если поверхностная нагрузка подчиняется условиям (3.6). При $s_0 = 1$ остаются также неопределенными $v_{\alpha 0}^{(0)}$, $v_{\beta 0}^{(0)}$, $v_{\gamma 0}^{(0)}$. На основании всего сказанного ясно, что $s_0 \neq 1$, т. е. в разложениях (2.3) и вторые члены обращаются в нуль.

Покажем теперь, что, положив $s_0 = 2$, можно выполнить произвольные условия при $\zeta = \zeta_\pm$. К нулевому приближению при $s_0 = 2$ относятся величины: $v_\alpha^{(0)}$, $v_\beta^{(0)}$, $v_\gamma^{(0)}$, $\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}$, $\sigma_{\beta\beta}^{(0)}$, $\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}$, $\sigma_{\alpha\gamma}^{(2)}$, $\sigma_{\beta\gamma}^{(2)}$, $\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}$. Для первых шести величин по-прежнему имеем выражения (3.4), а для трех последних имеем

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(2)} = \sigma_{\alpha\gamma 0}^{(2)} + \zeta\sigma_{\alpha\gamma 1}^{(2)} + \zeta^2\sigma_{\alpha\gamma 2}^{(2)} \quad (\alpha\beta)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} = \sigma_{\gamma\gamma 0}^{(2)} + \zeta\sigma_{\gamma\gamma 1}^{(2)} + \zeta^2\sigma_{\gamma\gamma 2}^{(2)} + \zeta^3\sigma_{\gamma\gamma 3}^{(2)} \tag{3.8}$$

В (3.4) и (3.8) входят шесть произвольных функций: $v_{\alpha 0}^{(0)}$, $v_{\beta 0}^{(0)}$, $v_{\gamma 0}^{(0)}$, $\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(2)}$, $\sigma_{\beta\gamma 0}^{(2)}$, $\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(2)}$. Подставляя (3.8) в (3.2), получим шесть уравнений относительно шести произвольных функций. Из этих уравнений можно исключить $\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(2)}$, $\sigma_{\beta\gamma 0}^{(2)}$, $\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(2)}$ и получить три дифференциальных уравнения относительно $v_{\alpha 0}^{(0)}$, $v_{\beta 0}^{(0)}$, $v_{\gamma 0}^{(0)}$. Более подробно на этом остановимся в следующем параграфе, а здесь отметим, что если за $v_{\alpha 0}^{(0)}$, $v_{\beta 0}^{(0)}$, $v_{\gamma 0}^{(0)}$ брать решения упомянутых дифференциальных уравнений, то при $s_0 = 2$ можно выполнить условия (3.2). Следовательно, $s_0 = 2$; это означает, что разложения (2.3) начинаются с членов $\varepsilon^{\varkappa+3}\sigma_{\alpha\gamma}^{(2)}$, $\varepsilon^{\varkappa+3}\sigma_{\beta\gamma}^{(2)}$, $\varepsilon^{\varkappa+4}\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}$ соответственно, а предыдущие члены разложения обращаются в нуль, т. е.

$$\sigma_{\alpha\gamma}{}^{(0)} = \sigma_{\alpha\gamma}{}^{(1)} = 0 \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\gamma\gamma}{}^{(0)} = \sigma_{\gamma\gamma}{}^{(1)} = 0 \tag{3.9}$$

Если принять во внимание (2.7) и учесть соотношение (2.9) при $k = 0$, то из (3.9) следует, что при $s = 0, 1$

$$\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial v_{\gamma 0}{}^{(s)}}{\partial \xi} + v_{\alpha 1}{}^{(s)} = 0 \quad (\alpha\beta) \tag{3.10}$$

$$v_{\gamma 1}{}^{(s+2)} = -\frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha 0}{}^{(s)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta 0}{}^{(s)})\right] \tag{3.11}$$

Соотношения (3.10) эквивалентны выполнению гипотезы Кирхгоффа — Лява в нулевом и первом приближениях.

4. Остановимся на получении дифференциальных уравнений для $v_{\alpha 0}{}^{(0)}$, $v_{\beta 0}{}^{(0)}$, $v_{\gamma 0}{}^{(0)}$. Внесем выражения (2.6) для $\sigma_{\alpha\gamma}{}^{(2)}$, $\sigma_{\beta\gamma}{}^{(2)}$, $\sigma_{\gamma\gamma}{}^{(2)}$ в условия (3.2), после чего исключим из них $\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(2)}$, $\sigma_{\beta\gamma 0}^{(2)}$, $\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(2)}$. В результате получим три соотношения

$$-(\zeta_+{}^2 - \zeta_-{}^2)\sigma_{\gamma\gamma 2}^{(2)} - 2(\zeta_+{}^3 - \zeta_-{}^3)\sigma_{\gamma\gamma 3}^{(2)} =$$
$$= \frac{1}{E\varepsilon^{\varkappa+4}}\left\{(\tau_\gamma{}^+ - \tau_\gamma{}^-) + \varepsilon\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\left(\frac{\partial(H_\beta\tau_\alpha{}^+)}{\partial\xi} + \frac{\partial(H_\alpha\tau_\beta{}^+)}{\partial\eta}\right)\zeta_+ - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\frac{\partial(H_\beta\tau_\alpha{}^-)}{\partial\xi} + \frac{\partial(H_\alpha\tau_\beta{}^-)}{\partial\eta}\right)\zeta_-\right]\right\} \tag{4.1}$$

$$2\sigma_{\alpha\gamma 1}^{(2)} + (\zeta_+{}^2 - \zeta_-{}^2)\sigma_{\alpha\gamma 2}^{(2)} = \frac{1}{E\varepsilon^{\varkappa+3}}(\tau_\alpha{}^+ - \tau_\alpha{}^-) \quad (\alpha\beta) \tag{4.2}$$

Из (1.7), (1.8), (2.7), (3.10), (3.11) следует, что

$$\sigma_{\gamma\gamma 2}^{(2)} = \frac{1}{2(1-\nu^2)}\nabla\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha 0}{}^{(0)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta 0}{}^{(0)})\right]\right\}$$
$$\sigma_{\gamma\gamma 3}^{(2)} = -\frac{1}{6(1-\nu^2)}\nabla\nabla v_{\gamma 0}{}^{(0)} \tag{4.3}$$
$$\sigma_{\alpha\gamma 1}^{(2)} = -L(v_{\alpha 0}{}^{(0)}, v_{\beta 0}{}^{(0)}) \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\alpha\gamma 2}^{(2)} = \frac{1}{2(1-\nu^2)}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla v_{\gamma 0}{}^{(0)}$$

где оператор $L(v_{\alpha 0}{}^{(0)}, v_{\beta 0}{}^{(0)})$ имеет вид

$$L(v_{\alpha 0}{}^{(0)}, v_{\beta 0}{}^{(0)}) = \frac{1}{1-\nu^2}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha 0}{}^{(0)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta 0}{}^{(0)})\right]\right\} -$$
$$- \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{1}{H_\beta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\beta 0}{}^{(0)}) - \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\alpha 0}{}^{(0)})\right]\right\} \quad (\alpha\beta) \tag{4.4}$$

Подставляя (4.3) в (4.1) и (4.2), получим три дифференциальных уравнения относительно $v_{\alpha 0}^{(0)}$, $v_{\beta 0}^{(0)}$, $v_{\gamma 0}^{(0)}$. При произвольном расположении координатной плоскости в каждое из уравнений (4.1) и (4.2) входят все неизвестные величины. Если же координатная плоскость $\alpha\beta$ совпадает со срединной плоскостью пластинки, то задачи изгиба и обобщенного плоского напряженного состояния разделяются. Это связано с тем, что в этом случае величина $\zeta_+^2 - \xi_-^2$ обращается в нуль, в результате чего в уравнении (4.1) остается лишь одна неизвестная $v_{\gamma 0}^{(0)}$, а в уравнениях (4.2) — лишь неизвестные $v_{\alpha 0}^{(0)}$, $v_{\beta 0}^{(0)}$.

В дальнейшем при рассмотрении однородной пластинки всегда будем предполагать, что координатная плоскость $\alpha\beta$ совпадает с ее срединной плоскостью. Уравнения изгиба в нулевом приближении имеют вид

$$\nabla\nabla v_{\gamma 0}^{(0)} = \frac{3}{2}(1-\nu^2)\frac{1}{E\varepsilon^{\varkappa+4}}\left\{(\tau_\gamma^+ - \tau_\gamma^-) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\left(\frac{\partial(H_\beta\tau_\alpha^+)}{\partial\xi} + \frac{\partial(H_\alpha\tau_\beta^+)}{\partial\eta}\right) + \left(\frac{\partial(H_\beta\tau_\alpha^-)}{\partial\xi} + \frac{\partial(H_\alpha\tau_\beta^-)}{\partial\eta}\right)\right]\right\} \tag{4.5}$$

а уравнения обобщенного плоского напряженного состояния имеют вид

$$L(v_{\alpha 0}^{(0)}, v_{\beta 0}^{(0)}) = -\frac{1}{E\varepsilon^{\varkappa+3}}\frac{1}{2}(\tau_\alpha^+ - \tau_\alpha^-) \qquad (\alpha\beta) \tag{4.6}$$

Для первого приближения имеем однородные граничные условия при $\zeta = \pm 1$. Поэтому уравнения изгиба и обобщенного напряженного состояния тоже однородны, т. е.

$$\nabla\nabla v_{\gamma 0}^{(1)} = 0 \tag{4.7}$$

$$L(v_{\alpha 0}^{(1)}, v_{\beta 0}^{(1)}) = 0 \qquad (\alpha\beta) \tag{4.8}$$

Для получения дифференциальных уравнений изгиба и обобщенного плоского напряженного состояния в s-м приближении нужно воспользоваться граничными условиями для этого приближения при $\zeta = \pm 1$, исключить из них $\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s+2)}$, $\sigma_{\beta\gamma 0}^{(s+2)}$, $\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s+2)}$, а все остальные величины, входящие в эти условия, выразить через $v_{\alpha 0}^{(s)}$, $v_{\beta 0}^{(s)}$, $v_{\gamma 0}^{(s)}$ и через величины предыдущих приближений (которые считаем известными).

В произвольной ортогональной системе криволинейных координат задача изгиба в каждом приближении сводится к решению бигармонического уравнения вида

$$\nabla\nabla v_{\gamma 0}^{(s)} = p_\gamma^{(s)} = \begin{cases}\nabla^{s/2}(a_s q_1 + b_s q_2) & \text{для четных } s\\ 0 & \text{для нечетных } s\end{cases} \tag{4.9}$$

где

$$q_1 = \frac{\tau_\gamma^+ - \tau_\gamma^-}{E\varepsilon^{\varkappa+4}} + q_2$$

$$q_2 = \frac{1}{E\varepsilon^{\varkappa+3}}\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left\{\frac{\partial[H_\beta(\tau_\alpha^+ + \tau_\alpha^-)]}{\partial\xi} + \frac{\partial[H_\alpha(\tau_\beta^+ + \tau_\beta^-)]}{\partial\eta}\right\} \tag{4.10}$$

Здесь через $\nabla^{s/2}$ обозначен полигармонический оператор порядка $s/2$. Значения a_s, b_s получены для $s = 0, 2, 4, 6$. Они имеют вид

$$a_0 = {}^3/_2(1+\nu)(1-\nu), \quad b_0 = 0$$

$$a_2 = -{}^3/_{20}(1+\nu)(8-3\nu), \quad b_2 = {}^1/_2(1+\nu)(2-\nu)$$

$$a_4 = -{}^1/_{2800}(1+\nu)(227-157\nu), \quad b_4 = {}^1/_{20}(1+\nu)(1-\nu) \tag{4.11}$$

$$a_6 = -{}^1/_{252000}(1+\nu)(26-791\nu), \quad b_6 = -{}^1/_{8400}(1+\nu)(16+19\nu)$$

Значения a_s, b_s для $s = 0,2$ ранее получены в [2].

Задача обобщенного плоского напряженного состояния в каждом приближении сводится к интегрированию системы уравнений

$$L(v_{\alpha 0}^{(s)}, v_{\beta 0}^{(s)}) = p_\alpha^{(s)} \qquad (\alpha\beta) \tag{4.12}$$

Правые части этих уравнений получены для первых четырех приближений. Они имеют вид

$$p_\alpha^{(0)} = -\frac{1}{E\varepsilon^{\varkappa+3}}\,\frac{1}{2}(\tau_\alpha^+ - \tau_\alpha^-) \quad (\alpha\beta), \qquad p_\alpha^{(1)} = 0 \quad (\alpha\beta)$$

$$p_\alpha^{(2)} = -\frac{1}{E\varepsilon^{\varkappa+3}}\,\frac{1}{12}\left\{\frac{2+\nu}{1+\nu}\,\frac{1}{H_\alpha}\times\right.$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial[H_\beta(\tau_\alpha^+ - \tau_\alpha^-)]}{\partial\xi} + \frac{\partial[H_\alpha(\tau_\beta^+ - \tau_\beta^-)]}{\partial\eta}\right]\right\} + \tag{4.13}$$

$$\left.+\frac{1}{H_\beta}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial[H_\alpha(\tau_\alpha^+ - \tau_\alpha^-)]}{\partial\eta} - \frac{\partial[H_\beta(\tau_\beta^+ - \tau_\beta^-)]}{\partial\xi}\right]\right\}\right\} \quad (\alpha\beta)$$

$$p_\alpha^{(3)} = 0 \quad (\alpha\beta)$$

5. Напряженные состояния, для которых имеют место разложения (2.2) и (2.3), соответствуют асимптотическому решению (1.3) уравнений Ламе. Поэтому эти напряженные состояния возможны в тонком упругом слое. Выше было показано, что в пластинке под действием произвольной поверхностной нагрузки возникает напряженное состояние, для которого имеют место разложения (2.2), а в разложениях (2.3) по два первых члена обращаются в нуль, другими словами, имеют место разложения (2.2) и (2.3) при $s_0 = 2$. Но наряду с таким напряженным состоянием в тонком слое возможны и напряженные состояния, для которых имеют место: а) разложения (2.2) и (2.3) при $s_0 = 1$ и б) разложения (2.2) и (2.3) при $s_0 = 0$. Остановимся на анализе каждого из указанных напряженных состояний.

Для напряженного состояния А, которому соответствует разложения (2.2) и (2.3) при $s_0 = 2$, характерно, что:

1) гипотеза Кирхгоффа — Лява выполняется в нулевом и первом приближениях;

2) наибольшее значение имеют напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}$; перерезывающие напряжения $\sigma_{\alpha\gamma}$, $\sigma_{\beta\gamma}$ на порядок, а нормальные напряжения $\sigma_{\gamma\gamma}$ на два порядка меньше основных напряжений;

3) в нулевом приближении задача изгиба сводится к решению обычного уравнения классической теории изгиба пластинок, а определение $v_{\alpha0}^{(0)}$, $v_{\beta0}^{(0)}$ сводится к решению обычных уравнений обобщенного плоского напряженного состояния.

Напряженное состояние В, которое соответствует разложениям (2.2) и (2.3) при $s_0 = 1$, обладает следующими свойствами:

1) гипотеза Кирхгоффа — Лява выполняется только в нулевом приближении;

2) перерезывающие напряжения $\sigma_{\alpha\gamma}$, $\sigma_{\beta\gamma}$ имеют тот же порядок, что и $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}$, а напряжения $\sigma_{\gamma\gamma}$ на порядок меньше этих напряжений;

3) в нулевом приближении перерезывающие напряжения постоянны по толщине слоя.

Напряженное состояние С, соответствующее разложениям (2.2) и (2.3) при $s_0 = 0$, характеризуется тем, что:

1) гипотеза Кирхгоффа — Лява не имеет места уже в нулевом приближении;

2) наибольшими напряжениями являются перерезывающие напряжения $\sigma_{\alpha\gamma}$, $\sigma_{\beta\gamma}$; остальные напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\gamma\gamma}$ на порядок меньше этих напряжений;

3) в нулевом и первом приближениях перерезывающие напряжения постоянны по толщине слоя. Это означает, что в нулевом и первом приближениях для рассматриваемого напряженного состояния выполняется гипотеза Рейсснера [4].

Два последних напряженных состояния резко отличаются от напряженного состояния, возникающего в однородной пластинке под действием произвольной нагрузки. Оказывается, что эти напряженные состояния имеют место в слабых слоях слоистых пластинок, у которых отношение модулей упругости слабых и несущих слоев соизмеримо с относительной толщиной пластинки или с ее квадратом. Покажем это на примере трехслойной пластинки.

Рассмотрим сначала трехслойную пластинку, у которой отношение модуля упругости заполнителя E_1 к модулю упругости несущих слоев E_2 соизмеримо с относительной толщиной пластинки. Решение уравнений Ламе как в области, занятой заполнителем, так и в областях, занятых несущими слоями, будем искать в виде (1.3).

Анализируя возможность выполнения граничных условий на верхней и нижней плоскостях слоистой пластинки и статических условий сочленения слоев, приходим к выводу, что в несущих слоях возникает напряженное состояние А, соответствующее разложениям (2.2) и (2.3) при $s_0 = 2$, а в заполнителе напряженное состояние В, соответствующее разложениям (2.2) и (2.3) при $s_0 = 1$. Это означает, что в несущих слоях имеет место та же самая асимптотика, которая была рассмотрена в § 3,4, а в заполнителе возникает существенно другое напряженное состояние. Остановимся несколько подробнее на анализе напряженного состояния в заполнителе. К нулевому приближению относятся величины: $v_\alpha^{(0)}, v_\beta^{(0)}, v_\gamma^{(0)}, \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}, \sigma_{\beta\beta}^{(0)}, \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}, \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}, \sigma_{\beta\gamma}^{(1)}, \sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}$; для них имеют место выражения (3.4) и (3.7), в которые входят шесть произвольных функций:

$$v_{\alpha 0}^{(0)}, \; v_{\beta 0}^{(0)}, \; v_{\gamma 0}^{(0)}, \; \sigma_{\alpha\gamma 0}^{(1)}, \; \sigma_{\beta\gamma 0}^{(1)}, \; \sigma_{\gamma\gamma 0}^{(1)} \tag{5.1}$$

На плоскостях контакта заполнителя с несущими слоями должны выполняться шесть геометрических и шесть статических условий сочленения. Из этих условий получаем по двенадцати условий сочленения для каждого приближения.

Остановимся сначала на нулевом приближении. Исключая из двенадцати условий сочленения шесть произвольных функций (5.1), получим шесть соотношений между величинами нулевого приближения для несущих слоев. Назовем эти соотношения условиями связи несущих слоев в нулевом приближении. Подобным же образом получаются условия связи несущих слоев и для последующих приближений.

Теперь рассмотрим трехслойную пластинку, для которой отношение E_1 / E_2 соизмеримо с квадратом относительной толщины. Выясняя возможность выполнения граничных условий на верхней и нижней плоскостях слоистой пластинки и статических условий сочленения слоев, приходим к выводу, что в несущих слоях по-прежнему имеет место напряженное состояние А, соответствующее разложения (2.2) и (2.3) при $s_0 = 2$, а в заполнителе напряженное состояние С, соответствующее разложениям (2.2) и (2.3) при $s_0 = 0$. Поэтому к нулевому приближению для заполнителя относятся величины: $v_\alpha^{(0)}, v_\beta^{(0)}, v_\gamma^{(0)}, \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}, \sigma_{\beta\beta}^{(0)}, \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}, \sigma_{\alpha\gamma}^{(0)}, \sigma_{\beta\gamma}^{(0)}, \sigma_{\gamma\gamma}^{(0)}$, для которых имеют место представления (3.4) и (3.5), содержащие шесть произвольных функций: $v_{\alpha 0}^{(0)}, v_{\beta 0}^{(0)}, v_{\gamma 0}^{(0)}, \sigma_{\alpha\gamma 0}^{(0)}, \sigma_{\beta\gamma 0}^{(0)}, \sigma_{\gamma\gamma 0}^{(0)}$.

Исключая эти произвольные функции из двенадцати условий сочленения слоев для нулевого приближения, получим шесть условий связи несущих слоев в нулевом приближении.

В задаче о деформации трехслойной пластинки условия связи несущих слоев позволяют исключить из рассмотрения заполнитель. После построения напряженного и деформированного состояния в несущих слоях определение смещений и напряжений в заполнителе связано с выполнением только алгебраических операций и дифференцирования (без решения дифференциальных уравнений).

Поступила 27 VI 1967

Институт проблем механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962. т. 26, вып. 4.
2. Гольденвейзер А. Л., Колос А. В. К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
3. Колос А. В. Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
4. Reissner E. On bending of elastic plates. Quart. Appl. Math., 1948, vol. 5, No. 1.