О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА, БЛИЗКИХ К КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКИМ

Н. Н. Серебрякова

(Горький)

Для одного частного вида динамических систем второго порядка, близких к кусочно-аналитическим, получены необходимые и достаточные условия существования и устойчивости периодических движений различных возможных типов.

Рассмотрим систему

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -\psi(x) + \mu f(x, y) \tag{1}$$

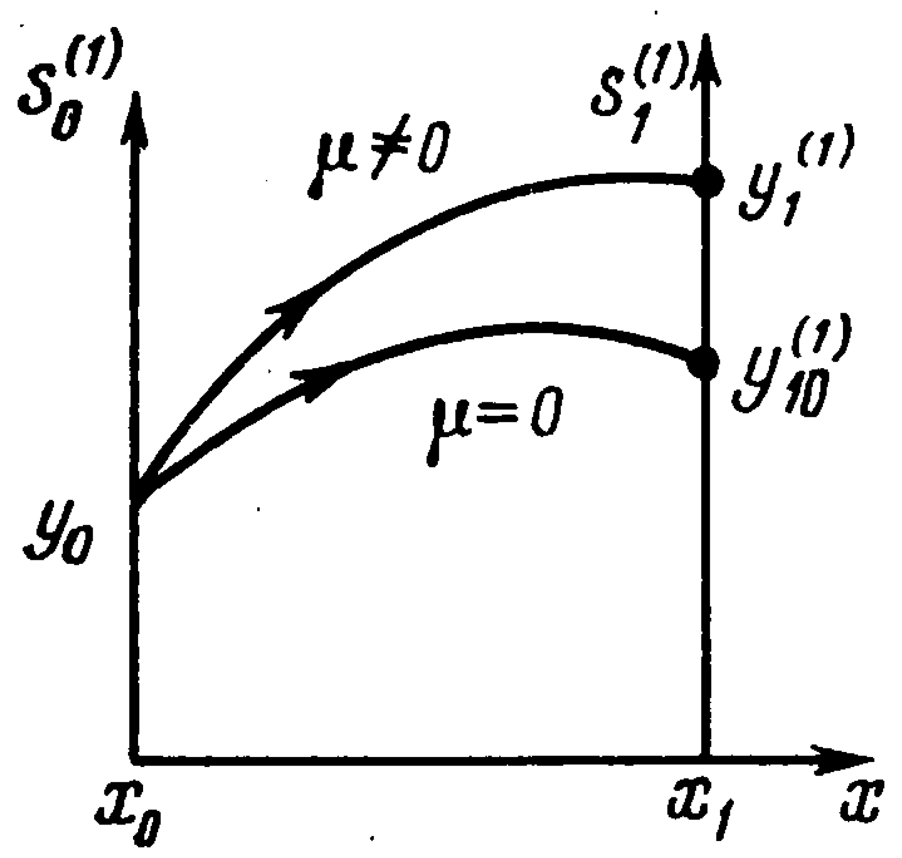
Пусть

$$\psi(x) = \psi_i(x) \quad \text{при } x_{i-1} < x < x_i \qquad f(x, y) = f_i^{(1)}(x, y) \quad \text{при } x_{i-1} < x < x_i, \ y > 0$$

$$f(x, y) = f_i^{(2)}(x, y) \quad \text{при } x_{i-1} < x < x_i, \ y < 0 \qquad (i = \ldots -1, 0, 1, \ldots)$$

Здесь $\psi_i(x)$ и $f_i^{(j)}(x, y)$ $(j = 1, 2)$ — аналитические функции, а μ — малый положительный параметр. Предположим, что система (1) имеет в начале координат $(x = 0, y = 0)$ состояние равновесия типа центра или «сшитого центра».

Обозначим через $S_i^{(1)}$ полупрямые $x = x_i$ при $y > 0$, а $S_i^{(2)}$—полупрямые $x = x$ при $y < 0$ и рассмотрим фазовые траектории системы (1) при $\mu = 0$ и при $\mu \neq 0$, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям



$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad \text{при } t = 0 \tag{2}$$

Предполагая, что траектории системы (1) при $\mu = 0$ пересекают полупрямые $S_k^{(j)}$ в точках $P_{k0}^{(j)}$ $(x_k, y_{k0}^{(j)})$, а при $\mu \neq 0$ в точках $P_k^{(j)}(x_k, y_k^{(j)})$, докажем, что

$$y_k^{(j)} = y_{k0}^{(j)} + \frac{\mu}{y_{k0}^{(j)}} \int\limits_{L_k^{(j)}} f(x, y)\, dx + \mu^2(\ldots) \tag{3}$$

Здесь $L_k^{(j)}$ — интегральная кривая системы (1) при $\mu = 0$ от точки $P_0(x_0, y_0)$ до точки $P_{k0}^{(j)}(x_k, y_{k0}^{(j)})$.

Докажем сначала, что формулы (3) имеют место при преобразовании полупрямой $S_0^{(1)}$ в полупрямую $S_1^{(1)}$ (фигура).

Решение системы (1) при $\mu = 0$, удовлетворяющее начальным условиям (2), записывается в виде

$$x = x_1(h_0, t + \varphi_0), \quad y = y_1(h_0, t + \varphi_0) \tag{4}$$

Здесь h_0 и φ_0 — постоянные.

Учитывая, что система (1) имеет при $\mu = 0$ интеграл

$$H_1(x, y) \equiv {}^1/_2 y^2 + \int \psi_1(x)\, dx = h_0 \qquad (x_0 < x < x_1)$$

решение этой системы при $\mu \neq 0$, удовлетворяющее начальным условиям (2), запишем в виде

$$x = x_1[\alpha_0(t), \ t + \beta_0(t)] \equiv \xi_1(t), \qquad y = y_1[\alpha_0(t), \ t + \beta_0(t)] \equiv \eta_1(t) \tag{5}$$

Здесь $\alpha_0(t)$ и $\beta_0(t)$ — решение системы

$$\frac{d\alpha_0}{dt} = \mu f_1^{(1)}[\xi_1(t), \eta_1(t)] \frac{\partial x_1}{\partial t}, \qquad \frac{d\beta_0}{dt} = -\mu f_1^{(1)}[\xi_1(t), \eta_1(t)] \frac{\partial x_1}{\partial h_0} \tag{6}$$

удовлетворяющее начальным условиям $\alpha_0(t) = h_0$, $\beta_0(t) = \varphi_0$ при $t = 0$.

Представляя $\alpha_0(t)$ и $\beta_0(t)$ в виде ряда по степеням μ, получим

$$\alpha_0(t) = h_0 + \mu\alpha_{01}(t) + \mu^2(\ldots), \qquad \beta_0(t) = \varphi_0 + \mu\beta_{01}(t) + \mu^2(\ldots)$$

Здесь

$$\alpha_{01}(t) = \int\limits_0^t f_1^{(1)}[x_1(h_0, t+\varphi_0), y_1(h_0, t+\varphi_0)] \frac{\partial x_1}{\partial t} dt \tag{7}$$

(явное выражение для $\beta_{01}(t)$ в дальнейшем не используется, так как оно исключается из уравнений).

Пусть $t_1^{(1)}$ — наименьший промежуток времени, за который изображающая точка по траектории системы (1) достигнет полупрямой $S_1^{(1)}$ в точке $P_1^{(1)}(x_1, y_1^{(1)})$.

Подставляя $t = t_1^{(1)}$ в (5) и разлагая полученные соотношения в ряд по степеням μ, получим

$$t_1^{(1)} = t_{10}^{(1)} + \mu t_{11}^{(1)} + \mu^2(\ldots)$$

$$x_1 = x_1 + \mu\left[y_{10}^{(1)} t_{11}^{(1)} + \frac{\partial x_1}{\partial h_0}\alpha_{01}(t_{10}^{(1)}) + y_{10}^{(1)}\beta_{01}(t_{10}^{(1)})\right] + \mu^2(\ldots)$$

$$y_1^{(1)} = y_{10}^{(1)} + \mu\left[\frac{\partial y_1}{\partial t} t_{11}^{(1)} + \frac{\partial y_1}{\partial h_0}\alpha_{01}(t_{10}^{(1)}) + \frac{\partial y_1}{\partial t}\beta_{01}(t_{10}^{(1)})\right] + \mu^2(\ldots)$$

Принимая во внимание, что

$$y_{10}^{(1)}\frac{\partial y_1}{\partial h_0} + \psi_1[x_1(h_0, t_{10}^{(1)} + \varphi_0)]\frac{\partial x_1}{\partial h_0} \equiv 1 \tag{8}$$

получим

$$y_1^{(1)} = y_{10}^{(1)} + \frac{\mu}{y_{10}^{(1)}}\int\limits_{L_1^{(1)}} f_1^{(1)}(x, y)\,dx + \mu^2(\ldots) \tag{9}$$

Здесь $L_1^{(1)}$ — кривая (4), проходящая через точки $P_0(x_0, y_0)$ и $P_{10}^{(1)}(x_1, y_{10}^{(1)})$.

Предполагая, что формула (3) имеет место при преобразовании полупрямой $S_0^{(1)}$ в полупрямую $S_{k-1}^{(1)}$, можно показать, что она имеет место и при преобразовании полупрямой $S_0^{(1)}$ в полупрямую $S_k^{(1)}$ в верхней полуплоскости.

При преобразовании полупрямой $S_0^{(1)}$ в $S_k^{(2)}$ (при переходе изображающей точки через прямую $y = 0$, на которой происходит сшивание кусков функции $f(x, y)$) соотношение (3) также сохраняется. Для преобразования полупрямой $S_k^{(2)}$ (в нижней полуплоскости) в исходную полупрямую $S_0^{(1)}$ (в верхней полуплоскости), очевидно, справедливо все, что сказано о преобразовании полупрямой $S_0^{(1)}$ в полупрямую $S_k^{(2)}$.

Предположим, что система (1) при $\mu = 0$ имеет семейство периодических решений $L(y_0)$, зависящее от параметра y_0. Тогда точечное преобразование полупрямой $S_0^{(1)}$ в себя в окрестности замкнутой кривой L имеет вид

$$y_0^{(1)} = y_0 + \frac{\mu}{y_0}\int\limits_L f(x, y)\,dx + \mu^2(\ldots) \equiv y_0 + \mu F(y_0) + \mu^2(\ldots) \tag{10}$$

Здесь $L = L(y_0)$ — замкнутая интегральная кривая, проходящая через точку $P_0(x_0, y_0)$.

Очевидно, имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Для того чтобы преобразование (10) при достаточно малых μ имело неподвижную точку

$$P_0(x_0, y_0^0 + \mu y_1)$$

стремящуюся к точке $P(x_0, y_0^0)$ при $\mu \to 0$, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$F(y_0^0) = 0 \tag{11}$$

Теорема 2. Пусть y_0^0 — решение уравнения (11). Если

$$F'(y_0^0) \neq 0$$

то преобразование (10) имеет неподвижную точку

$$P_0\,(x_0,\, y_0{}^0 + \mu y_1)$$

стремящуюся к точке $P\,(x_0, y_0{}^0)$ при $\mu \to 0$. Эта неподвижная точка устойчива, если $F'\,(y_0{}^0) < 0$, и неустойчива, если $F'\,(y_0{}^0) > 0$.

Полученные условия существования и устойчивости периодических решений системы (1) аналогичны соответствующим условиям, приведенным в работе [1], для систем, близких к гамильтоновым.

Если функции $\psi\,(x)$ и $f\,(x, y)$ — периодические по x с периодом 2π, то фазовое пространство системы (1) будет цилиндрическим с отождествленными прямыми $x = x_0$ и $x = x_0 + 2\pi$. Теоремы 1 и 2 будут давать в этом случае необходимые и достаточные условия существования неподвижной точки, соответствующей периодическому решению, охватывающему фазовый цилиндр. Кривая $L\,(y_0{}^0)$ будет в этом случае замкнутой интегральной кривой системы (1) при $\mu = 0$, проходящей через точку (x_0, y_0) и охватывающей фазовый цилиндр.

В заключение автор приносит благодарность Н. Н. Баутину за ценные советы.

Поступила 2 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., О динамических системах, близких к гамильтоновым. ЖЭТФ, 1934, т. 2, вып. 3,

---

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА ГАМИЛЬТОНА — ОСТРОГРАДСКОГО В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

М. В. Миронов

(Ленинград)

Для приближенного отыскания установившихся полигармонических колебаний в нелинейных системах непосредственно применяется принцип Гамильтона — Остроградского[1]. Вводятся величины: среднее значение лагранжиана и среднее значение некоторой функции W, которая определяется неконсервативными силами. Названные функции вычисляются на основе решения, вид которого устанавливается из некоторых дополнительных соображений. Конечным результатом являются уравнения, которые компактно записаны через указанные средние величины и служат для определения неизвестных параметров решения. В качестве примера рассматривается взаимное влияние гармоник в системе с кулоновым трением.

1. Приближенное исследование колебаний в нелинейных системах обычно связано с заданием решения в определенной форме, которая выбирается из некоторых априорных соображений, основанных на экспериментальном или теоретическом исследовании аналогичных систем. Так, имеются данные [2–4], говорящие о том, что при воздействии на нелинейную диссипативную систему внешней силы, выражаемой некоторой тригонометрической суммой, движение системы происходит, как правило, по закону, в котором явно преобладают гармоники, содержащиеся в вынуждающей силе. Сказанное служит основанием для того, чтобы в первом приближении искать колебания такой системы в виде суммы только тех гармоник, которые входят во внешнюю силу. Если вид решения выбран, остается определить входящие туда неизвестные параметры, что

[1] Использование принципа Гамильтона — Остроградского для приближенного определения частот в нелинейных консервативных системах рассмотрено в работе [1].