ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ НА ДИНАМИКУ ОДНООСНОЙ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ОДНИМ МАХОВИКОМ

А. А. Карымов, Т. В. Харитонова

(Ленинград)

В системе одноосной ориентации космического летательного аппарата на какое-либо направление в пространстве, например, на Солнце, использующей один маховик, эффективное демпфирование относительных колебаний аппарата может быть осуществлено путем нежесткого соединения его корпуса с осью вращения маховика [1]. Для этого две степени свободы маховика, помещенного в трехстепенном кардановом подвесе, достаточно стеснить пропорциональным демпфером любого типа.

В работе рассматривается устойчивость свободных колебаний летательного аппарата, снабженного маховиком с подвижной осью, а также движение ориентируемой оси аппарата при действии внешних возмущающих моментов и возмущенное движение самого аппарата относительно ориентируемой оси.

1. Основные уравнения. Невозмущенное движение. Пусть с основной конструкцией летательного аппарата связана система осей $Cxyz$, предполагаемых главными центральными для основной конструкции и всех присоединенных подвижных тел, рассматриваемых как точечные массы. К числу подвижных тел относится маховик с элементами его подвеса. Предполагается, что в направлении на Солнце должна ориентироваться ось z аппарата.

Рассматривается случай простейшей постановки задачи, когда предполагаются небольшие колебания оси z аппарата относительно направления на Солнце и оси вращения маховика относительно корпуса аппарата. Если с маховиком связать жестко оси $C_1x_1y_1z_1$, причем ось z_1 направить по оси вращения маховика, совершающей небольшие колебания в осях xyz, то ориентацию осей $C_1x_1y_1z_1$ удобно определить относительно осей C_1xyz с помощью углов А. Н. Крылова α_1, β_1, φ_1.

Следуя прецессионной теории, т. е. пренебрегая экваториальными составляющими кинетического момента маховика, а также кинетическими моментами элементов его подвеса, простейшие уравнения вращательного движения летательного аппарата можно получить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&A\frac{d\omega_x}{dt} + (C-B)\,\omega_y\omega_z + H\left(\frac{d\beta_1}{dt} + \omega_y - \omega_z\alpha_1\right) = M_x \\
&B\frac{d\omega_y}{dt} + (A-C)\,\omega_x\omega_z + H\left(\frac{d\alpha_1}{dt} - \omega_x + \omega_z\beta_1\right) = M_y \qquad (1.1)\\
&C\frac{d\omega_z}{dt} + (B-A)\,\omega_x\omega_y + \frac{dH}{dt} = M_z \qquad (H = I\varphi_1')
\end{aligned}$$

Здесь A, B, C — главные центральные моменты инерции аппарата с присоединенными точечными массами, ω_x, ω_y, ω_z — проекции вектора абсолютной угловой скорости аппарата, M_x, M_y, M_z — проекции вектора главного момента относительно точки C внешних сил, H — собственный кинетический момент маховика. В дальнейшем рассмотрение ограничивается случаем стационарного режима движения маховика ($H = \mathrm{const}$).

Уравнения прецессионного движения ротора маховика в принятых выше предположениях приводятся к виду

$$-H\,(d\beta_1/dt + \omega_y - \omega_z\alpha_1) = Q_1, \quad H\,(d\alpha_1/dt - \omega_x + \omega_z\beta_1) = Q_2 \qquad (1.2)$$

где обобщенные силы Q_1, Q_2 определяются в основном упругими и демпфирующими моментами амортизаторов подвеса маховика и прочими моментами сопротивления, действующими на соответствующих осях вращения карданова подвеса. Если стеснение подвеса маховика осуществляется амортизаторами по линейному закону, то можно считать, что

$$Q_1 \approx -h\, d\alpha_1 / dt - k\alpha_1, \qquad Q_2 \approx -h\, d\beta_1 / dt - k\beta_1 \tag{1.3}$$

где h и k — демпфирующая и упругая постоянные демпфера на осях подвеса маховика.

Если ввести в рассмотрение некоторую систему осей слежения за Солнцем, обозначаемую $Cx_0y_0z_0$, и ориентацию осей $Cxyz$ летательного аппарата определить в этой системе осей также углами А. Н. Крылова α, β, φ, то в (1.1), (1.2) выражения проекций вектора абсолютной угловой скорости аппарата на его оси xyz имеют вид

$$\omega_x = -\frac{d\alpha}{dt}\cos\varphi + \left(\frac{d\beta}{dt} + n_0\right)\cos\alpha\sin\varphi \tag{1.4}$$

$$\omega_y = \frac{d\alpha}{dt}\sin\varphi + \left(\frac{d\beta}{dt} + n_0\right)\cos\alpha\cos\varphi, \qquad \omega_z = \frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{d\beta}{dt} + n_0\right)\sin\alpha$$

где малая величина $n_0 \approx 0.986°$/сутки — угловая скорость движения Земли вокруг Солнца (предполагается, что аппарат движется по орбите вокруг Земли).

В дальнейшем конструкция летательного аппарата предполагается динамически симметричной $A = B$. Введем в рассмотрение следующие комплексные переменные и безразмерные параметры:

$$\omega = \omega_x + i\omega_y, \ \gamma = -\alpha_1 + i\beta_1, \ \varepsilon = \frac{C}{A}, \ k_1 = \frac{kA}{H^2}, \ h_1 = \frac{h}{H}, \ \omega_0 = \frac{A\omega_z}{H} (i = \sqrt{-1}) \tag{1.5}$$

Тогда уравнения (1.1) — (1.3) принимают вид

$$\frac{A}{H}\frac{d\omega}{dt} + i\left[(1-\varepsilon)\omega_0 - 1\right]\omega + \omega_z\gamma - i\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{H}(M_x + iM_y)$$

$$\frac{A}{H}(1 + ih_1)\frac{d\gamma}{dt} + i(\omega_0 + k_1)\gamma + \frac{A}{H}\omega = 0, \quad C\frac{d\omega_z}{dt} = M_z \tag{1.6}$$

В невозмущенном движении при условии отсутствия внешних моментов следует, что

$$\omega_z = \text{const} \tag{1.7}$$

и система уравнений (1.6) предельно упрощается, переходя в систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными и комплексными коэффициентами. Необходимые и достаточные условия устойчивости решений системы уравнений (1.6) с комплексными коэффициентами при условии, что в конструкции подвеса маховика реализуется демпфирование $h > 0$, приводятся к неравенствам [2]

$$1 + k_1 + \omega_0 > 0, \qquad (1 + \varepsilon\omega_0)\{k_1[1 - (1-\varepsilon)\omega_0] - \omega_0^2(1-\varepsilon)\} > 0 \tag{1.8}$$

Условия (1.8) устанавливают в невозмущенном движении соотношения между инерционными параметрами аппарата ($\varepsilon \lesseqgtr 1$), значением кинетического момента маховика ($H > 0$) и параметром упругости стеснения его подвеса, а также скоростью вращения тела относительно ориентируемой оси, при которых возможно устойчивое демпфирование колебаний аппарата относительно направления ориентации. В безразмерных параметрах (1.5) области устойчивости определяются неравенствами

$$\omega_0 > -\frac{1}{\varepsilon}, \qquad \omega_0 > -(k_1 + 1), \qquad k_1 > \frac{(1-\varepsilon)\omega_0^2}{1 - (1-\varepsilon)\omega_0} \tag{1.9}$$

При выполнении условий (1.9) корни z_i характеристического уравнения системы (1.6) второго порядка с комплексными коэффициентами могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{H}{A}(\lambda_1 + i\omega_1), \qquad z_2 = \frac{H}{A}(\lambda_2 + i\omega_2) \quad \text{при } f_2 > 0 \\ z_1 &= \frac{H}{A}(\lambda_1 + i\omega_2), \qquad z_2 = \frac{H}{A}(\lambda_2 + i\omega_1) \quad \text{при } f_2 < 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

где использованы обозначения

$$\lambda_{1,2}=-\frac{h_1 d_2}{2(1+h_1^2)}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}[(f_1^2+f_2^2)^{1/2}+f_1]^{1/2},\quad \omega_{1,2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{d_2}{1+h_1^2}-d_1\right]\pm$$

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}[(f_1^2+f_2^2)^{1/2}-f_1]^{1/2}$$

$$d_1=1-(1-\varepsilon)\,\omega_0,\qquad d_2=1+k_1+\omega_0 \tag{1.11}$$

$$f_1=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{h_1 d_2}{1+h_1^2}\right)^2-\left(\frac{d_2}{1+h_1^2}-d_1\right)^2\right]-\frac{1}{1+h_1^2}[k_1 d_1-(1-\varepsilon)\,\omega_0^2]$$

$$f_2=\frac{h_1}{1+h_1^2}\left[\frac{d_2}{2}\left(\frac{d_2}{1+h_1^2}-d_1\right)+k_1 d_1-(1-\varepsilon)\,\omega_0^2\right]$$

Корни исходной системы уравнений четвертого порядка (1.1) — (1.3) определяются значениями z_i и сопряженными им $\bar{z}_i$ $(i=1, 2)$. Так как $d_2>0$ в силу условий устойчивости (1.9) и, кроме того, $[(f_1^2+f_2^2)^{1/2}+f_1]^{1/2}>0$, то минимальная по модулю вещественная часть корней определяется значением λ_1. Эта величина может быть оптимизирована выбором соответствующих параметров системы и тем самым обеспечено скорейшее затухание процесса колебаний оси маховика и ориентируемой оси аппарата. По окончании переходного процесса в невозмущенном движении продольная ось аппарата совмещается не точно с направлением на Солнце, а с отличающимся от него на угол (в обозначениях (2.1)).

$$\zeta_\infty=\frac{1}{C\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}+H}[(C\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}+H)\,\zeta_0+H\eta_0+iA\zeta_0^{\boldsymbol{\cdot}}]$$

(если пренебречь медленным движением Земли относительно Солнца) направлением вектора момента количества движения системы, причем сам аппарат совершает относительно продольной оси вращение со скоростью $d\varphi\,/\,dt=\mathrm{const}$.

2. Возмущенное движение ориентируемой оси. В возмущенном движении в правых частях уравнений (1.1) действуют моменты внешних сил гравитационных, аэродинамических, магнитных и др. Если ввести комплексные координаты

$$\gamma=\eta e^{-i\varphi},\qquad \zeta=-\alpha+i\beta,\qquad \omega=(d\zeta/dt+in_0)\,e^{-i\varphi} \tag{2.1}$$

и воспользоваться матрицей $\|\beta_{is}\|$ направляющих косинусов между осями xyz аппарата и осями x_0, y_0, z_0 слежения за Солнцем, то уравнения (1.6) движения аппарата и системы ориентации можно представить в виде

$$\frac{A}{H}\frac{d^2\zeta}{dt^2}-i\,(1+\varepsilon\omega_0)\frac{d\zeta}{dt}-i\frac{d\eta}{dt}=\frac{1}{H}(M_x+iM_y)\,e^{i\varphi}-n_0\,(1+\varepsilon\omega_0) \tag{2.2}$$

$$C\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M_z,\qquad \frac{A}{H}\frac{d\zeta}{dt}+\frac{A}{H}(1+ih_1)\frac{d\eta}{dt}+(h_1\omega_0+ik_1)\,\eta=-i\frac{A}{H}n_0$$

Поскольку рассматривается ориентированный объект, то в (2.2) выражения для проекций момента внешних сил можно представить в виде суммы двух моментов, первый из которых зависит от движения системы координат, в которой должен быть ориентирован объект, и угла собственного вращения аппарата φ, а второй зависит от этого движения и от ориентации аппарата относительно выбранной системы координат. Это можно показать на примере момента гравитационных сил. Для динамически симметричного тела

$$M_x\approx 3\frac{\mu}{r^3}(C-A)\,\delta_2\delta_3,\qquad M_g\approx 3\frac{M}{r^3}(A-C)\,\delta_1\delta_3,\qquad M_z=0 \tag{2.3}$$

где μ — гравитационная постоянная, r — расстояние между притягивающим центром и точкой C, δ_i — косинусы направления r с осями $Cxyz$ космического аппарата, определяемые соотношениями

$$\delta_i=\mu_1\beta_{i1}+\mu_2\beta_{i2}+\mu_3\beta_{i3}\qquad (\mu_i=a_i\cos u+b_i\sin u)\qquad (i=1, 2, 3) \tag{2.4}$$

Здесь u — угол истинной аномалии летательного аппарата, а a_i, b_i, c_i — направляющие косинусы между осями слежения за Солнцем и системой осей x^*, y^*, z^*, связанной с орбитой так, что x^*, y^* лежат в плоскости орбиты, причем x^* направлена по линии узлов, y^* — в сторону движения аппарата, а z^* — перпендикулярна плоскости орбиты; a_i, b_i, c_i — медленно меняющиеся функции, зависящие от ориентации орбиты относительно осей слежения за Солнцем. В результате несложных преобразований выражение моментов гравитационных сил в (2.2) принимает вид (2.5)

$$(M_x + iM_y)e^{i\varphi} = -3A(1-\varepsilon)\omega_*^2\{\mu_3(\mu_2 - i\mu_1) + [1 - {}^3/_2(\mu_1^2 + \mu_2^2)]^2\zeta + {}^1/_2(\mu_1 + i\mu_2)^2\bar{\zeta}\}$$
$$(\omega_* = \mu / r^3)$$

В дальнейшем орбита аппарата предполагается круговой ($\omega_* = \mathrm{const}$).

В общем случае, когда объект обладает какой-либо несимметрией (динамической, магнитной или аэродинамической) общие выражения для проекций момента внешних сил при движении аппарата по произвольной орбите с точностью до членов нулевого порядка малости приводятся к виду

$$(M_x + iM_y)e^{i\varphi} = m\sum_{k=0}^{N}(P_k + iR_k)e^{ik\varphi}, \qquad M_z = m_z\sum_{k=1}^{N}(A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi) \qquad (2.6)$$

Здесь параметры m, m_z характеризуют величины момента внешних сил; P_k, R_k, A_k, B_k периодические функции аргумента широты и могут быть представлены в виде конечных сумм по синусам и косинусам этого аргумента, что практически всегда имеет место

$$P_k = p_{0k} + \sum_{\nu=1}^{M}(p_{\nu k}\cos\nu u + q_{\nu k}\sin\nu u), \qquad R_k = r_{0k} + \sum_{\nu=1}^{M}(r_{\nu k}\cos\nu u + s_{\nu k}\sin\nu u) \qquad (2.7)$$
$$A_k = a_{0k} + \sum_{\nu=1}^{M}(a_{\nu k}\cos\nu u + c_{\nu k}\sin\nu u), \qquad B_k = b_{0k} + \sum_{\nu=1}^{M}(b_{\nu k}\cos\nu u + d_{\nu k}\sin\nu u)$$

Например, для момента гравитационных сил, действующего на динамически несимметричный объект ($A \neq B \neq C$), выражения моментов приводятся к виду

$$(M_x + iM_y)e^{i\varphi} = 3\omega_*^2[C - {}^1/_2(A + B)]\mu_3(\mu_2 - i\mu_1) - {}^3/_2(B - A)\omega_*^2\mu_3(\mu_2 + i\mu_1)e^{2i\varphi}$$
$$M_z = 3(B - A)\omega_*^2[{}^1/_2(\mu_2^2 - \mu_1^2)\sin 2\varphi + \mu_1\mu_2\cos 2\varphi] \qquad (2.8)$$

В формулах (2.6) и (2.7) верхние пределы сумм в правых частях практически всегда можно считать целыми положительными числами, причем их величина определяется той степенью точности, с какой вычисляется момент внешних сил. Обычно числа N и M невелики. Так, например, для момента гравитационных сил, как это следует из приведенных формул, $N = 2$ и $M = 2$; для момента магнитных сил в обычно используемых предположениях $N = 2$ и $M = 4$. Сложнее дело обстоит с вычислением аэродинамического момента, так как для этого случая суммы в правых частях (2.6) и (2.7) представляют собой суммы нескольких начальных членов ряда Фурье. Однако практические вычисления, выполненные авторами для частного вида конфигурации космического аппарата, показали, что и в этом случае в разложении можно ограничиться весьма небольшим числом гармоник.

Можно оценить влияние членов нулевого порядка малости в выражении для момента внешних сил на уход оси z аппарата от направления на Солнце в предположении $d\varphi/dt = \mathrm{const}$. Это влияние определяется частным решением системы (2.2)

$$\zeta_* = \left[-in_0 + \frac{A}{H}\frac{(-r_{00} + ip_{00})}{1 + \varepsilon\omega_0}\right]t \qquad (2.9)$$

которое обусловлено нулевой гармоникой ($k = 0$) разложения (2.7), т. е. моментом сил, действующих на идеально симметричный аппарат. В частности, при действии только момента гравитационных сил

$$\zeta_* = i\left[-n_0 + \frac{3A(1-\varepsilon)\omega_*^2}{H(1+\varepsilon\omega_0)} c_3(c_2 - ic_1)\right]t \tag{2.10}$$

Представив разложение (2.7) в виде

$$(M_x + iM_y)e^{i\omega} = m\sum_{k=0}^{N}(p_{0k} + ir_{0k})e^{ik\varphi} + \tag{2.11}$$

$$+\frac{m}{2}\sum_{k=0}^{N}\sum_{\nu=1}^{M}\{[(p_{\nu k} + s_{\nu k}) + i(r_{\nu k} - q_{\nu k})]e^{i(\nu u + k\varphi)} + [(p_{\nu k} - s_{\nu k}) + i(r_{\nu k} + q_{\nu k})]e^{i(-\nu u + k\varphi)}\}$$

нетрудно заметить, что в резонансном случае при $k\dot\varphi = \pm\nu\dot u$ в разложении (2.11), помимо нулевой гармоники, появляется дополнительная постоянная составляющая, лишь количественно меняющая решение (2.9).

Учет влияния составляющих внешних моментов, зависящих от ориентации космического аппарата, приводит к необходимости исследования дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В случае учета момента гравитационных сил они имеют вид (2.2), (2.5). Для определения неизвестных функций ζ, $\bar\zeta$, η, $\bar\eta$ в данном случае имеется система уравнений (2.2), (2.6) и аналогичная ей система для сопряженных величин с периодическими и комплексными коэффициентами, так как μ_i, согласно (2.4), являются периодическими функциями, изменяющимися с частотой обращения аппарата по орбите.

Можно показать, что рассматриваемая система с периодическими коэффициентами не имеет устойчивого периодического решения. Действительно, для системы уравнений (2.2), (2.5) и ей сопряженной методом последовательных приближений может быть построено периодическое решение в виде ряда по степеням малого параметра

$$\mu_0 = 3\omega_*^2(1-\varepsilon) \tag{2.12}$$

которое переходит при $\mu_0 = 0$ в некоторое постоянное решение, соответствующее нулевому корню фундаментального уравнения системы (2.2). Опуская выкладки, приведем некоторые результаты для случая $n_0 = 0$. Полное решение системы (2.2), (2.5) может быть представлено в виде суммы некоторого вынужденного периодического решения, устойчивость которого исследуется, и произвольного решения, а именно,

$$\begin{aligned}
\zeta &= D_0 + \mu_0\left[D_0^{(1)} + \frac{1}{u^{\cdot}}(D_2\sin 2u^{\cdot}t - \varepsilon_2\cos 2u^{\cdot}t)\right] + y_1e^{\mu_0 a_i(\mu_0)t}\\
\frac{d\zeta}{dt} &= \mu_0(D_2\cos 2u^{\cdot}t + \varepsilon_2\sin 2u^{\cdot}t) + y_2e^{\mu_0 a_i(\mu_0)t} \qquad \left(D_0 = -\frac{ic_3(c_1+ic_2)}{1-2c_3^2}\right)\\
\eta &= \mu_0(D_3\cos 2u^{\cdot}t + \varepsilon_3\sin 2u^{\cdot}t) + y_3e^{\mu_0 a_i(\mu_0)t}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь D_0 — постоянное в периодическом движении решение, в которое переходит исследуемое движение при $\mu_0 = 0$: выражения для постоянных $D_0^{(1)}$, D_i, ε_i, которые вполне определяются, здесь не приводятся; $a_j(\mu_0)$ — характеристические показатели решений, соответствующие критическим корням системы уравнений в вариациях для системы (2.2), (2.5) относительно новых переменных y_i.

Построение периодических решений y_i в виде рядов для уравнений в вариациях позволяет определить [3] приближенные значения характеристических показателей $a_j(\mu_0)$ также в виде рядов по степеням μ_0. Выражения для характеристических показателей могут быть приведены к виду

$$a_i(\mu_0) \approx a_1 + \mu_0[-(1-c_3^2)(1-3c_3^2)m_* + a_1n_*] + \ldots$$

$$\left(a_1 = \pm\frac{i}{2}c_3\sqrt{2c_3^2-1}\,\frac{A}{H(1+\varepsilon\omega_0)}\right) \tag{2.14}$$

Здесь n_* — некоторое вещественное число, а $m > 0$.

Из (2.14) следует, что исследуемое периодическое решение в первом приближении будет ограниченным только в том случае, если выполняется неравенство

$$2C_3^2 - 1 > 0 \tag{2.15}$$

Тогда устойчивость этого движения определяется следующим приближением характеристического показателя. Однако при выполнении неравенства (2.15)

$$\operatorname{Re}\,[\mu_0 a_i(\mu_0)] = -\mu_0^2 (1 - c_3^2)(1 - 3c_3^2)\, m_* > 0$$

т. е. исследуемое периодическое движение неустойчиво, и имеет место уход ориентируемой оси от направления на Солнце со скоростью пропорциональной квадрату малого параметра μ_0. В общем случае уход ориентируемой оси определяется решением неоднородных уравнений (2.2), (2.5), нарастающим со временем.

К сожалению, исследования устойчивости периодических движений при учете зависящих от ориентации космического летательного аппарата возмущающих моментов другой природы (аэродинамических, магнитных и пр.) практически невозможны без дополнительных ограничивающих предположений относительно конструкции аппарата.

3. **Движение вокруг ориентируемой оси.** При решении предыдущих задач предполагалось, что $d\varphi \,/\, dt = \text{const}$. Если космический аппарат обладает каким-либо видом несимметрии, то угловая скорость его вращения вокруг оси ориентации изменяется согласно уравнению

$$C\frac{d^2\varphi}{dt^2} = m_z \sum_{k=1}^{N} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) \tag{3.1}$$

где A_k и B_k — периодические функции угла аргумента широты положения аппарата, определяемые формулой (2.8).

Представляет несомненный интерес исследовать влияние малого момента внешних сил m_z на изменение угловой скорости $d\varphi/dt$ в предположении, что величина $d\varphi/dt$ имеет тот же порядок, что и величина угловой скорости обращения космического летательного аппарата по орбите $u_0^{\cdot}$.

Уравнение (3.1) приводится к виду

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mu_0 u_0^{\cdot 2} \sum_{k=1}^{N} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) \qquad \left(\mu_0 = \frac{m_z}{C u_0^{\cdot 2}}\right) \tag{3.2}$$

Здесь μ_0 — безразмерный малый параметр.

Решение уравнения (3.2) ищем в виде ряда по степеням малого параметра μ_0:

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \mu_0 \varphi^{(1)} + \mu_0^2 \varphi^{(2)} + \ldots \tag{3.3}$$

Для определения последовательных приближений имеются уравнения

$$\frac{d^2\varphi^{(0)}}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2\varphi^{(1)}}{dt^2} = u_0^{\cdot 2} I_0, \qquad \frac{d^2\varphi^{(2)}}{dt^2} = u_0^{\cdot 2} I_1 \varphi^{(1)} \tag{3.4}$$

$$\frac{d^2\varphi^{(3)}}{dt^2} = u_0^{\cdot 2} [I_1 \varphi^{(2)} - \frac{1}{2} I_2 (\varphi^{(1)})^2], \ldots$$

$$\ldots, \frac{d^2\varphi^{(m)}}{dt^2} = u_0^{\cdot 2} [I_1 \varphi^{(m-1)} + F(\varphi^{(m-2)}, \varphi^{(m-3)}, \ldots, \varphi^{(1)})]$$

Здесь

$$I_{2p} = \sum_{k=1}^{N} k^{2p} (A_k \cos k\varphi^{(0)} + B_k \sin k\varphi^{(0)}) \tag{3.5}$$

$$I_{2p+1} = \sum_{k=1}^{N} k^{2p+1} (-A_k \sin k\varphi^{(0)} + B_k \cos k\varphi^{(0)})$$

В этих функциях $\varphi^{(0)}$ — нулевое приближение решения (3.3), т. е. решение уравнения (3.2) при $\mu_0 = 0$:

$$\varphi^{(0)} = \varkappa t + \chi \qquad (\varkappa,\ \chi = \mathrm{const}) \tag{3.6}$$

Движением, в котором величина $d\varphi/dt$ остается ограниченной, будет движение, соответствующее периодическому решению уравнения (3.2). Поэтому ставится задача отыскания и исследования устойчивости периодических (периода T) обращений спутника по орбите решений уравнения (3.2).

Условие периодичности приближения первого порядка $d\varphi^{(1)}/dt$

$$\int_0^T I_0\,dt = 0 \tag{3.7}$$

удовлетворяется, если $\varkappa$ кратна частоте обращения спутника по орбите, т. е.

$$\varkappa = nu_0, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \ldots \tag{3.8}$$

При этом возможны три типа периодических движений

$$\begin{aligned}
&1)\ n = 0, \quad (a_{0k}\cos k\chi + b_{0k}\sin k\chi) + \ldots + (a_{0N}\cos N\chi + b_{0N}\sin N\chi) = 0\\
&2)\ n = +\nu/k, \quad (a_{\nu k} + d_{\nu k})\cos(\nu u_0 - k\chi) + (c_{\nu k} - b_{\nu k})\sin(\nu u_0 - k\chi) = 0\\
&\quad\ n = -\nu/k, \quad (a_{\nu k} - d_{\nu k})\cos(\nu u_0 + k\chi) + (c_{\nu k} + b_{\nu k})\sin(\nu u_0 + k\chi) = 0\\
&3)\ n \neq 0, \quad n \neq \pm\nu/k
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Первый случай соответствует нулевой угловой скорости при $\mu_0 = 0$ и заслуживает особого внимания. Ко второму типу относится конечное число решений, поскольку числа ν и k ограничены. По этой же причине третий случай включает в себя бесконечное множество решений.

Если обозначить результат двойного интегрирования функций I_{2p}, I_{2p+1} в периодическом движении с точностью до постоянного множителя $(u_0^{\cdot})^{-2}$ через I_{2p}^*, I_{2p+1}^*, то выражение для $\varphi^{(1)}$ запишется в виде

$$\varphi^{(1)} = -I_0^* + C_1^{(1)}t + C_2^{(1)} \tag{3.10}$$

где $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$ — постоянные интегрирования.

Из условия периодичности приближения второго порядка $d\varphi^{(2)}/dt$ следует

$$H_1T + C_1^{(1)}J_2(T) + C_2^{(1)}J_1(T) = 0 \qquad \left(J_1(T) = \int_0^T I_1\,dt,\ J_2(T) = \int_0^T I_1 t\,dt\right) \tag{3.11}$$

где H_1 — постоянная составляющая произведения двух периодических функций I_0^* и I_1. Если периодическая функция I_1 имеет постоянную составляющую I_{10}, то решение уравнения (3.11) следует записать в виде

$$C_1^{(1)} = 0, \qquad C_2^{(1)} = H_1 / I_{10} \tag{3.12}$$

Если же I_1 не содержит постоянной составляющей, то

$$C_1^{(1)} = H_1T / J_2(T) \tag{3.13}$$

а значение $C_2^{(1)}$ остается неопределенным. Решение (3.12) принципиально возможно только для первых двух случаев (3.9) и позволяет построить решение, в котором $d\varphi^{(2)}/dt$ и $\varphi^{(2)}$ будут периодическими функциями. Решение (3.13) соответствует третьему случаю и, как это будет показано далее, иногда первому случаю (3.9); при этом решение $\varphi^{(2)}$ будет непериодической функцией.

Пользуясь описанной методикой для построения приближений более высоких порядков, можно получить решение исходного уравнения (3.2) либо в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varkappa + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \mu_0^m \frac{d\Pi_m}{dt} \tag{3.14}$$

$$\varphi = \varkappa t + \varkappa + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \mu_0^m \left(\Pi_m - \frac{H_m}{I_{10}}\right) \qquad \text{при } I_{10} \neq 0$$

либо в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varkappa + \sum_{m=1}^{\infty} \mu_0^m \left[\frac{d\Pi_m'}{dt} + \frac{H_m'}{J_2(T)}\right]$$

$$\varphi = \varkappa t + \chi + \sum_{m=1}^{\infty} \mu_0^m \left[\Pi_m' + \frac{H_m}{J_2(T)} t + C_2^{(m)}\right] \quad \text{при } I_{10} = 0 \tag{3.15}$$

где Π_m, Π_m' — периодические функции, включающие в себя ряд функций sin и cos частот, кратных частоте $u_0^{\cdot}$, H_m, H_m' — постоянные величины.

Если $\varphi = \varphi^*$—решение в форме (3.14), (3.15), то уравнение в вариациях для исходного уравнения (3.2) запишется в виде

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \mu_0 u_0^{\cdot 2} I_1(\varphi^*) z \tag{3.16}$$

причем для решения (3.14)

$$I_1(\varphi^*) = I_1(\varphi^{(0)}) - \mu_0 \varphi^{(1)} I_2(\varphi^{(0)}) + \ldots \tag{3.17}$$

периодическая функция времени, а для решения (3.15) величина $I_1(\varphi^*)$ — ограниченная, непрерывная, но не периодическая функция времени.

Метод исследования устойчивости периодических движений типа (3.14), когда уравнение в вариациях (3.16) имеет периодические коэффициенты, достаточно полно изложен в ([3], стр. 220—223). Проделав все необходимые выкладки, можно установить, что в рассматриваемом случае уравнение в вариациях имеет ограниченное решение только при

$$I_{10} < 0 \tag{3.18}$$

Если $I_1(\varphi^*)$ — непериодическая функция времени, то уравнение в вариациях (3.16) следует записать в виде системы двух уравнений

$$dz_1/dt = z_2, \qquad dz_2/dt = \mu_0 u_0^{\cdot 2} I_1(\varphi^*) z_1 \tag{3.19}$$

Рассматривая (3.19) как частный вид системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, теория устойчивости решений которых изложена, например, в [4], легко установить, что система (3.19) имеет два характеристичных числа, сумма которых равна нулю. Следовательно, единственным возможным случаем, когда система (3.19) может иметь ограниченное решение, будет равенство нулю каждого из ее характеристичных чисел. Необходимым условием этого является

$$I_1(\varphi^*) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{3.20}$$

так как при выполнении этого условия система (3.19) имеет характеристичные числа, равные характеристичным числам системы с постоянными коэффициентами

$$dz_1 / dt = z_2, \qquad dz_2 / dt = 0 \tag{3.21}$$

образующейся из исходной, отбрасыванием членов с переменными коэффициентами; система (3.21) имеет два характеристичные числа, равные нулю. Условие (3.20) не выполняется, поэтому система (3.19) имеет характеристичное число меньшее нуля, и исследуемое движение (3.15) неустойчиво.

Таким образом, уравнение (3.2) имеет периодическое решение (3.14) при $I_{10} \neq 0$; необходимым условием устойчивости решения является неравенство (3.18)

$$I_{10} = \sum_{k=1}^{N} k(-a_{0k} \sin k\varkappa + b_{0k} \cos k\varkappa) \qquad \text{при } n = 0 \tag{3.22}$$

где χ — решение уравнения

$$I_{00} = \sum_{k=1}^{N} (a_{0k} \cos k\chi + b_{0k} \sin k\chi) = 0 \tag{3.23}$$

Записав выражения для I_{10} и I_{00} в виде

$$I_{10} = \sum_{k=1}^{N} k\Phi_k \cos(k\chi + \psi_k), \qquad I_{00} = \sum_{k=1}^{N} \Phi_k \sin(k\chi + \psi_k)$$

$$(\Phi_k = \sqrt{a_{0k}^2 + b_{0k}^2}, \quad a_{0k} = \Phi_k \sin\psi_k, \quad b_{0k} = \Phi_k \cos\psi_k) \tag{3.24}$$

и, отбросив решение уравнения (3.23) $\chi = -\psi$, $\chi = -\psi + \pi$, соответствующее слишком ограничивающему условию $\psi_k = k\psi$, можно установить, что величина $|I_{10}| = \sqrt{I_{10}^2}$ является знакоопределенной квадратичной формой величин Φ_k, а следовательно, и a_{0k}, b_{0k} при значениях χ, равных корням уравнения (3.23), только при $k = 1,2$.

Таким образом, только в том случае, когда в выражение для момента внешних сил M_z входят лишь две гармоники по аргументу φ, можно уверенно судить об устойчивости и неустойчивости построенного периодического движения. Следует заметить, что разложение

$$(A_1 \cos\varphi + B_2 \sin\varphi) + (A_2 \cos 2\varphi + B_2 \sin 2v)$$

включает практически интересные случаи момента гравитационных сил и момента магнитных сил, вычисленного в предположении, что магнитное поле Земли аппроксимируется диполем с осью, совпадающей с осью Земли.

Если ряды I_{00} и I_{10} включают в себя только одну, k-ю гармонику, то уравнение (3.23) имеет два решения $k\chi + \psi_k = 0$ и $k\chi + \psi_k = \pi$, причем $I_{10} = -kA_k < 0$ при $k\chi + \psi_k = \pi$.

При $n = \pm\nu / k$ постоянные величины $I_{0\nu k}$ и $I_{1\nu k}$ также приводятся к виду (3.24), но который будет включать только одну гармонику, и поэтому необходимое условие устойчивости (3.18) всегда выполняется для периодических движений, соответствующих второму случаю по (3.9).

В общем случае непериодического решения (3.3) уравнения (3.2), когда значение $\varkappa$ в (3.6) не кратно величине $u_0^{\cdot}$, происходит линейное изменение во времени угловой скорости собственного вращения спутника, пропорциональное второй степени малого параметра μ_0. При этом изменении величина $d\varphi / dt$ с большой степенью вероятности придет к такому уровню $d\varphi / dt = nu_0^{\cdot}$, для которого выполняются необходимые условия устойчивости периодического движения.

Таким образом, установившимся режимом движения космического аппарата вокруг ориентируемой оси под влиянием малого момента внешних сил можно всегда считать периодический режим, в котором величина $d\varphi / dt$ изменяется периодически с малой амплитудой относительно какого-либо уровня, кратного частоте обращения спутника по орбите, что в известной степени оправдывает предположение о постоянстве величины $d\varphi / dt$, принятое при исследовании движения оси аппарата.

Поступила 22 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Т о к а р ь Е. Н. Возможные принципы ориентации космического аппарата относительно вращающейся системы координат. Космические исследования. 1966, т. 4, вып. 3.
2. Ч е б о т а р е в Н. Г., М е й м а н Н. Н. Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1949, т. 26.
3. М а л к и н И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
4. М а л к и н И. Г. Теория устойчивости движения. М. — Л., Гостехиздат, 1952.