О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В. М. Александров (Ростов на Дону)

В данной работе производится развитие метода, изложенного в [1], применительно к двум типам интегральных уравнений, встречающихся в математической физике при изучении многих смешанных задач с круговой линией раздела граничных условий и плоских смешанных задач.

Дан алгоритм сведения этих интегральных уравнений к решению эквивалентных им бесконечных линейных алгебраических систем. Доказано, что получаемые бесконечные системы квази вполне регулярны при достаточно больших значениях входящего в них безразмерного параметра λ. Показано, что при урезании бесконечных систем получаются конечные системы линейных алгебраических уравнений с почти треугольными матрицами. Последнее обстоятельство значительно упрощает решение этих конечных систем, после чего решение исходных интегральных уравнений находится по простым формулам. При заданной точности приближенного решения и уменьшении параметра λ потребное количество уравнений в урезанных системах увеличивается.

В качестве примера приведено решение осесимметричной задачи о действии штампа на упругий слой, лежащий без трения на жестком основании.

§ 1. Основное интегральное уравнение смешанных задач с круговой линией раздела граничных условий, общий вид его решения. Рассматривается интегральное уравнение

$$\int_0^1 \varphi(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty L(u) J_n\left(\frac{u\rho}{\lambda}\right) J_n\left(\frac{ur}{\lambda}\right) du = \lambda f(r) \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1) \tag{1.1}$$

Здесь $J_n(x)$ — функция Бесселя. Будем предполагать, что функция $L(u)$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$L(u) = 1 + O(e^{-\nu u}) \quad \text{при } u \to \infty \quad (\nu > 0), \quad L(u) = O(u) \quad \text{при } u \to 0 \tag{1.2}$$

при всех $u \in (0, \infty)$ функция $L(u)$ непрерывна вместе со всеми производными.

Для нахождения решения интегрального уравнения (1.1) достаточно научиться решать более простое интегральное уравнение

$$\int_0^1 \psi(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty L(u) J_0\left(\frac{u\rho}{\lambda}\right) J_0\left(\frac{ur}{\lambda}\right) du = \lambda g(r) \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1) \tag{1.3}$$

Действительно, можно доказать, что если в качестве функции $g(r)$ в уравнении (1.3) взять общее решение дифференциального уравнения

$$r^n A^n(g) = f(r) \qquad \left(A = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right) \tag{1.4}$$

которое определяется с точностью до n произвольных постоянных, и затем определить решение $\psi(\rho)$ интегрального уравнения (1.3), обращающееся в нуль при $\rho = 1$ вместе со всеми своими производными до порядка $n - 1$ включительно, то решение $\varphi(\rho)$ интегрального уравнения (1.1) определится по формуле

$$\varphi(\rho) = \rho^n A^n(\psi) \tag{1.5}$$

Заметим, что все произвольные постоянные, входящие в найденную из уравнения (1.4) функцию $g(r)$, при выполнении указанного алгоритма определяются из условий

$$\psi^{(k)}(1) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{1.6}$$

Таким образом, на основании сказанного, все дальнейшее будет посвящено только изучению интегрального уравнения (1.3). Используя интеграл [2]

$$\int_0^\infty J_0(\mu u) J_0(\nu u) du = \frac{2}{\pi(\mu + \nu)} K\left(\frac{2\sqrt{\mu\nu}}{\mu + \nu}\right) \tag{1.7}$$

перепишем интегральное уравнение (1.3) в виде

$$\int_0^1 \psi(\rho) K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)\frac{\rho d\rho}{r+\rho} = \frac{\pi}{2} g(r) + \int_0^1 \psi(\rho) F\left(\frac{r}{\lambda}, \frac{\rho}{\lambda}\right)\rho\, d\rho \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1)$$

$$F(\mu, \nu) = \frac{\pi}{2\lambda}\int_0^\infty [1 - L(u)] J_0(\mu u) J_0(\nu u)\, du \tag{1.8}$$

Здесь и в (1.7) $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Основываясь на свойствах (1.2) функции $L(u)$, не представляет труда показать, что четная функция $F(\mu, \nu)$ непрерывна вместе со всеми своими производными по совокупности переменных в квадрате $-\infty < 0 \leqslant (\mu, \nu) < \infty$.

Будем искать решение $\psi(\rho)$ уравнения (1.8) в классе $L(S_1)$ абсолютно суммируемых в круге $S_1 (\rho \leqslant 1)$ функций, тогда при $\lambda \to \infty$ интегральное уравнение (1.8) вырождается в следующее:

$$\int_0^1 \psi_0(\rho) K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)\frac{\rho\, d\rho}{r+\rho} = \frac{\pi}{2} g(r) \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1) \tag{1.9}$$

Как известно, к такому уравнению приводится осесимметричная контактная задача для упругого полупространства.

Решение интегрального уравнения (1.9) находилось в замкнутом виде многими авторами различными способами.

Здесь укажем, на наш взгляд, наиболее простой способ решения интегрального уравнения (1.9), а затем произведем исследование структуры и дифференциальных свойств функции $\psi_0(\rho)$.

Используя (1.7), приведем интегральное уравнение (1.9) к эквивалентному ему парному интегральному уравнению

$$\int_0^\infty \Psi_0(u) J_0(ur)\, u\, du = 0 \quad (r > 1); \qquad \int_0^\infty \Psi_0(u) J_0(ur)\, du = g(r) \quad (r \leqslant 1) \tag{1.10}$$

причем

$$\psi_0(r) = \int_0^\infty \Psi_0(u) J_0(ur)\, u\, du \qquad \text{при } r \leqslant 1 \tag{1.11}$$

Умножим первое из соотношений (1.10) на $r(r^2 - t^2)^{-1/2} dr$ и проинтегрируем по r от t до ∞, второе соотношение (1.10) умножим почленно на $r(t^2 - r^2)^{-1/2} dr$ и проинтегрируем по r от 0 до t. Воспользовавшись затем формулами

$$\int_0^t \frac{rJ_0(r\gamma)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = \frac{\sin\gamma t}{\gamma}, \qquad \int_t^\infty \frac{rJ_0(r\gamma)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dr = \frac{\cos\gamma t}{\gamma} \tag{1.12}$$

получим следующее парное интегральное уравнение:

$$\int_0^\infty \Psi_0(\gamma)\cos\gamma t\, d\gamma = 0 \quad (t > 1); \qquad \int_0^\infty \Psi_0(\gamma)\sin\gamma t \frac{d\gamma}{\gamma} = \int_0^t \frac{g(r)\, r\, dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \quad (t \leqslant 1) \tag{1.13}$$

Введем теперь в рассмотрение функцию $\psi^*(t)$, связанную с $\Psi_0(u)$ соотношениями

$$\int_0^\infty \Psi_0(u)\cos ut\, du = \begin{cases} 0 & (t > 1) \\ \psi^*(t) & (t \leqslant 1) \end{cases}, \qquad \Psi_0(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \psi^*(\tau)\cos u\tau\, d\tau \tag{1.14}$$

Продифференцировав второе уравнение (1.13) почленно по t, найдем

$$\psi^*(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{g(r)\, r\, dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \tag{1.15}$$

Установим теперь связь между $\psi_0(r)$ и $\psi^*(t)$. Подставляя выражение $\Psi_0(u)$ вида (1.14) в (1.11) и используя интеграл [2]

$$\int_0^\infty \sin u\tau J_0(ur)\,du = \begin{cases} 0 & (0<\tau<r) \\ (\tau^2-r^2)^{-1/2} & (0<r<\tau) \end{cases} \tag{1.16}$$

получим

$$\psi_0(r) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dr} r \int_r^1 \frac{\psi^*(\tau)\,d\tau}{\tau\sqrt{\tau^2-r^2}} \tag{1.17}$$

Итак, формулы (1.15) и (1.17) дают решение интегрального уравнения (1.9). Можно показать, на чем мы здесь не будем подробно останавливаться, что это решение имеет смысл [1], по крайней мере, для $g(r) \in H^\alpha(S_1)$, $\alpha > 1/2$.

Далее будем полагать, что $g''(r)$ ограничена, когда $r \in [S_1]$. При этом из (1.15) без труда получим

$$\psi^{*\prime}(t) = \int_0^t \frac{g'(r)\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}} + \int_0^t \frac{rg''(r)\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}} \tag{1.18}$$

Теорема 1. Если $g''(r)$ ограничена, то $\psi^{*\prime}(t) \in H^{1/2}(S_1)$.

Из ограниченности $g''(r)$ в круге S_1 следует, что $|g'(r)| \leqslant Cr$ при всех $r \in S_1$. Тогда на основании (1.18)

$$|\psi^{*\prime}(t)| \leqslant (C+C')\int_0^t \frac{r\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}} = Dt \quad (t \in S_1) \tag{1.19}$$

Остается показать, что

$$\psi^{*\prime}(t) \in H^{1/2}(S_{1-\varepsilon}) \tag{1.20}$$

где $S_{1-\varepsilon}$ — круг единичного радиуса с выключенной ε — окрестностью точки $t = 0$ Заметим, что условие (1.20) будет выполнено, если доказать более сильное утверждение $\psi^{*\prime}(t) \in H^{1/2}(\varepsilon, 1)$, т. е.

$$|\psi^{*\prime}(t) - \psi^{*\prime}(\tau)| \leqslant D\,|t-\tau|^{1/2} \tag{1.21}$$

при всех t и $\tau \in [\varepsilon, 1]$.

Для первого интеграла в (1.18) сделанное утверждение очевидно. Рассмотрим подробнее второй интеграл. Оценим модуль разности ($t > \tau$):

$$\left|\int_0^t \frac{rg''(r)\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}} - \int_0^\tau \frac{rg''(r)\,dr}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\right| \leqslant \left|\int_0^\tau rg''(r)\left(\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\right)dr\right| + \left|\int_\tau^t \frac{rg''(r)\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}}\right| \tag{1.22}$$

Оценим теперь первый интеграл правой части (1.22). Используя очевидное тождество

$$(\tau^2-r^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(t^2-\tau^2)^n (t^2-r^2)^{-(n+1/2)} \tag{1.23}$$

---

[1] Это означает, что $|f(P) - f(Q)| \leqslant AR^\alpha_{PQ}$ (R_{PQ} — расстояние между точками P и Q) при любых P и $Q \in S_1$.

перепишем его в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(t^2-\tau^2)^n\left|\int_0^{\tau}\frac{rg''(r)\,dr}{(t^2-r^2)^{n+1/2}}\right|\leqslant B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(t^2-\tau^2)^n\int_0^{\tau}\frac{r\,dr}{(t^2-r^2)^{n+1/2}}=$$

$$=B\sqrt{t^2-\tau^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\left[1-\left(1-\frac{\tau^2}{t^2}\right)^{n-1/2}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{2}\,B\,|t-\tau|^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}=\sqrt{2}\,B\,|t-\tau|^{1/2} \qquad (1.24)$$

Второй интеграл правой части (1.19) оценивается без труда

$$\left|\int_{\tau}^{t}\frac{rg''(r)\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}}\right|\leqslant B\sqrt{t^2-\tau^2}\leqslant\sqrt{2}\,B\,|t-\tau|^{1/2} \qquad (1.25)$$

На основании доказанного перепишем формулу (1.17) в виде

$$\psi_0(r)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\psi^*(1)}{\sqrt{1-r^2}}-\int_r^1\frac{\psi^{*\prime}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\right] \qquad (1.26)$$

Теорема 2. Если $g''(r)$ ограничена, то $\psi_0(r)$ имеет вид

$$\psi_0(r)=\omega(r)(1-r^2)^{-1/2} \qquad (1.27)$$

причем $\omega(r)\in H^{1/2}(S_1)$, т. е. $\psi_0(r)\in L(S_1)$.

Схема доказательства аналогична теореме 1. Сначала показывается, что $|\omega(r)-\omega(0)|\leqslant Er$, а затем $\omega(r)\in H^{1/2}(\varepsilon,1)$. Сформулируем еще одну более общую теорему.

Теорема 3. Если функция $g(r)$ такова, что ее $n+2$ производная ограничена при $r\in[S_1]$, то функция $\psi_0(r)$ имеет вид (1.27), причем $\omega^{(n)}(r)\in H^{1/2}(S_1)$. Доказательство проводится аналогично изложенному выше.

Будем теперь искать решение интегрального уравнения (1.8) из класса $L(S_1)$ в виде

$$\psi(\rho)=\psi_0(\rho)+\psi_1(\rho) \qquad (1.28)$$

где $\psi_0(\rho)$ есть решение интегрального уравнения (1.9), определяемое соотношениями (1.15) и (1.17). Для поправочной функции $\psi_1(\rho)$ получаем интегральное уравнение

$$\int_0^1\psi_1(\rho)K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)\frac{\rho\,d\rho}{r+\rho}=\frac{\pi}{2}g_*(r)+\int_0^1\psi_1(\rho)F\left(\frac{r}{\lambda},\frac{\rho}{\lambda}\right)\rho\,d\rho \qquad (0\leqslant r\leqslant 1)$$

$$g_*(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\psi_0(\rho)F\left(\frac{r}{\lambda},\frac{\rho}{\lambda}\right)\rho\,d\rho \qquad (1.29)$$

Заметим, что в силу указанных выше свойств функции $F(\mu,\nu)$ и условия $\psi(\rho)\in L(S_1)$, или с учетом теоремы 2 $\psi_1(\rho)\in L(S_1)$, вся правая часть интегрального уравнения (1.29), как функция $r\in[S_1]$, непрерывна со всеми производными.

Тогда на основании теоремы 3 можем заключить, что общее решение интегрального уравнения (1.29), если оно существует в $L(S_1)$, при любом значении $\lambda\in(0,\infty)$ имеет вид

$$\psi_1(r)=\Omega(r)(1-r^2)^{-1/2} \qquad (1.30)$$

где $\Omega(r)$ — непрерывная со всеми производными функция при $r\in[S_1]$.

Итак, чтобы определить общее решение интегрального уравнения (S_1), необходимо найти функцию $\Omega(r)$, чему и посвящаем § 2.

§ 2. **Сведение интегрального уравнения (1.29) к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.** Представим функцию $F(\mu, \nu)$ вида (1.8) в форме следующего двойного ряда по четным полиномам Лежандра:

$$F\left(\frac{r}{\lambda}, \frac{\rho}{\lambda}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_{ij}(\lambda) P_{2i}(\sqrt{1-r^2}) P_{2i}(\sqrt{1-\rho^2}) \tag{2.1}$$

Функции $g_*(r)$ и $\Omega(r)$, входящие в формулы (1.29), (1.30), также разложим в ряды [1]

$$g_*(r) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{i*} P_{2i}(\sqrt{1-r^2}), \qquad \Omega(r) = \sum_{i=0}^{\infty} S_i P_{2i}(\sqrt{1-r^2}) \tag{2.2}$$

В силу указанных в § 1 свойств функций $F(\mu, \nu)$, $g_*(r)$ и $\Omega(r)$ ряды (2.1) и (2.2) сходятся равномерно соответственно к $F(\mu, \nu)$ по совокупности переменных $(r, \rho) \in [0, 1]$ и любых значениях параметра $\lambda \in (0, \infty)$, к $g_*(r)$ и $\Omega(r)$ при всех $r \in S_1$.

Воспользовавшись известным свойством ортогональности полиномов Лежандра [2]

$$\int_0^1 P_{2i}(\sqrt{1-x^2}) P_{2j}(\sqrt{1-x^2}) \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ (4i+1)^{-1} & (i = j) \end{cases} \tag{2.3}$$

получим для коэффициентов $e_{ij}(\lambda)$ ряда (2.1) выражение (2.4)

$$e_{mn} = (4m+1)(4n+1) \int_0^1 \int_0^1 F\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) P_{2m}(\sqrt{1-x^2}) P_{2n}(\sqrt{1-y^2}) \frac{xy\,dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$$

Подставив теперь в (2.4) выражение $F(\mu, \nu)$ вида (1.8) и используя интеграл [2]

$$\int_0^1 J_0(bx) P_{2i}(\sqrt{1-x^2}) \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \frac{1}{\sqrt{b}} J_{2i+1/2}(b) \tag{2.5}$$

получим другую формулу для $e_{mn}(\lambda)$: (2.6)

$$e_{mn} = (4m+1)(4n+1) \frac{\pi^2 (2m-1)!!\,(2n-1)!!}{4\,(2m)!!\,(2n)!!} \int_0^\infty [1 - L(u)]\, J_{2m+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{2n+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \frac{du}{u}$$

Перейдем к определению коэффициентов R_{i*}. Используя вторую формулу (1.29) и (2.1), найдем

$$R_{i*} = \sum_{n=0}^{\infty} e_{in}(\lambda) \Psi_n, \qquad \Psi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi_0(\rho) P_{2n}(\sqrt{1-\rho^2})\, \rho\, d\rho \tag{2.7}$$

Вычислим интегралы (2.7), применяя следующий искусственный прием. Умножим обе части интегрального уравнения (1.9) почленно на

$$r(1-r^2)^{-1/2} P_{2n}(\sqrt{1-r^2})\, dr$$

и проинтегрируем по r от нуля до единицы. Переставив затем интегралы в левой части полученного соотношения и воспользовавшись формулой [3]

$$\int_0^1 \frac{\tau P_{2m}(\sqrt{1-\tau^2})}{\sqrt{1-\tau^2}} K\left(\frac{2\sqrt{\tau t}}{\tau + t}\right) \frac{d\tau}{\tau + t} = \frac{\pi^2 [(2m-1)!!]^2}{4\,[(2m)!!]^2} P_{2m}(\sqrt{1-t^2}) \tag{2.8}$$

---

[1] Заметим, что полиномы Лежандра для нахождения приближенных решений интегральных уравнений, подобных (1.3), использовались также в работе [3]. Главным преимуществом излагаемого в данном параграфе подхода, на наш взгляд, является представление $F(\mu, \nu)$ в виде (2.1).

получим для интегралов Ψ_n следующие выражения:

$$\Psi_n = \frac{4\,[(2n)!!]^2}{\pi^2\,[(2n-1)!!]^2}\,\frac{Rn}{(4n+1)}, \quad R_n = (4n+1)\int_0^1 g(r)\,P_{2n}(\sqrt{1-r^2})\,\frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} \tag{2.9}$$

Заметим, что числа R_n есть коэффициенты разложения функции $g(r)$ в ряд по полиномам Лежандра вида (2.2).

Получим, наконец, соотношения для определения коэффициентов S_i во второй формуле (2.2). Подставляя в интегральное уравнение (1.29) функции $\psi_1(\rho)$, $g_*(r)$ и $F(\mu, \nu)$ в виде (1.30), (2.2), (2.1) и вычисляя интегралы по формулам (2.3), (2.8), получим соотношение, в левой и правой частях которого стоят ряды по полиномам Лежандра. Приравнивая коэффициенты обеих частей при полиномах одинакового номера, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения S_i:

$$S_i\,\frac{\pi}{2}\,\frac{[(2i-1)!!]^2}{[(2i)!!]^2} = R_{i*} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} S_k\,\frac{e_{ik}(\lambda)}{4k+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, \infty) \tag{2.10}$$

§ 3. Исследование бесконечной системы (2.10). Перепишем систему (2.10) в более удобном виде

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}x_k + R_{i*} \qquad (i = 0, 1, \ldots, \infty) \tag{3.1}$$

Здесь

$$x_i = \frac{\pi}{2}\,\frac{[(2i-1)!!]^2}{[(2i)!!]^2}\,S_i, \qquad a_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\,\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2}\,\frac{e_{mn}(\lambda)}{(4n+1)} =$$

$$= (4m+1)\,\frac{(2n)!!\,(2m-1)!!}{(2m)!!\,(2n-1)!!}\int_0^{\infty}[1-L(u)]\,J_{2m+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right)J_{2n+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\frac{du}{u} \tag{3.2}$$

Теперь найдем асимптотические формулы для коэффициентов a_{mn} вида (3.2) при больших и малых значениях параметра λ.

Используя известное представление $J_\nu(x)$ в виде ряда по степеням x, получим для a_{mn} при $\lambda \to \infty$ следующее выражение:

$$a_{mn} = \frac{2}{\pi\lambda^{2p+1}}\,\frac{(2n)!!\,(2m-1)!!}{(2m)!!\,(2n-1)!!\,(4m-1)!!\,(4n+1)!!}\left[I_p - \frac{2p+3}{(4m+3)\,(4n+3)\,\lambda^2}\,I_{p+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{4\,(p^2-mn)+13p+{}^{55}/_4}{(4m+3)\,(4m+5)\,(4n+3)\,(4n+5)\,\lambda^4}\,I_{p+2} + O(\lambda^{-6})\right] \qquad (p = m+n) \tag{3.3}$$

$$I_k = \int_0^{\infty}[1-L(u)]\,u^{2k}\,du$$

Упростим формулу (3.3), предполагая, что m и n велики; для этого сначала найдем асимптотику интегралов I_k вида (3.3) при больших k.

Принимая во внимание первое из соотношений (1.2), при $k \to \infty$ будем иметь

$$I_k = O\,[(2k)!\,\nu^{-(2k+1)}] \tag{3.4}$$

Используя теперь формулу Стирлинга, получим следующее асимптотическое выражение для a_{mn} при больших m, n и λ:

$$a_{mn} = O\left[\frac{p^{2p+1/2}}{(2\lambda\nu)^{2p+1}\,m^{2m+1/2}\,n^{2n+1/2}}\right] \tag{3.5}$$

Чтобы исследовать поведение коэффициентов a_{mn} при малых λ, произведем под интегралом в (3.2) замену переменной, положив $u/\lambda = \alpha$. Воспользовавшись затем вторым свойством (1.2) функции $L(u)$ и возвращаясь к старой переменной u, будем иметь при $\lambda \to 0$:

$$a_{mn} = (4m+1)\frac{(2n)!!\,(2m-1)!!}{(2m)!!\,(2n-1)!!}\int_0^\infty J_{2m+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{2n+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\frac{du}{u} \tag{3.6}$$

Вычисляя теперь интеграл [2], окончательно получим

$$a_{mn} = 0\,(m \neq n), \quad a_{mn} = 1 \tag{3.7}$$

Докажем, что при больших значениях параметра λ бесконечная система (3.1) квази вполне регулярна. Для этого рассмотрим ряды

$$b_i = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{ik}| \qquad (i = 0, 1, \ldots, \infty) \tag{3.8}$$

Используя оценку (3.5), не представляет труда доказать, что ряды (3.8) сходятся при любых больших, но конечных i, если параметр $\nu > (2\nu)^{-1}$.

Выясним теперь поведение сумм b_i при $i \to \infty$. Рассмотрим выражение

$$b_i^* = \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{i} i\,|a_{ik}| \tag{3.9}$$

Ясно, что $b_i^* \to b_\infty$ при $i \to \infty$; кроме того, на основании теоремы Штольца [4] можно утверждать

$$\lim_{i\to\infty} b_i^* = \lim_{i\to\infty} i\,|a_{ii}| \tag{3.10}$$

Отсюда с учетом оценки (3.5) без труда следует, что $b_\infty = 0$, если $\lambda > \nu^{-1}$.

Таким образом, суммы b_i стремятся к нулю, когда $i \to \infty$; тогда, начиная с некоторого $i = i_0$, будем иметь $b_i < 1 - \varepsilon$, что и означает квази вполне регулярность системы (3.1) при всех $\lambda > \nu^{-1}$. Кроме того, ясно, что свободные члены Ri_* системы (3.1) ограничены сверху и при $i \to \infty$ стремятся к нулю в силу равномерной сходимости первого ряда (2.2).

При малых значениях параметра λ бесконечная система (3.1) становится неустойчивой, ибо, как это следует из оценки (3.7), ее определитель стремится к нулю.

Для нахождения приближенных решений бесконечной системы (3.1) удобно воспользоваться методом редукции (урезания). При этом получается следующая конечная система:

$$x_i^n = \sum_{k=0}^{n-i} a_{ik} x_k^n + R_{i*}^n \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{3.11}$$

Верхний индекс n у величин x_i означает, что производится решение системы $n+1$ линейных алгебраических уравнений, полученных урезанием бесконечной системы. Этот же индекс у величины R_{i*} означает, что в формуле (2.7), определяющей эти коэффициенты, суммирование по k необходимо производить до n, а не до ∞.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (3.11) при любом n производится достаточно просто благодаря тому, что их коэффициенты образуют почти треугольную матрицу. После определения величин x_i^n из системы (3.11) приближенное решение интегрального уравнения (1.3) найдем по формулам (1.28), (1.17), (1.15), (1.30), второй формуле (2.2) и первой (3.2), причем в (2.2) суммирование по i производится до n, а не до ∞.

Заметим, что при заданной точности приближенного решения интегрального уравнения (1.3) и уменьшении параметра λ количество $n+1$ уравнений в урезанной системе (3.11) необходимо увеличивать. Действительно, при $\lambda = 0$ для коэффициентов $e_{mn}(\lambda)$ ряда (2.1) на основании формул (3.7) и второй формулы (3.2) будем иметь

$$e_{mn} = 0 \quad (m \neq n), \qquad e_{mm} = \frac{\pi^2 (4m+1)\,[(2m-1)!!]^2}{4\,[(2m)!!]^2} \tag{3.12}$$

или, применяя формулу Стирлинга, при больших m найдем $e_{mm} = \pi$. Теперь, используя последнее и асимптотику полиномов Лежандра [2] при больших m, легко показать, что ряд (2.1) для функции $F(\mu, \nu)$ расходится при $\lambda = 0$ на линии $\mu = \nu$. Следовательно, при уменьшении λ сходимость его на этой линии будет ухудшаться и для сохранения заданной точности приближенного решения количество уравнений в системе (3.11) нужно увеличивать.

Таким образом, хорошую сходимость изложенного выше метода приближенного решения интегрального уравнения (1.3) следует ожидать только при больших и промежуточных значениях параметра λ.

Для окончательного выяснения границ рационального использования данного метода коротко коснемся других методов приближенного решения интегрального уравнения (1.3).

Методом больших λ (см. [5,6]) может быть получено следующее приближенное решение (1.3):

$$\psi(r) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dr} r \int_r^1 \frac{\psi^*(\tau)\,d\tau}{\tau\sqrt{\tau^2 - r^2}} + \frac{2}{\pi\sqrt{1-r^2}} \int_0^1 \psi^*(\tau)\Big[q\Big(1 + q + q^2 + q^3 - \frac{2}{3}p\Big) - \tag{3.13}$$
$$- p\,(2r^2 + \tau^2 - 1)(1+q)\Big]\,d\tau + O(\lambda^{-6}) \qquad \Big(q = \frac{2}{\pi\lambda} I_0,\ p = \frac{1}{\pi\lambda^3} I_1\Big)$$

где I_0 и I_1 имеют вид (3.3), а функция $\psi^*(\tau)$ определяется выражением (1.15).

Нулевой член асимптотики решения интегрального уравнения (1.3) при малых λ может быть найден следующим образом.

Перепишем интегральное уравнение (1.3), используя асимптотическое представление функций Бесселя при больших значениях аргумента (малые λ), в виде

$$\int_{-1}^{1} \chi(\rho)\, M\Big(\frac{\rho - r}{\lambda}\Big) d\rho = \pi h(r) \qquad (|r| \leqslant 1) \tag{3.14}$$
$$M(x) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos ux\, du, \qquad \chi(\rho) = \psi(|\rho|)\sqrt{|\rho|}, \qquad h(r) = g(|r|)\sqrt{|r|}$$

Теперь в интегральном уравнении (3.14) перейдем к новым переменным по формулам [7,8] [1]

$$\tau = \frac{h(1) - h(\rho)}{\lambda h'(1)}, \qquad t = \frac{h(1) - h(r)}{\lambda h'(1)} \tag{3.15}$$

Обратные замены при малых λ позволяют единственным образом представить $|\rho|$ и $|r|$ асимптотическими выражениями $|\rho| = 1 - \lambda\tau + \ldots$, $|r| = 1 - \lambda t + \ldots$ Поэтому будем иметь

$$\int_0^{c/\lambda} \chi^*(\tau)\, M\Big(\frac{2}{\lambda}\Big) d\tau + \int_0^{c/\lambda} \chi^*(\tau)\, M(\tau - t)\, d\tau = \frac{\pi}{\lambda}\,[h(1) - \lambda t h'(1)] \qquad \Big(0 \leqslant t \leqslant \frac{c}{\lambda}\Big) \tag{3.16}$$
$$c = [h(1) - h(0)]\,[h'(1)]^{-1}, \qquad \chi^*(\tau) \equiv \chi(\rho)$$

[1] Здесь предполагается, что функция $h(r)$ — строго монотонная по r при $0 < |r| \leqslant 1$. Это ограничение не является существенным, ибо $h(r)$ можно всегда представить в виде суммы двух строго монотонных функций.

Если теперь принять во внимание, что на основании второй формулы (1.2) ядро $M(x) \sim \delta(x)$ при $|x| \to \infty$ ($\delta(x)$ — дельта-функция Дирака) и устремить в левой части интегрального уравнения (3.16) параметр λ к нулю, то определение нулевого члена асимптотики решения интегрального уравнения (1.3) при малых λ сведется к определению решения следующего интегрального уравнения Винера — Хопфа:

$$\int_0^\infty \chi^*(\tau) M(\tau - t)\, d\tau = \frac{\pi}{\lambda}[h(1) - \lambda t h'(1)] \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{3.17}$$

Построение нулевого члена асимптотики решения при малых λ методом, изложенным в [9], может быть приведено также к решению интегрального уравнения (3.17), но с иной правой частью, на чем подробно останавливаться не будем.

Рассмотрение конкретных задач показывает, что асимптотическое решение при больших λ вида (3.13) и нулевой член асимптотики решения при малых λ дают, как правило, надежные результаты при $2 \leqslant \lambda < \infty$ и $0 < \lambda \leqslant 1/_2$ соответственно.

В работе [10] показана возможность нахождения полной асимптотики решения интегрального уравнения (1.3) при малых λ в предположении, что функция $L(u)$ — мероморфная. Использование этой полной асимптотики при рассмотрении конкретных задач, по-видимому, позволило бы произвести смыкание с асимптотическим решением (3.13) для больших λ. Однако практическое построение полной асимптотики решения при малых λ и последующий числовой анализ ее вызывают значительные трудности.

Таким образом, в соответствии со всем сказанным выше, изложенный в данной работе метод приближенного решения интегрального уравнения (1.3) должен, на наш взгляд, в основном служить «соединительным мостом» между асимптотическим решением для больших λ вида (3.13) и нулевым членом асимптотики решения при малых λ.

§ 4. **Пример.** Рассмотрим осесимметричную задачу о действии жесткого штампа на упругий слой, лежащий без трения на жестком основании. Силы трения между штампом и слоем предполагаем отсутствующими.

Путем использования интегрального преобразования Ханкеля можно рассматриваемую контактную задачу привести к решению интегрального уравнения, которое в безразмерных координатах имеет вид (1.3), причем $\psi(\rho)$ — неизвестное давление между штампом и слоем на линии контакта, $\lambda = h/a$, $g(r) = a^{-1}\Delta\gamma(r)$, h — толщина слоя, a — радиус области контакта, $\Delta = G(1 - \sigma)^{-1}$, G и σ — упругие постоянные слоя, $\gamma(r)$ — осадка точек границы слоя под штампом. Функция $L(u)$ представима в форме

$$L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \tag{4.1}$$

Легко показать, что функция $L(u)$ вида (4.1) удовлетворяет условиям (1.2), причем $\nu = 2$. Отсюда следует, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений (3.1) для данной задачи будет квази вполне регулярна при всех $\lambda > 1/_2$.

Значения постоянных $a_{mn}(\lambda)$, входящих в систему (3.1), могут быть найдены при больших значениях параметра λ ($\lambda \geqslant 2$) по асимптотической формуле (3.3), при других значениях λ они могут быть определены методами численного интегрирования по формулам (2.4), (2.6) и второй формуле (3.2). Таким образом, при $\lambda = 1$ получены следующие значения постоянных $a_{mn}(\lambda)$:

$$a_{00} = 0.3447, \quad a_{10} = 0.1678, \quad a_{01} = 0.008389, \quad a_{20} = 0.01313, \quad a_{11} = 0.02367, \quad a_{02} = 0.0002052$$

На технике вычислений останавливаться не будем, заметим только, что значительное упрощение вычислительного алгоритма было достигнуто за счет использования таблицы функции [6]

$$F(k) = \int_0^\infty [1 - L(u)] J_0(uk)\, du \tag{4.2}$$

(здесь $L(u)$ имеет вид (4.1), а $J_0(x)$ — функция Бесселя), и соотношения

$$F(\mu,\nu)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(R)\,d\varphi \qquad (R=\sqrt{\mu^2+\nu^2-2\mu\nu\cos\varphi}) \tag{4.3}$$

Теперь не представляет труда изложенным в данной работе методом получить приближенное решение рассматриваемой контактной задачи при $\lambda=1$ для штампа с тем или иным основанием. Например, если $\gamma(r)\equiv\gamma$ (плоский штамп), то приближенное решение, соответствующее случаю $n=1$ в (3.11), имеет вид

$$\psi(r)=\Delta\gamma/a\ (1-r^2)^{-1/2}\ (1.7680-0.5532\ r^2) \tag{4.4}$$

увеличивая n на единицу, получим

$$\psi(r)=\Delta\ \gamma/a\ (1-r^2)^{-1/2}\ (1.8116-0.7190\ r^2+0.1263r^4) \tag{4.5}$$

Дальнейшее увеличение n не приводит к существенному уточнению решения, поэтому приближенное решение (4.5) можно считать практически точным. Это еще подтверждается тем, что расхождение между значениями функций $\psi(r)$ вида (4.4) и (4.5) при всех $0\leqslant r<1$ не превосходит 2.5%.

Определим еще значение силы P, действующей на штамп, по формуле

$$P=a\int_{-1}^{1}\psi(r)\,dr \tag{4.6}$$

Соответственно для случаев (4.4) и (4.5) получим $P=8.791\ \Delta\gamma a$ и $P=8.794\ \Delta\gamma a$. В работе [11] методом, совершенно отличным от данного, для рассматриваемого случая получено $P=8.80\ \Delta\gamma a$.

Таким образом, данный конкретный пример и другие рассмотренные примеры, которые ради краткости не приводятся, показывают, что сходимость изложенного в работе метода для промежуточных значений параметра λ ($1/2<\lambda<2$) достаточно высока. Этот метод может служить надежным средством для практического решения интегрального уравнения (1.3) в указанном диапазоне изменения λ, обеспечивая уверенную стыковку с асимптотическими решениями этого уравнения для больших и малых λ.

§ 5. Сведение основного интегрального уравнения плоских смешанных задач к решению бесконечной алгебраической системы. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,M\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi f(x) \qquad (|x|\leqslant 1) \tag{5.1}$$

где ядро $M(t)$ имеет вид (3.14), а функция $L(u)$ удовлетворяет по-прежнему условиям (1.2).

Будем дальше, не нарушая общности, предполагать, что функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ — четные («четный» вариант интегрального уравнения (5.1)), ибо решение для «нечетного» варианта может быть получено дифференцированием по x определенным образом построенного решения для некоторого четного случая [12].

Используя интеграл [2]

$$\int_0^\infty\frac{\cos u-\cos ut}{u}\,du=\ln|t| \tag{5.2}$$

перепишем интегральное уравнение (5.1) в виде

$$-\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\ln\frac{|\xi-x|}{\lambda}d\xi=\pi f(x)+\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,F\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi \qquad (|x|\leqslant 1)$$

$$F(t)=\int_0^\infty\frac{[1-L(u)]\cos ut-\cos u}{u}\,du \tag{5.3}$$

Основываясь на свойствах (1.2) функции $L(u)$, не представляет труда показать, что функция $F(t)$ непрерывна вместе со всеми производными при всех $-\infty < t < \infty$.

Будем искать решение $\varphi(\xi)$ уравнения (5.3) в классе L (-1.1), тогда при $\lambda \to \infty$ интегральное уравнение (5.3) вырождается в следующее:

$$\int_{-1}^{1} \varphi_0(\xi)\left[-\ln\frac{|\xi - x|}{\lambda} - F(0)\right] d\xi = \pi f(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \tag{5.4}$$

Как известно, к такому уравнению приводится контактная задача для упругой полуплоскости. Наиболее распространено решение этого интегрального уравнения в форме сингулярных интегралов. Более удобным для практического использования является, на наш взгляд, решение, не содержащее сингулярных интегралов, впервые оно было найдено в работе [13].

Не останавливаясь на подробностях, заметим, что такое решение весьма просто может быть получено способом, изложенным в § 1 при определении решения интегрального уравнения (1.9), и имеет вид

$$\varphi_0(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}x\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2-x^2}}\frac{d}{dt}\int_{-t}^{t}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}}$$

$$P = \int_{-1}^{1}\varphi_0(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\ln 2\lambda - F(0)}\int_{-1}^{1}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{5.5}$$

Можно показать, на чем не будем подробно останавливаться, что решение (5.5) четного варианта интегрального уравнения (5.4) имеет смысл, по крайней мере, для $f(x) \in H^\alpha(-1,1)$, $\alpha > 1/2$.

Далее будем полагать, что $f''(x)$ ограничена при $x \in [-1, 1]$. Тогда первую формулу (5.5) можем переписать в виде

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left[P + \int_{-1}^{1}\frac{f'(\xi)\,\xi\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right] - \frac{1}{\pi}\int_x^1\frac{dt}{t\sqrt{t^2-x^2}}\int_{-t}^{t}\frac{\xi\,[f'(\xi)\,\xi]'\,d\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}} \tag{5.6}$$

Решение интегрального уравнения (5.4) для нечетного варианта может быть легко получено из (5.6), как это указывалось выше [1].

[1] Заметим, что решение интегрального уравнения (5.4) для нечетного варианта может быть также найдено способом, отличным от изложенного в [12]. Действительно, если обе части уравнения (5.4) продифференцировать по x, а затем в полученном соотношении учесть, что функции $\varphi_0(x)$ и $f(x)$ — четные или нечетные, то его соответственно можно представить в виде

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_0(\xi)}{\xi^2-x^2}\,d\xi = \pi f'(x)\,x^{-1}, \qquad \int_{-1}^{1}\frac{\xi\psi_0(\xi)}{\xi^2-x^2}\,d\xi = \pi g'(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \tag{*}$$

Отсюда видно, что

$$\varphi_0(x) = x\psi_0(x), \quad f'(x) = xg'(x) \quad (|x| \leqslant 1), \quad P = M = \int_{-1}^{1}\xi\psi_0(\xi)\,d\xi \tag{**}$$

Таким образом, решение интегрального уравнения (5.4) для нечетного варианта получится, если в формуле (5.6), удовлетворяющей первому уравнению (*), произвести замены согласно (**). Для определения величины M обе части второго уравнения (*) умножим на $\sqrt{1-x^2}\,dx$ и проинтегрируем от -1 до $+1$; затем, переставив интегралы в левой части полученного соотношения и взяв внутренний интеграл, найдем

$$M = -\int_{-1}^{1} g'(x)\sqrt{1-x^2}\,dx \tag{***}$$

На основании формулы (5.6) аналогично тому, как это сделано в § 1, может быть доказана следующая теорема.

Теорема 4. Если $f''(x)$ ограничена, то $\varphi_0(x)$ имеет вид

$$\varphi_0(x) = \omega(x)(1-x^2)^{-1/2} \tag{5.7}$$

причем $\omega(x) \in H^{1/2}(-1,1)$, т. е. $\varphi_0(x) \in L(-1,1)$.

Имеет также место более общая теорема.

Теорема 5. Если функция $f(x)$ такова, что ее $(n+2)$ производная ограничена при $x \in [-1, 1]$, то функция $\varphi_0(x)$ имеет вид (5.7), причем $\omega^n(x) \in H^{1/2}(-1,1)$.

Будем теперь искать решение интегрального уравнения (5.3) из класса $L(-1,1)$ в виде

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) \tag{5.8}$$

где $\varphi_0(x)$ есть решение интегрального уравнения (5.4). Для поправочной функции $\varphi_1(x)$ получим интегральное уравнение

$$\begin{gathered}
-\int_{-1}^{1}\varphi_1(\xi)\ln\frac{|\xi-x|}{\lambda}d\xi = \pi f_*(x) + \int_{-1}^{1}\varphi_1(\xi)F\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi \qquad (|x|\leqslant 1)\\
f_*(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_0(\xi)\left[F\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)-F(0)\right]d\xi
\end{gathered} \tag{5.9}$$

Заметим, что в силу указанных выше свойств функции $F(t)$ и условия $\varphi(x) \in L(-1,1)$ или с учетом теоремы 4 $\varphi_1(x) \in L(-1, 1)$ вся правая часть интегрального уравнения (5.9), как функция $x \in [-1,1]$, непрерывна со всеми производными. Тогда на основании теоремы 5 можем заключить, что общее решение интегрального уравнения (5.9), если оно существует в $L(-1,1)$, при любом значении $\lambda \in (0, \infty)$ имеет вид

$$\varphi_1(x) = \Omega(x)(1-x^2)^{-1/2} \tag{5.10}$$

где $\Omega(x)$ — непрерывная со всеми производными функция при $x \in [-1,1]$.

Представим теперь функцию $F(t)$ вида (5.3) в форме следующего двойного ряда по полиномам Чебышева:

$$F\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(\lambda)T_i(x)T_j(\xi) \tag{5.11}$$

Функции $f_*(x)$ и $\Omega(x)$, входящие в формулы (5.9) и (5.10), также разложим в ряды

$$f_*(x) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{i*}T_{2i}(x), \qquad \Omega(x) = \sum_{i=0}^{\infty} S_i T_{2i}(x) \tag{5.12}$$

В силу указанных выше свойств функций $F(t)$, $f_*(x)$ и $\Omega(x)$ ряды (5.11) и (5.12) сходятся равномерно соответственно к $F(t)$ по совокупности переменных $(x, \xi) \in [-1,1]$ и любых значениях параметра $\lambda \in (0, \infty)$, к $f_*(x)$ и $\Omega(x)$ при всех значениях в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Воспользовавшись известным свойством ортогональности полиномов Чебышева [2], получим для коэффициентов $c_{ij}(\lambda)$ ряда (5.11) выражение

$$c_{mn}(\lambda) = \frac{1}{\pi^2}\beta_{mn}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}F\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)\frac{T_m(x)T_n(\xi)\,dx\,d\xi}{\sqrt{(1-x^2)(1-\xi^2)}} \tag{5.13}$$

$$(\beta_{00}=1,\ \beta_{m0}=\beta_{0n}=2,\ \beta_{mn}=4)$$

Заметим, что для дальнейшего понадобятся только значения $c_{2m,\,2n}(\lambda)$, ибо по предположению функции $\varphi(x)$ и $f(x)$, а стало быть и функции $\varphi_1(x)$ и $f_*(x)$ — четные.

Подставив в (5.13) выражение $F(t)$ вида (5.3) и использовав интеграл [2]

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_{2i}(x)\cos ax\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = (-1)^i \pi J_{2i}(a) \qquad (5.14)$$

получим другую формулу для $c_{2m,\,2n}(\lambda)$:

$$c_{00} = \int_0^\infty \frac{[1-L(u)]\,J_0{}^2(u/\lambda) - \cos u}{u}\,du \qquad (5.15)$$

$$c_{2m,\,2n} = \beta_{2m,\,2n}(-1)^{m+n}\int_0^\infty [1-L(u)]\,J_{2m}\left(\frac{u}{\lambda}\right)J_{2n}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\frac{du}{u} \qquad (m+n>0)$$

Перейдем к определению коэффициентов R_{i*}. Используя вторую формулу (5.9) и (5.11), получим (5.16)

$$R_{i*} = \sum_{n=0}^\infty c_{2i,\,2n}(\lambda)\,\Psi_n, \quad \Psi_n = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_0(\xi)\,T_{2n}(\xi)\,d\xi, \quad R_{0*} = \sum_{n=0}^\infty c_{0,\,2n}(\lambda)\Psi_n - F(0)\Psi_0$$

Для вычисления интегралов Ψ_n умножим обе части интегрального уравнения (5.4) почленно на $(1-x^2)^{-1/2}\,T_{2n}(x)\,dx$ и проинтегрируем по x от -1 до 1. Переставив затем интегралы в левой части полученного соотношения и воспользовавшись формулой (2.7) работы [1], найдем

$$\Psi_0 = R_0\,[\ln 2\lambda - F(0)]^{-1}, \qquad \Psi_n = nR_n \qquad (5.17)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,T_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 2R_0 & \text{при } n=0 \\ R_n & \text{при } n>0 \end{cases}$$

Заметим, что числа R_n есть коэффициенты разложения функции $f(x)$ в ряд по полиномам Чебышева вида (5.12).

Получим, наконец, соотношение для определения коэффициентов S_i во второй формуле (5.12). Подставляя в интегральное уравнение (5.9) функции $\varphi_1(\xi)$, $f_*(x)$ и $F(t)$ в виде (5.10)—(5.12) и вычисляя интегралы (необходимо воспользоваться формулой (2.7) работы [1] и известным свойством ортогональности полиномов Чебышева), получим соотношение, в левой и правой частях которого стоят ряды по полиномам Чебышева. Приравнивая коэффициенты обеих частей при полиномах одинакового номера, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений вида (3.1) для определения S_i, где

$$x_0 = S_0\ln 2\lambda, \qquad x_i = S_i(2i)^{-1}, \qquad a_{i0} = c_{2i,\,0}(\ln 2\lambda)^{-1}, \qquad a_{ik} = kc_{2i,\,2k} \qquad (5.18)$$

При больших значениях параметра λ для коэффициентов бесконечной системы a_{ik} аналогично тому, как это сделано в § 3, может быть получено асимптотическое представление вида (3.3). Если в нем еще положить, что i и k велики, то будем иметь

$$a_{ik} = O\left(\frac{p^{2p+1/2}}{(2\lambda\nu)^{2p}\,i^{2i+1/2}k^{2k-1/2}}\right) \qquad (p = i+k) \qquad (5.19)$$

Также по аналогии с изложенным в § 3 можно асимптотически при малых λ получить $a_{ik} = 0$ $(i \neq k)$, $a_{ii} = 1$.

Теперь относительно бесконечной системы (3.1), (5.18) можно сделать те же выводы, что и в § 3. Именно, при всех $\lambda > \nu^{-1}$ система будет квази вполне регулярна. Свободные члены ее R_{i*} ограничены сверху и при $i \to \infty$ стремятся к нулю в силу равномерной сходимости первого ряда (5.12). При малых значениях параметра λ бесконечная система становится неустойчивой.

Для нахождения приближенных решений бесконечной системы (3.1), (5.18) удобно воспользоваться методом редукции. Урезанная система имеет вид (3.11), коэффициенты ее, как легко заметить, образуют почти треугольную матрицу, что значительно облегчает получение конкретных результатов.

При уменьшении параметра λ сходимость ряда (5.11) на линии $\xi = x$ ухудшается и для сохранения заданной точности приближенного решения количество уравнений $n+1$ в урезанной системе нужно увеличивать. Следовательно, хорошую сходимость изложенного в этом параграфе метода приближенного решения интегрального уравнения (5.1) следует ожидать только при больших и промежуточных значениях параметра λ.

Следуя § 3, вкратце остановимся на других методах приближенного решения интегрального уравнения (5.5).

При больших значениях параметра λ может быть получено асимптотическое решение, определяемое формулами (2.9) и (2.10) работы [14]. Как правило, его можно использовать при $2 \leqslant \lambda < \infty$.

Для построения асимптотики решения интегрального уравнения (5.1) при малых λ представим его в виде системы трех эквивалентных ему интегральных уравнений[1]

$$\int_{-1}^{\infty} \beta\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right) M\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x) + \int_{-\infty}^{-1} \left[\beta\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right) - v(\xi)\right] M\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \qquad (-1 \leqslant x < \infty)$$

$$\int_{-\infty}^{1} \beta\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right) M\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x) + \int_{1}^{\infty} \left[\beta\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right) - v(\xi)\right] M\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \qquad (-\infty < x \leqslant 1) \tag{5.20}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) M\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

при условии

$$\varphi(\xi) = \beta\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right) + \beta\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right) - v(\xi) \tag{5.21}$$

причем функция $f(x)$ с сохранением достаточной гладкости произвольным образом продолжена в области $-\infty < x \leqslant -1$ и $1 \leqslant x < \infty$.

Решение последнего интегрального уравнения (5.20) может быть легко получено применением теоремы о свертках для преобразования Фурье.

Первые два интегральных уравнения (5.20) заменами переменных приводятся к одному

$$\int_{0}^{\infty} \beta(\tau) M(\tau - t)\, d\tau = \frac{\pi}{\lambda} f(1 - \lambda t) +$$

$$+ \int_{2/\lambda}^{\infty} [\beta(\tau) - v(1 - \lambda\tau)]\, M\left(\frac{2}{\lambda} - \tau - t\right) d\tau \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{5.22}$$

Асимптотическое при малых λ решение интегрального уравнения (5.22) может быть найдено методом последовательных приближений. При этом на каждом этапе необходимо находить решение одного и того же интегрального уравнения Винера — Хопфа, но с различными правыми частями.

---

[1] В работах [10,15] изложен другой подход к построению асимптотики интегрального уравнения (5.1) при малых λ в предположении, что функция $L(u)$, входящая в ядро $M(t)$, мероморфная.

Нулевое приближение, соответствующее нулевому члену асимптотики решения интегрального уравнения (5.1) при малых λ, находится из уравнения

$$\int_0^\infty \beta_0(\tau) M(\tau - t)\, d\tau = \frac{\pi}{\lambda} f(1 - \lambda t) \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{5.23}$$

Рассмотрение конкретных задач показывает [16, 17], что, как правило, нулевой член асимптотики решения при малых λ надежно смыкается с асимптотическим решением при больших λ [14], обеспечивая полное решение задачи.

В тех случаях, когда смыкание с заданной точностью не удается достигнуть, можно использовать приближенное решение при малых λ, построенное по формуле (5.21) на базе первого (или более высокого) приближения решения уравнения (5.22).

Имеется и другая возможность, на наш взгляд даже более удобная, использовать изложенный в данном параграфе метод приближенного решения интегрального уравнения (5.1) в качестве «соединительного моста» между асимптотическим решением для больших λ и нулевым членом асимптотики при малых λ.

Поступила 1 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. О приближенном решении одного класса интегральных уравнений. Изв. АН Арм ССР, Сер. физ.-матем. н., 1964, т. 17, № 2.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
3. Попов Г. Я. Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1. М., Физматгиз, 1958.
5. Александров В. М., Ворович И. И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
6. Александров В. М. Некоторые контактные задачи для упругого слоя. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
7. Александров В. М., Ворович И. И. Контактные задачи для упругого слоя малой толщины. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
8. Александров В. М., Бабешко В. А., Кучеров В. А. Контактные задачи для упругого слоя малой толщины. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
9. Александров В. М. К решению одного типа двумерных интегральных уравнений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
10. Бабешко В. А. Об одном асимптотическом методе при решении интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
11. Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
12. Александров В. М. Об одной контактной задаче для упругого клина. Изв. АН АрмССР, Механика, 1967, т. 20, № 1.
13. Ростовцев Н. А. К решению плоской контактной задачи. ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.
14. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
15. Бабешко В. А. Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
16. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
17. Александров В. М., Бабешко В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.