то преобразование (10) имеет неподвижную точку

$$P_0\,(x_0,\, y_0{}^0 + \mu y_1)$$

стремящуюся к точке $P\,(x_0,\, y_0{}^0)$ при $\mu \to 0$. Эта неподвижная точка устойчива, если $F'\,(y_0{}^0) < 0$, и неустойчива, если $F'\,(y_0{}^0) > 0$.

Полученные условия существования и устойчивости периодических решений системы (1) аналогичны соответствующим условиям, приведенным в работе [1], для систем, близких к гамильтоновым.

Если функции $\psi\,(x)$ и $f\,(x,\, y)$ — периодические по x с периодом 2π, то фазовое пространство системы (1) будет цилиндрическим с отождествленными прямыми $x = x_0$ и $x = x_0 + 2\pi$. Теоремы 1 и 2 будут давать в этом случае необходимые и достаточные условия существования неподвижной точки, соответствующей периодическому решению, охватывающему фазовый цилиндр. Кривая $L\,(y_0{}^0)$ будет в этом случае замкнутой интегральной кривой системы (1) при $\mu = 0$, проходящей через точку $(x_0,\, y_0)$ и охватывающей фазовый цилиндр.

В заключение автор приносит благодарность Н. Н. Баутину за ценные советы.

Поступила 2 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., О динамических системах, близких к гамильтоновым. ЖЭТФ, 1934, т. 2, вып. 3,

---

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА ГАМИЛЬТОНА — ОСТРОГРАДСКОГО В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

М. В. Миронов

(Ленинград)

Для приближенного отыскания установившихся полигармонических колебаний в нелинейных системах непосредственно применяется принцип Гамильтона — Остроградского [1]. Вводятся величины: среднее значение лагранжиана и среднее значение некоторой функции W, которая определяется неконсервативными силами. Названные функции вычисляются на основе решения, вид которого устанавливается из некоторых дополнительных соображений. Конечным результатом являются уравнения, которые компактно записаны через указанные средние величины и служат для определения неизвестных параметров решения. В качестве примера рассматривается взаимное влияние гармоник в системе с кулоновым трением.

1. Приближенное исследование колебаний в нелинейных системах обычно связано с заданием решения в определенной форме, которая выбирается из некоторых априорных соображений, основанных на экспериментальном или теоретическом исследовании аналогичных систем. Так, имеются данные [2–4], говорящие о том, что при воздействии на нелинейную диссипативную систему внешней силы, выражаемой некоторой тригонометрической суммой, движение системы происходит, как правило, по закону, в котором явно преобладают гармоники, содержащиеся в вынуждающей силе. Сказанное служит основанием для того, чтобы в первом приближении искать колебания такой системы в виде суммы только тех гармоник, которые входят во внешнюю силу. Если вид решения выбран, остается определить входящие туда неизвестные параметры, что

[1] Использование принципа Гамильтона — Остроградского для приближенного определения частот в нелинейных консервативных системах рассмотрено в работе [1].

само по себе часто является проблемой. Существуют различные методы получения нужных для этого уравнений. В качестве примера укажем на методы гармонического баланса и Галеркина для исследования периодических колебаний и на методы линеаризации по критерию минимума среднеквадратичного отклонения и линеаризации по функции распределения, пригодные также и для непериодических колебаний [5]. С той же целью можно непосредственно использовать принцип Гамильтона — Остроградского, что дает в некоторых случаях существенные преимущества.

Пусть, например, имеется система с n степенями свободы, движение которой можно хотя бы приближенно представить в виде

$$q_j(t) = \sum_{i=1}^{r} (A_{ij}' \sin \omega_i t + A_{ij}'' \cos \omega_i t) \tag{1.1}$$

Кроме того, считаем найденным лагранжиан L этой системы и вычисленной элементарную работу $\delta' W$ неконсервативных обобщенных сил $Q_j(q_\nu, q_\nu^{\cdot}, t)$ на возможных перемещениях δq_j:

$$L(q_\nu, q_\nu^{\cdot}) = T - \Pi, \qquad \delta' W = Q_1 \delta q_1 + \ldots + Q_n \delta q_n$$

Для рассматриваемой системы выразим принцип Гамильтона — Остроградского в форме, не накладывающей обычных ограничений на вариации обобщенных координат в начальный и конечный моменты времени

$$\int_0^\tau (\delta L + \delta' W)\, dt = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}} \delta q_j \Big|_{t=0}^{t=\tau} \tag{1.2}$$

Частоты в (1.1) всегда можно считать фиксированными (это относится и к свободным колебаниям). Поэтому, варьируя только амплитуды, получим

$$\delta q_j = \sum_{i=1}^{r} (\delta A_{ij}' \sin \omega_i t + \delta A_{ij}' \cos \omega_i t) \tag{1.3}$$

$$\delta L = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial L}{\partial A_{ij}'} \delta A_{ij}' + \frac{\partial L}{\partial A_{ij}''} \partial A_{ij}'' \right) \tag{1.4}$$

Подставив (1.3) и (1.4) в (1.2) и разделив все на τ, придем к уравнению

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \left[\left(\frac{\partial \langle L \rangle_\tau}{\partial A_{ij}'} + \langle Q_j \sin \omega_i t \rangle_\tau \right) \delta A_{ij}' + \left(\frac{\partial \langle L \rangle_\tau}{\partial A_{ij}''} \right) + \right.$$
$$\left. + \langle Q_j \cos \omega_i t \rangle_\tau)\, \delta A_{ij}'' \right] = \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}} \delta q_j \Big|_{t=0}^{t=\tau} \tag{1.5}$$

$$\langle R(t) \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau R(T)\, dt \tag{1.6}$$

Предположим, что существует функция $W(t)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\partial W / \partial q_j^{\cdot} = - Q_j(q_\nu, q_\nu^{\cdot}, t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.7}$$

В таком случае вычисление средних за время τ значений от функций $Q_j \sin \omega_i t$ и $Q_j \cos \omega_i t$ можно свести к усреднению только одной функции $W(t)$. В самом деле, положив

$$q_j^{\cdot}(t) = \sum_{i=1}^{r} (V_{ij}' \cos \omega_i t - V_{ij}'' \sin \omega_i t) \qquad (V_{ij}'(A_{ij}') = \omega_i A_{ij}', \ V_{ij}''(A_{ij}'') = \omega_i A_{ij}'') \tag{1.8}$$

найдем

$$\frac{\partial \langle W\rangle_\tau}{\partial V_{ij}'} = \left\langle \frac{\partial W}{\partial q_j^{\cdot}} \frac{\partial q_j^{\cdot}}{\partial V_{ij}'} \right\rangle_\tau = -\langle Q_j \cos \omega_i t\rangle_\tau \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \langle W\rangle_\tau}{\partial V_{ij}''} = \left\langle \frac{\partial W}{\partial q_j^{\cdot}} \frac{\partial q_j^{\cdot}}{\partial V_{ij}''} \right\rangle_\tau = \langle Q_j \sin \omega_i t\rangle_\tau \tag{1.10}$$

Полученные соотношения позволяют переписать уравнение (1.5) в виде (1.11)

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \left[\left(\frac{\partial \langle L\rangle_\tau}{\partial A_{ij}'} + \frac{\partial \langle W\rangle_\tau}{\partial V_{ij}''} \right) \delta A_{ij}' + \left(\frac{\partial \langle L\rangle_\tau}{\partial A_{ij}''} - \frac{\partial \langle W\rangle_\tau}{\partial V_{ij}'} \right) \delta A_{ij}'' \right] = \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}} \delta q_j \Big|_{t=0}^{t=\tau}$$

Учитывая (1.4) и (1.8), нетрудно показать, что $L(q_\nu^{\cdot}, q_\nu)$ и $W(q_\nu, q_\nu^{\cdot}, t)$ можно представить в виде функций

$$R(x_1, \ldots, x_l) = R(k_1 t, \ldots, k_l t) \tag{1.12}$$

периодических с периодом 2π по переменным $x_\nu = k_\nu t$ ($\nu = 1, \ldots l$), обладающим действительными линейно независимыми[1] коэффициентами $k_1, \ldots, k_l$. Предположим, что полученные таким путем из L и W функции есть интегрируемые по Риману функции переменных $x_1, \ldots, x_l$. Тогда согласно теории равномерного распределения [6], для них имеет смысл среднее за бесконечный промежуток времени значение и оно может быть вычислено при помощи следующего соотношения:

$$\langle R(t)\rangle = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau R(k_1 t, \ldots, k_l t)\, dt = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} R(x_1, \ldots, x_l)\, dx_1, \ldots, dx_l \tag{1.13}$$

Проделаем теперь в равенстве (1.11) предельный переход при $\tau \to \infty$. Согласно сделанным выше предположениям, в левой части получим выражение, содержащее средние значения L и W, а правая часть в виду ограниченности обобщенных импульсов $\partial L / \partial q_j^{\cdot}$ и вариаций δq_j обратится в нуль. Следовательно, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \left[\left(\frac{\partial \langle L\rangle}{\partial A_{ij}'} + \frac{\partial \langle W\rangle}{\partial V_{ij}''} \right) \delta A_{ij}' + \left(\frac{\partial \langle L\rangle}{\partial A_{ij}''} - \frac{\partial \langle W\rangle}{\partial V_{ij}'} \right) \delta A_{ij}'' \right] = 0 \tag{1.14}$$

В случае, когда разыскивается периодическое движение, τ удобнее приравнять соответствующему значению периода.

Тогда в (1.11) правая часть в силу периодичности $\partial L / \partial q_j^{\cdot}$ и δq_j опять обратится в нуль и, если для среднего за период значения периодической функции $R(t)$ сохранить обозначение $\langle R\rangle$, вновь придем к уравнению (1.14).

Так как вариации $\delta A_{ij}'$ и $\delta A_{ij}''$ произвольны, то из (1.14) следует система $2nr$ уравнений, необходимых для определения неизвестных параметров решения (1.1)

$$\frac{\partial \langle L\rangle}{\partial A_{ij}'} + \frac{\partial \langle W\rangle}{\partial V_{ij}''} = 0, \qquad \frac{\partial \langle L\rangle}{\partial A_{ij}''} - \frac{\partial \langle W\rangle}{\partial V_{ij}'} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, r \\ j = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Таким образом, составление искомых уравнений фактически свелось к вычислению средних значений только двух функций L и W. Последнее облегчается тем, что, как правило, обе указанные функции имеют вид симметричный относительно $q_1, \ldots, q_n$ и $q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$. Сказанное имеет значение при исследовании полигармонических колебаний в системах, где восстанавливающая сила или сила сопротивления представлены неаналитическими функциями, такими, как $\operatorname{sgn} x$, $x^2 \operatorname{sgn} x$ и т. п.

---

[1] Числа $k_1, \ldots, k_l$ называются линейно независимыми, если равенства $n_1 k_1 + \ldots + n_l k_l = 0$ невозможны ни для одной совокупности целых чисел $(n_1, \ldots, n_l) \neq (0, \ldots, 0)$.

Рассмотрим важный частный случай. Пусть

$$Q_j = f_j(q_\nu^{\cdot}) + H_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.16}$$

Здесь обобщенная сила

$$H_j(t) = \sum_{i=1}^{m} (H_{ij}' \sin \omega_i t + H_{ij}'' \cos \omega_i t) \qquad (m \leqslant r) \tag{1.17}$$

соответствует вынуждающим силам, а $f_j(q_\nu^{\cdot})$ — силам сопротивления. Учитывая (1.16), положим $W = \Phi - N$, где согласно (1.7)

$$N = H_1 q_1^{\cdot} + \ldots + H_n q_n^{\cdot} \tag{1.18}$$

а Φ — диссипативная функция, определяемая равенствами [7]

$$\partial\Phi / \partial q_j^{\cdot} = -f_j(q_\nu^{\cdot}) \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.19}$$

Усредняя W, найдем, что $\langle W\rangle = \langle\Phi\rangle - \langle N\rangle$, где согласно (1.8) и (1.17)

$$\langle N\rangle = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (H_{ij}''V_{ij}' - H_{ij}'V_{ij}'') \tag{1.20}$$

Подставив $\langle W\rangle$ в систему (1.15), придем к уравнениям ($H_{ij}' = H_{ij}'' = 0$ при $i > m$)

$$\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial A_{ij}'} + \frac{\partial\langle\Phi\rangle}{\partial V_{ij}''} = -\frac{H_{ij}'}{2}, \qquad \frac{\partial\langle L\rangle}{\partial A_{ij}''} - \frac{\partial\langle\Phi\rangle}{\partial V_{ij}'} = -\frac{H_{ij}''}{2} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, r \\ j = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

В ряде случаев удобнее искать решение в виде

$$q_j = \sum_{i=1}^{r} A_{ij} \sin(\omega_i t - \varphi_{ij}), \qquad q_j^{\cdot} = \sum_{i=1}^{r} V_{ij} \cos(\omega_i t - \varphi_{ij}) \; (V_{ij}(A_{ij}) = \omega_i A_{ij}) \tag{1.22}$$

Преобразовав к аналогичному виду вынуждающую силу (1.17)

$$H_j(t) = \sum_{i=1}^{m} H_{ij} \sin(\omega_i t - \psi_{ij})$$

при помощи несложных выкладок от системы (1.21) приходим к уравнениям

$$\begin{gathered} -\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial A_{ij}} + \frac{1}{V_{ij}}\frac{\partial\langle\Phi\rangle}{\partial\varphi_{ij}} = \frac{1}{2} H_{ij}\cos(\varphi_{ij} - \psi_{ij}) \\ \frac{1}{A_{ij}}\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial\varphi_{ij}} + \frac{\partial\langle\Phi\rangle}{\partial V_{ij}} = \frac{1}{2} H_{ij}\sin(\varphi_{ij} - \psi_{ij}) \qquad (i = 1, \ldots, r, \; j = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{1.23}$$

2. Рассмотрим колебания некоторой линейной упругой системы с n степенями свободы, к точке C которой, перемещающейся по оси x, приложена вынуждающая периодическая сила, проекция которой на ось x

$$H(t) = \sum_{i=1}^{m} H_i \sin(ikt - \psi_i), \qquad H_i \geqslant 0 \tag{2.1}$$

Для ограничения амплитуд колебаний присоединим в той же точке демпфер, развивающий силу сопротивления

$$f(x^{\cdot}) = -\beta_0 \operatorname{sgn} x^{\cdot} - \beta_1 x^{\cdot} \tag{2.2}$$

Здесь β_0 — величина кулонова трения, β_1 — коэффициент вязкого трения.

Предположим, что среди собственных частот Ω_j системы имеются две резонансные, а именно, $\Omega_1 = n_1 k$ и $\Omega_2 = n_2 k$ (n_1 и n_2 — целые числа, меньше m) и попытаемся выяснить характер взаимодействия соответствующих резонансных колебаний [1].

Пусть q_j — главные координаты, соответствующие собственным частотам Ω_j. Решение задачи будем искать в виде

$$q_j = A_j \sin(n_j kt - \varphi_j) \quad (j = 1, 2), \qquad q_j = 0 \quad (j = 3, \ldots, n) \tag{2.3}$$

что соответствует перемещению точки C по закону

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(C) q_j = \sum_{j=1}^{2} a_j \sin(n_j kt - \varphi_j), \qquad a_j = \alpha_j(C) A_j \tag{2.4}$$

Здесь $\alpha_j(C)$ — значение коэффициентов формы собственных колебаний системы в точке C. При этом предполагается, во-первых, что амплитуды вынужденных колебаний с частотами, отличными от $n_1 k$ и $n_2 k$, пренебрежимо малы, во-вторых, что формы резонансных колебаний достаточно близки к формам собственных колебаний соответствующих частот и, следовательно, решение (2.3) удовлетворяет уравнениям свободных колебаний ($\Phi = \text{const}$)

$$\partial\langle L\rangle / \partial A_j = 0, \qquad \partial\langle L\rangle / \partial\varphi_j = 0 \qquad (j = 1,2) \tag{2.5}$$

Вычисляя элементарную работу неконсервативных сил на возможных перемещениях, для обобщенных сил получим выражения

$$Q_j = f_j(q_\nu^{\cdot}) + H_j(t) \qquad (f_j(q_\nu^{\cdot}) = \alpha_j(C) f(x^{\cdot}),\ H_j(t) = \alpha_j(C) H)(t)$$

Пользуясь результатами, изложенными в конце п.1 и учитывая (2.5), будем иметь

$$\frac{1}{V_j}\frac{\partial\langle\Phi\rangle}{\partial\varphi_j} = \frac{1}{2} H_j \cos(\varphi_j - \psi_j), \qquad \frac{\partial\langle\Phi\rangle}{\partial V_j} = \frac{1}{2} H_j \sin(\varphi_j - \psi_j) \qquad (j = 1, 2) \tag{2.6}$$

$$V = n_j k a_j, \qquad \langle\Phi\rangle = \beta_0 \langle | x^{\cdot} | \rangle + {}^1/_4 \beta_1 (V_1^2 + V_2^2) \tag{2.7}$$

$$(H_{nj} = H_j,\ \psi_{nj} = \psi_j)$$

Здесь $\langle\Phi\rangle$ — среднее значение диссипативной функции

$$\Phi = \beta_0 | x^{\cdot} | + {}^1/_2 \beta_1 x^{\cdot 2} \qquad (x^{\cdot} = V_1 \cos(n_1 kt - \varphi_1) + V_2 \cos(n_2 kt - \varphi_2)) \tag{2.8}$$

Для величины $\langle\Phi_0\rangle = \beta_0 \langle | x^{\cdot} | \rangle$ не существует единого аналитического выражения, не зависящего от соотношения величин V_1 и V_2, n_1 и n_2 в (2.8).

Рассмотрим следующий частный случай. Положим $V_1 / V_2 = \gamma$, $V_2 \geqslant 0$. Пусть

$$| \gamma | \leqslant 1, \qquad n_1 < n_2 \tag{2.9}$$

При выполнении неравенств (2.9) для $\langle\Phi_0\rangle$ можно получить разложения в ряд по степеням γ, вид которых, вообще говоря, зависит от соотношения частот и фаз в (2.8).

К этим рядам приводят весьма трудоемкие выкладки. Один из возможных путей состоит в следующем. Запишем $\langle\Phi_0\rangle$ в виде

$$\langle\Phi_0\rangle = \beta_0 V_2 \langle | \gamma \cos(n_1 kt - \varphi_1) + \cos(n_2 kt - \varphi_2) | \rangle$$

Представив абсолютную величину биномиальным разложением

$$| B | = [1 - (1 - B^2)]^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_{1/2}^n (1 - B^2)^n$$

и усредняя его почленно, после преобразований приходим к искомым рядам.

---

[1] Влияние высокочастотных возмущений на резонансные колебания системы с кулоновым трением исследовано в работе [8].

Первые члены полученных таким путем рядов, сходящихся вместе со своими первыми производными при $|\gamma| \leqslant 1$, таковы:

(1) При $n_2 = 2n_1$

$$\langle\Phi_{02}\rangle = 2\pi^{-1}\beta_0 V_2\ [1 + {}^1/_4\gamma^2 + {}^1/_{64}\gamma^4 (1 + \cos(\varphi_2 - 2\varphi_1)) + \ldots] \tag{2.10}$$

(2) При $n_2 = 3n_1$

$$\langle\Phi_{03}\rangle = 2\pi^{-1}\beta_0 V_2\ [1 + {}^1/_4\gamma^2 - {}^1/_{24}\gamma^3 \cos(\varphi_2 - 3\varphi_1) + {}^1/_{64}\gamma^4 - \ldots] \tag{2.11}$$

(3) При $n_2 / n_1 = q / p$ (Здесь p и q — взаимно простые числа, причем если $p = 1$, $q \geqslant 4$, а если $q > p \geqslant 2$, $q \geqslant 3$)

$$\langle\Phi_0\rangle = 2\pi^{-1}\beta_0 V_2\ [1 + {}^1/_4\gamma^2 + {}^1/_{64}\gamma^4 + \ldots] \tag{2.12}$$

В последнем случае $\langle\Phi_0\rangle$ также зависит от сдвига фаз (коэффициенты, содержащие фазы, соответствуют степеням γ, большим четырех), однако эта зависимость весьма слаба и ею можно пренебречь.

Остановимся подробнее на случае (2). Подставляя (2.11) в систему (2.6) и отбрасывая некоторые несущественные величины, получим, полагая $\varphi_2 - 3\varphi_1 = \delta$:

$$\begin{gathered} -{}^1/_2\beta_0\pi^{-1}\gamma^2 \sin\delta = H_1 \cos(\varphi_1 - \psi_1) \\ \beta_1 V_1 + 2\beta_0\pi^{-1} V_1 V_2^{-1} (1 - {}^1/_4\gamma \cos\delta) = H_1 \sin(\varphi_1 - \psi_1) \\ {}^1/_6\beta_0\pi^{-1}\gamma^3 \sin\delta = H_2 \cos(\varphi_2 - \psi_2) \\ \beta_2 V_2 + 4\beta_0\pi^{-1} (1 - {}^1/_4\gamma^2 + {}^1/_{12}\gamma^3 \cos\delta) = H_2 \sin(\varphi_2 - \psi_2) \end{gathered} \tag{2.13}$$

Соответственно из первого и второго, третьего и четвертого уравнений системы (2.13) находим

$$|\operatorname{tg}(\varphi_1 - \psi_1)| = \left| \frac{2\pi\beta_1 V_2}{\beta_0\gamma \sin\delta} + \frac{4(1 - {}^1/_4\gamma\cos\delta)}{\gamma\sin\delta} \right| > 4, \quad \text{или} \quad \sin(\varphi_1 - \psi_1) > 0.97$$

$$|\operatorname{tg}(\varphi_2 - \psi_2)| = \left| \frac{6\pi\beta_1 V_2}{\beta_0\gamma^3 \sin\delta} + \frac{24(1 - {}^1/_4\gamma^2 + {}^1/_{12}\gamma^3\cos\delta)}{\gamma^3\sin\delta} \right| > 18, \quad \text{или} \quad \sin(\varphi_2 - \psi_2) > 0.99$$

Округляя эти значения синусов до единицы, из второго и четвертого уравнений той же системы получаем

$$V_1 = \frac{H_1}{\beta_1}\left[1 + \frac{2\beta_0}{\pi\beta_1 V_2}\left(1 - \frac{\gamma}{4}\cos\delta\right)\right]^{-1} \qquad V_2 = \frac{H_2}{\beta_1}\left[1 - \frac{4\beta_0}{\pi H_2}\left(1 - \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\gamma^3}{12}\cos\delta\right)\right] \tag{2.14}$$

Уравнения (2.14) удобны для процесса последовательных приближений. На втором шаге этого процесса приходим к приближенным формулам для резонансных амплитуд

$$a_1 = \frac{H_1(1 - b_2)}{\beta_1 n_1 k}\left[1 - \frac{b_2}{2} - \frac{b_2 H_1 \cos\delta}{4H_2(2 - b_2)}\right]^{-1} \tag{2.15}$$

$$a_2 = \frac{H_2}{\beta_1 n_2 k}\left[1 - b_2 + \frac{b_2 H_1^2}{H_2^2(2 - b_2)^2} - \frac{2b_2 H_1^3 \cos\delta}{3H_2^3(2 - b_2)^3}\right] \qquad \left(0 < b_2 = \frac{4\beta_0}{\pi H_2} < 1\right)$$

Из равенств (2.15) видно, что резонансные амплитуды могут значительно зависеть от сдвига фаз δ. Например, при $b_2 \approx 1$, $H_2 \approx H_1 + 0.6\,\beta_0$ отклонение от среднего значения может достигать: для $a_1 \sim 25\%$, для $a_2 \sim 30\%$.

Для более общего соотношения частот $n_1 < n_2$, положив $\gamma < 0{,}5$, согласно (2.10)—(2.12), с достаточной точностью получаем

$$\langle\Phi_0\rangle = 2\pi^{-1}\beta_0 V_2 (1 + {}^1/_4\gamma^{-2})$$

Теперь из уравнений (2.6) находим

$$\cos(\varphi_j - \psi_j) = 0, \qquad \text{или} \quad \varphi_j - \psi_j = {}^1/_2\pi \qquad (j = 1,2)$$
$$\beta_1 V_1 + 2\beta_0 V_1 / \pi V_2 = H_1, \qquad \beta_1 V_2 + 4\beta_0 \pi^{-1}(1 - {}^1/_4\gamma^2) = H_2 \qquad (2.16)$$

Отсюда следуют приближенные формулы для резонансных амплитуд

$$a_1 = \frac{H_1(1-b_2)}{\beta_1 n_1 k(1 - b_2/2)}, \qquad a_2 = \frac{H_2}{\beta_1 n_2 k}\left[1 - b_2 + \frac{b_2 H_1^2}{H_2^2(2-b_2)^2}\right] \qquad (2.17)$$

а также условие, при котором $|\gamma| \leqslant 0.5$:

$$H_2 \geqslant 2H_1 + 0.56\,\beta_0 \qquad (2.18)$$

Чтобы оценить взаимное влияние гармоник, нужно найти амплитуды резонансных колебаний a_{j0}, возникающих в рассматриваемой системе при раздельном действии на нее сил $H_j \sin(n_j kt - \psi_j)$.

Если искать решение в виде

$$x_{j0}(t) = a_{j0}\sin(n_j kt - \varphi_j)$$

то, как легко показать, в этом случае

$$a_{j0} = \frac{H_j(1-b_j)}{\beta_1 n_j k}, \quad b_j = \frac{4\beta_0}{\pi H_j} \leqslant 1; \qquad a_{j0} = 0, \quad b_j > 1$$

Сравнивая величины a_j и a_{j0} и учитывая, что в силу (2.18) $b_1 > b_2$, получим $b_1 < 1$):

$$\frac{a_1}{a_{10}} = \frac{1-b_2}{(1-b_2/2)(1-b_1)} > 1, \qquad \frac{a_2}{a_{20}} = 1 + \frac{b_2 H_1^2}{H_2^2(1-b_2)(2-b_2)^2} \geqslant 1 \qquad (2.19)$$

Таким образом, взаимное влияние гармоник при наличии сухого трения приводит к увеличению обеих резонансных амплитуд; причем особенно велико может быть изменение амплитуды более «медленной» гармоники (гармоники с меньшей амплитудой скорости), что видно из выражения (2.19).

Отметим еще один факт. Из формул (2.17) видно, что резонансная амплитуда a_1 является линейной функцией амплитуды силы H_1. Поскольку это характерно только для систем с вязким (линейным) трением, то имеет место линеаризация кулонова трения, производимая гармоникой с большей амплитудой скорости и большей частотой для более «медленной» гармоники. Следует подчеркнуть, что здесь «большая частота» не означает «много большая» (ср. [8]). Достаточно, например, если отношение частот будет равно числам $^6/_5$, $^3/_2$, 2, 3 и т. д. Больше того, как можно показать, линеаризующая гармоника вовсе не должна иметь большую частоту, необходимо лишь, чтобы амплитуда ее скорости была достаточно велика по сравнению с амплитудой скорости другой гармоники.

Поступила 27 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Blatt J. M., Lyness J. M. The practical use of variation principles in nonlinear mechanics. J. Austral. Math. Soc., 1962, vol. 2, No. 3, pp. 357—368. Рус. пер.: «Механика», Сб. пер. иностр. статей, 1964, № 5.
2. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
3. Чекмарев А. И. Взаимное влияние гармоник в нелинейных системах. Динамика и прочность коленчатых валов. Сб. 2, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1950.
4. Казакевич М. И. К вопросу о бигармоническом возмущении нелинейных систем. Тр. Днепропетр. ин-та ж.-д. транспорта, 1964, вып. 53.
5. Коловский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем. М., «Наука», 1966.
6. Левитан Б. М. Почти периодические функции. М., Гостехиздат, 1953.
7. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
8. Коловский М. З. О влиянии высокочастотных возмущений на резонансные колебания в нелинейной системе. Тр. Ленинград. политехн. ин-та им. М. И. Калинина, 1963, № 226.