ГРАНИЦЫ ЛИБРАЦИЙ ТРЕХОСНОГО СПУТНИКА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

В. В. Белецкий (Москва)

Рассматриваются области возможных и невозможных движений при колебаниях трехосного спутника в гравитационном поле на круговой орбите. Вводится понятие оптимально-устойчивого спутника. Показано, что такой спутник должен иметь отношение моментов инерции 1.75 : 1 : 0.75.

Положение главных центральных осей $x_1x_2x_3$ инерции спутника относительно орбитального трехгранника τ, n, r определим матрицей направляющих косинусов

	x_1	x_2	x_3
τ	α_{11}	α_{12}	α_{13}
n	α_{21}	α_{22}	α_{23}
r	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Орбиту примем круговой. Тогда τ направлено по касательной к орбите в сторону движения, n — по нормали к плоскости орбиты, r — по радиусу-вектору орбиты. Пусть A_1, A_2, A_3 — главные центральные моменты инерции, соответствующие осям x_1, x_2, x_3; ω — угловая скорость движения центра масс спутника по орбите; p_1, p_2, p_3 — компоненты относительной угловой скорости вращения спутника по осям x_1, x_2, x_3. Тогда, как было показано в [1], существует первый интеграл уравнений движения

$$\begin{gathered}{}^1/_2\,(A_1p_1^2 + A_2p_2^2 + A_3p_3^2) + {}^3/_2\,\omega^2\,[(A_1 - A_3)\,\alpha_{31}^2 + (A_2 - A_3)\alpha_{32}^2\,] + \\ + {}^1/_2\,\omega^2\,[(A_2 - A_1)\,\alpha_{21}^2 + (A_2 - A_3)\,\alpha_{23}^2\,] = h_0 \end{gathered} \qquad (1)$$

и положение относительно равновесия

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0, \qquad \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1, \ \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = \alpha_{31} = 0$$

устойчиво в смысле Ляпунова, если

$$A_2 > A_1 > A_3 \qquad (2)$$

т. е. в положении равновесия большая ось эллипсоида инерции направлена по радиусу-вектору, а меньшая — по нормали к плоскости орбиты. При условии (2) при помощи (1) построим области возможного и невозможного движений спутника.

В силу положительной определенности (1) имеют место неравенства

$$3\,[(A_1 - A_3)\,\alpha_{31}^2 + (A_2 - A_3)\,\alpha_{32}^2] \leqslant 2h_0 \,/\, \omega^2 \qquad (3)$$

$$(A_2 - A_1)\,\alpha_{21}^2 + (A_2 - A_3)\,\alpha_{23}^2 \leqslant 2h_0 \,/\, \omega^2 \qquad (4)$$

$$3\,(A_1 - A_3)\,\alpha_{31}^2 + (A_2 - A_1)\,\alpha_{21}^2 \leqslant 2h_0 \,/\, \omega^2 \qquad (5)$$

Рассмотрим, например (3). Так как α_{31}, α_{32}, α_{33} суть направляющие косинусы радиуса-вектора r в системе x_1, x_2, x_3, то неравенство (3) вместе с равенством

$$\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1 \qquad (6)$$

дает области возможного движения радиуса-вектора r на единичной сфере (6), причем в этом случае трехграннику α_{31}, α_{32}, α_{33} соответствует совпадающий с ним трехгранник x_1, x_2, x_3. Так как цилиндрические области (3) высекают в сфере (6) кривые, симметричные меридиану $\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 = 1$, то достаточно рассмотреть проекции областей движения на плоскость α_{31}, α_{32}; вид, размеры и расположение областей (3) на этой плоскости полностью характеризуют вид, размеры и расположение областей (3) на сфере (6). В этой плоской модели точке ($\alpha_{32} = 1, \alpha_{31} = 0$) соответствует расположение r по наименьшей оси эллипсоида инерции x_2; точке ($\alpha_{32} = 0, \alpha_{31} = 1$) расположение r по оси x_1 (средняя ось эллипсоида); наконец, точке ($\alpha_{32} = 0$, $\alpha_{31} = 0$) соответствует расположение r по наибольшей оси x_3 эллипсоида инерции спутника. Превращение неравенства (3) в равенство дает границы областей либрации.

Аналогично (4) вместе с $\alpha_{21}^2 + \alpha_{23}^2 = 1$ описывает области движения нормали n к плоскости орбиты относительно главных центральных осей инерции спутника x_1, x_2, x_3. При этом, точке ($\alpha_{23} = 1$, $\alpha_{21} = 0$) соответствует совпадение n с x_3, точке ($\alpha_{23} = 0$, $\alpha_{21} = 1$) — совпадение n с x_1, точке ($\alpha_{23} = 0$, $\alpha_{21} = 0$) совпадение n с x_2.

Наконец, (5) вместе с $\alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1$ дает области движения средней оси инерции x_1 относительно орбитальной системы τ, n, r. Точке ($\alpha_{21} = 1$, $\alpha_{31} = 0$) соответствует совпадение x_1 с n, точке ($\alpha_{21} = 0, \alpha_{31} = 1$) — совпадение x_1 с r, точке ($\alpha_{21} = 0, \alpha_{31} = 0$) — совпадение x_1 с τ.

Одновременное рассмотрение выписанных соотношений дает достаточно полное представление о границах либраций несимметричного спутника. Эти границы представим в виде эллипсов внутри единичных кругов:

$$\frac{\alpha_{31}^2}{a_r^2} + \frac{\alpha_{32}^2}{b_r^2} = 1, \quad \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 = 1, \quad a_r^2 = a_r'^2 h', \quad b_r^2 = b_r'^2 h' \tag{7}$$

$$a_r'^2 = \frac{\delta}{3(1-\varepsilon)}, \quad b_r'^2 = \frac{\delta}{3(\delta - \varepsilon)}, \quad \delta = \frac{A_2}{A_1}, \quad \varepsilon = \frac{A_3}{A_1}, \quad h' = \frac{2h_0}{A_2\omega^2}$$

$$\frac{\alpha_{21}^2}{a_n^2} + \frac{\alpha_{23}^2}{b_n^2} = 1, \quad \alpha_{21}^2 + \alpha_{23}^2 = 1, \quad a_n^2 = a_n'^2 h', \quad b_n^2 = b_n'^2 h' \tag{8}$$

$$a_n'^2 = \frac{\delta}{\delta - 1}, \quad b_n'^2 = \frac{\delta}{\delta - \varepsilon}$$

$$\frac{\alpha_{31}^2}{a_x^2} + \frac{\alpha_{21}^2}{b_x^2} = 1, \quad \alpha_{31}^2 + \alpha_{21}^2 = 1$$

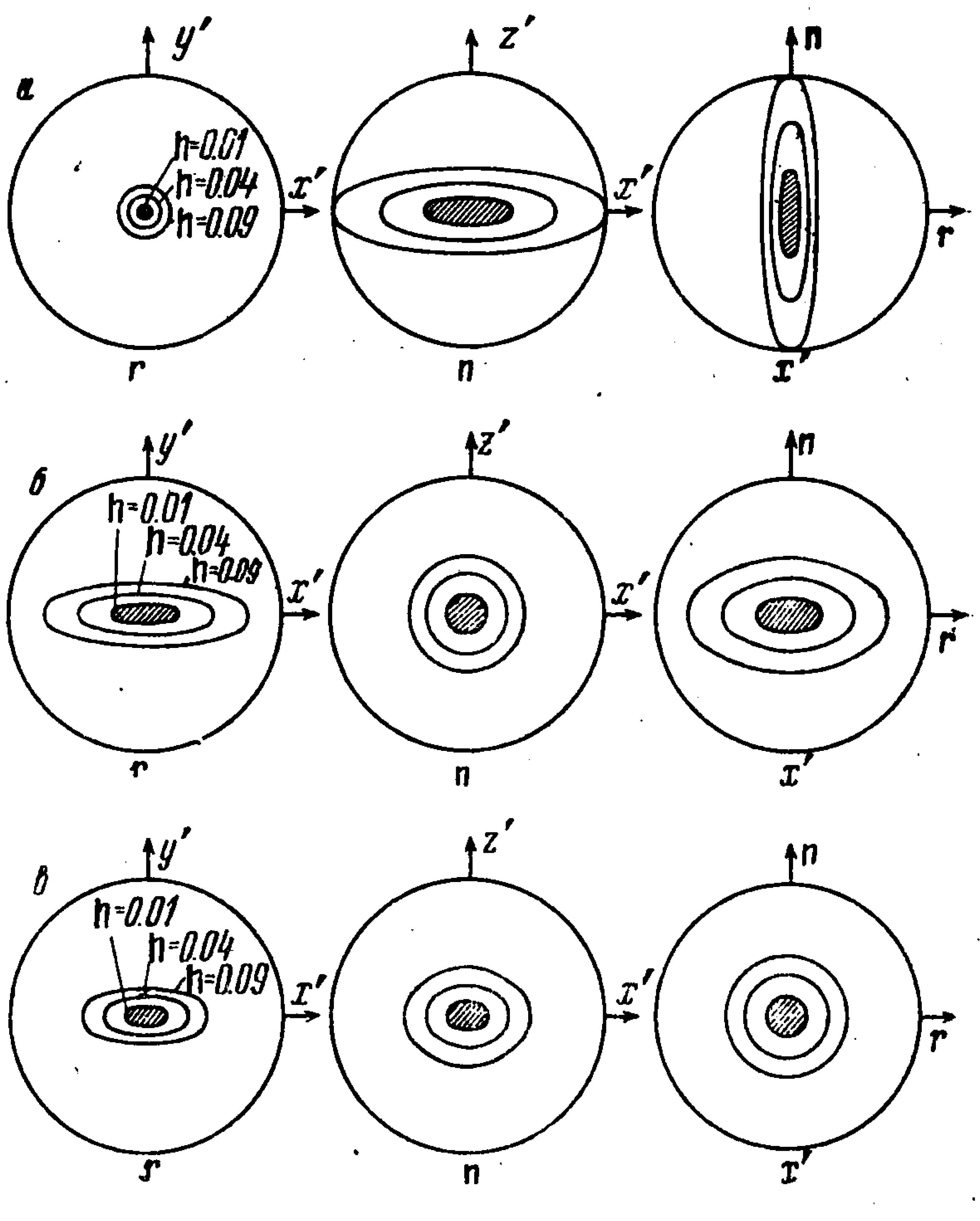
$$a_x^2 = a_r^2, \quad b_x^2 = a_n^2. \tag{9}$$

Заметим, что по физическому смыслу и в силу (2) всегда

$$\delta - \varepsilon > 1, \quad \varepsilon < 1, \quad \delta > 1 \tag{10}$$

При различных значениях h_0 (и фиксированных A_1, A_2, A_3) эллипсы (7) — (9) имеют различные размеры (фиг. 1). Областью возможного движения является область «внутри» соответствующего эллипса (т. е. область, содержащая в себе начало координат). При выполнении (2) всегда будет $a_r > b_r$, $a_n > b_n$, но $a_x > b_x$, если $A_2 - A_1 > 3(A_1 - A_3)$, и $a_x < b_x$, если $A_2 - A_1 < 3(A_1 - A_3)$.

Размеры областей при фиксированных A_1, A_2, A_3 определяются значением h_0. Если, например, имеются некоторые начальные отклонения в плоскости орбиты, определяющие значение h_0^*, а начальные отклонения от плоских колебаний сколь угодно малы, все равно область возможных поперечных колебаний будет конечной и определяемой указанным значением h_0^*.



Фиг. 1

При фиксированных h_0 вид и размеры областей возможного движения определяются отношением моментов инерции.

Зафиксируем h' и рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1°. Пусть $\delta = 1.1$, $\varepsilon = 0.2$, тогда $a_r' = 0.68$, $b_r' = 0.64$, $a_n' = 3.32$, $b_n' = 1.11$, $a_x' = a_r'$, $b_x' = a'_n$.

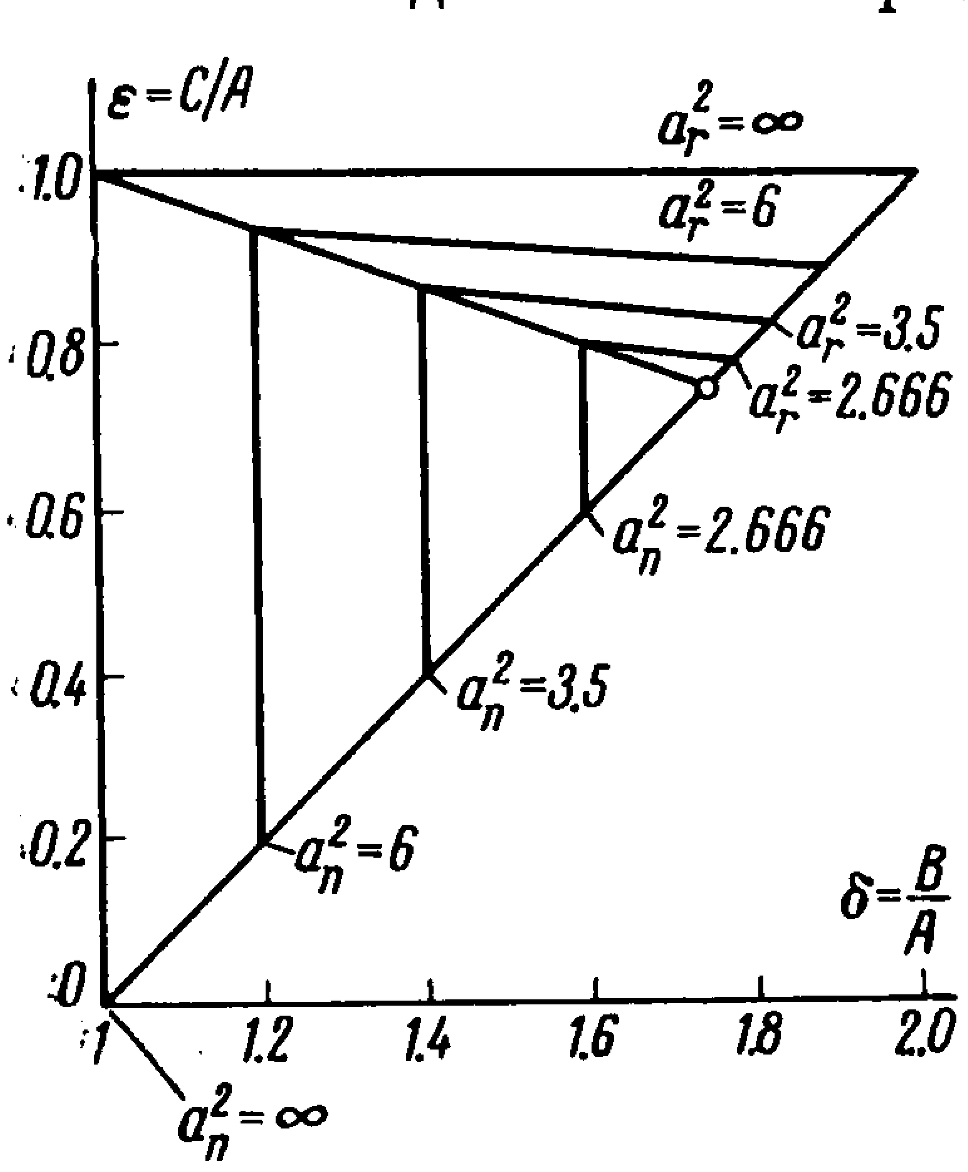
На фиг. 1, *а* изображены области возможного движения для этого случая (заштрихованы области, соответствующие значению $(h')^{1/2} = 0.1$). Отметим, что максимальные возможные отклонения углов $(x_3\, r)$, $(x_2 n)$ и $(x_1 \tau)$ определяются соотношениями

$$|\sin(x_3 r)| = a_r' \sqrt{h'}, \quad |\sin(x_2 n)| = a_n' \sqrt{h'}$$

$$|\sin(x_1 \tau)| = a_r' \sqrt{h'}, \quad \text{если } A_2 - A_1 > 3(A_1 - A_3), \quad |\sin(x_1 \tau)| = a_n' \sqrt{h'}$$

$$\text{если } A_2 - A_1 < 3(A_1 - A_3)$$

Угол $(x_3\, r)$ характеризует движение по тангажу, а углы $(x_2 n)$ и $(x_1 \tau)$ — поперечные колебания. Из примера 1 (фиг. 1, *а*) видно, что весьма умеренные колебания по тангажу могут сопровождаться очень значительными, поперечными колебаниями. В самом деле, в этом случае имеем $a_n' / a_r' = 4.899$, так что, если максимальное отклонение по тангажу $(x_3 r) = 5°$, то по крену может быть отклонение 21°.



Фиг. 2

Наличие достаточно широкой области возможного движения не означает, что обязательно произойдет раскачка в колебаниях до границ этой области. Утверждается лишь, что при некоторых соотношениях параметров такая раскачка может произойти. Конкретный механизм такой раскачки связан с соизмеримостью частот пространственных колебаний спутника. Численными расчетами Кэйн [2] обнаружил такую раскачку поперечных колебаний, а Брэквилл и Прингль [3] исследовали эти резонансные эффекты асимптотическими методами.

Таким образом, почти одинаковым по размерам областям возможного движения (и при одном и том же значении h') могут соответствовать как весьма малые колебания, лежащие глубоко внутри области возможного движения, так и (в случае резонансного соотношения между моментами инерции) колебания, доходящие до границ области возможного движения.

Разумеется, наличие таких резонансов не нарушает доказанной ранее [1] устойчивости по Ляпунову относительного равновесия спутника: в самом деле, как в нерезонансном, так и в резонансном случае всегда можно выбрать столь малое h', что амплитуды колебаний не превзойдут наперед заданной величины.

Пример 2. $\delta = 1.9$, $\varepsilon = 0.9$, тогда $a_r' = 2.52$, $b_r' = 0.795$, $a_n' = 1.45$, $b_n' = 1.38$, $a_x' = a_r'$, $b_x' = a_n'$.

В этом примере, в противоположность предыдущему, умеренные колебания относительно нормали к плоскости орбиты сопровождаются более существенными колебаниями по тангажу и относительно касательной к орбите ($a_r' / a_n' = 1.75$; фиг. 1, *б*).

Возникает вопрос, нельзя ли выбрать такие моменты инерции спутника, чтобы при фиксированном h' была гарантирована некая равномерная «умеренность» всех колебаний спутника. Назовем спутник с отношением моментов инерции ε^*, δ^* оптимально устойчивым, если при фиксированном значении безразмерной константы энергии h_n' эти отношения моментов инерции обеспечивают минимум максимального размера области возможного движения. Так как максимальные размеры области движения определяются [1] либо величиной a_r', либо a_n', то дело сводится к нахождению

$$\min_{\varepsilon,\delta} \max (a_r', a_n')$$

Рассмотрим на плоскости ε, δ область (10) (фиг. 2). Эта область делится прямой $\delta + 3\varepsilon = 4$ на две части. Выше этой прямой имеем $a_r'^2 > a_n'^2$ и минимизировать нужно

a_r', как наибольшую из двух величин a_r', a_n'. Ниже указанной прямой имеем $a_n'^2 > a_r'^2$ и минимизировать следует a_n'. Прямые $a_n'^2 = a_{n0}'^2 = \text{const}$ эквивалентны некоторым прямым $\delta = \text{const}$ и значения $a_n'^2$ монотонно убывают от ∞ при возрастании δ от 1. Наименьшее значение $a_n'^2$ в подобласти $\delta + 3\varepsilon \leqslant 4$ достигается на пересечении границы $\delta + 3\varepsilon = 4$ этой подобласти с границей $\delta - \varepsilon = 1$ области (10). Рассмотрим теперь подобласть $\delta + 3\varepsilon \geqslant 4$. Здесь нужно минимизировать a_r'. Изолинии $a_r'^2 = a_{r0}'^2 = \text{const}$ суть пучок прямых $\delta + 3a_{r0}'^2\varepsilon = 3a_{r0}'^2$, проходящих через точки $\delta = 0$, $\varepsilon = 1$, $\delta = 3a_{r0}'^2$, $\varepsilon = 0$, так что минимальному значению $a_r'^2$ в подобласти $\delta + 3\varepsilon \geqslant 4$ соответствует снова пересечение границы $\delta + 3\varepsilon = 4$ этой подобласти с границей $\delta - \varepsilon = 1$ области (10). Этому пересечению соответствуют значения $\varepsilon = 0.75$, $\delta = 1.75$.

Таким образом, оптимально-устойчивым является спутник с отношением моментов инерции

$$A_2^*: A_1^*: A_3^* = 1.75 : 1 : 0.75 \tag{11}$$

Пример 3. Области возможного движения оптимально-устойчивого спутника (11). В этом случае $a_r' = 1.526$, $b_r' = 0{,}7513$, $b_n' = 1{,}32$, $b_x' = a_n' = a_r' = a_x'$ (фиг. 1, в).

Отношение моментов инерции (11) возможно лишь для спутника, вырожденного в диск. Фактически следует подразумевать реальный спутник с отношением моментов инерции, близким к (11).

Отметим также, что на эллиптической орбите граница $\delta - \varepsilon = 1$ будет резонансной кривой параметрического резонанса в поперечных колебаниях [4], и значит точка (11) — резонансной точкой. Это также значит, что вместо (11) надо брать некоторое близкое соотношение (внерезонансной зоны).

Отметим, между прочим, что указанная резонансная кривая имеет вторую ветвь, не указанную в [4,5], но найденную в [3]. Ни одна другая резонансная кривая из найденных в [4,6,3] не проходит через точку (11).

В заключение отметим, что малые колебания на круговой орбите спутника с параметрами (11) даются системой уравнений (время безразмерное)

$$\alpha''''' + {}^3/_7\,\alpha'' = 0, \qquad \alpha''' + \alpha' = 0, \qquad \gamma''' + 4\gamma' = 0 \tag{12}$$

Колебания по тангажу α'', крену α', рысканью γ' взаимно независимы (система расщепляется, как, впрочем, и всюду вдоль прямой $\delta - \varepsilon = 1$). Интегрируется система элементарно. Период колебаний по тангажу в $\sqrt{^7/_3}$ больше периода обращения центра масс спутника; период колебаний по крену равен периоду обращения, а период колебаний по рысканью составляет половину периода обращения.

Поступила 10 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. О либрации спутника. Сб. «Искусственные спутники Земли», 1959, вып. 3, стр. 13—31.
2. Kane T. R. Attitude Stability of earth — pointing Satellites. AIAAJ., 1965, vol. 3, No. 4, pp. 726—731.
3. Breakweell J. V., Prignl R. Jr. Препринт: Доклад на XV конгрессе МАФ, Афины, 1965.
4. Белецкий В. В. Либрация спутника на эллиптической орбите. Сб. «Искусств. спутники Земли», 1963, вып. 16, стр. 46—56.
5. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
6. Златоустов В. А., Охоцимский Д. Е., Сарычев В. А., Торжевский А. П. Исследование колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты. Космические исследования, 1964, т. 2, вып. 5, стр. 658—666.