Следовательно,

$$\|x(t)\| \leqslant rBe^{[-\alpha(t-t_0)]} + \int_{t_0}^{t} Be^{[-\alpha(t-\tau)]}\,\varepsilon\gamma(\varepsilon)\,d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} Be^{[-\alpha(t-\tau)]}\,\varepsilon\delta(\varepsilon,\,\varepsilon)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} Be^{[-\alpha(t-\tau)]}\,\rho\,d\tau$$

Отсюда получаем, что на сегменте $[t_0,\ t]$ имеет место неравенство

$$\|x(t)\| \leqslant rB + \varepsilon B\alpha^{-1}\gamma(\varepsilon) + \varepsilon B\alpha^{-1}\delta(\varepsilon,\,\varepsilon) + B\alpha^{-1}\rho \leqslant {}^4/_5\,\varepsilon$$

если только число $\varepsilon > 0$ было предварительно взято настолько малым, что

$$B\alpha^{-1}\gamma(\varepsilon) \leqslant {}^1/_5, \qquad B\alpha^{-1}\delta(\varepsilon,\,\varepsilon) \leqslant {}^1/_5$$

а возмущения $R(t,\ x,\ y)$ удовлетворяли условию (1.3).

Следовательно, если на сегменте $[t_0,\ t]$ имеет место неравенство (2.3), то тем самым имеет место и более сильное неравенство

$$\|x(t)\| \leqslant {}^4/_5\,\varepsilon$$

Отсюда следует, что неравенства (2.3) и (2.4) будут иметь место при любом значении $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ и любых возмущениях, удовлетворяющих условию (1.3), т. е. нулевое решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Поступила 13 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Персидский К. П. Некоторые критические случаи счетных систем. Изв. АН КазССР, сер. матем. и механ., 1951, вып. 5.
2. Персидский К. П. Об устойчивости решений счетной системы дифференциальных уравнений. Изв. АН КазССР, сер. матем. и механ., 1948, вып. 2.
3. Ятаев М. К исследованию одного критического случая устойчивости. Изв. АН КазССР, сер. физ.-матем., 1954, № 129.
4. Горшин С. И. Об устойчивости решений уравнений в линейном нормированном пространстве при постоянно действующих возмущениях. Изв. АН КазССР, сер. физ.-матем. н., 1965, вып. 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВАНИИ ИЗМЕРЕНИЯ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

М. Ф. Диментберг

(Москва)

При построении математического описания механических систем, систем автоматического управления и т. п. на основании результатов измерений процессов на входе и выходе системы (т. е. при решении задачи идентификации) в ряде случаев приходится сталкиваться с тем фактом, что процесс на выходе системы является случайным даже при строго детерминированном входном сигнале (при условии тождественного равенства нулю процесса на выходе в случае отсутствия сигнала на входе). Это обстоятельство свидетельствует о «стохастичности» исследуемой системы; достаточно полная математическая модель такой системы должна иметь параметры, являющиеся случайными функциями времени, а идентификация подобной системы должна включать определение статистических характеристик этих изменений параметров. Указанные характеристики могут использоваться, в частности, для оценки качества и надежности систем, например, в тех случаях, когда «номинальные» значения параметров лежат вблизи границы области устойчивости.

Ряд примеров стохастических систем можно найти в биомеханике. Здесь можно указать задачи о действии вибраций на организм человека [1] и о построении математической модели человека-оператора, являющегося звеном системы автоматического управления [2].

В данной работе рассматривается система, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением, коэффициенты которого суть стационарные и стационарно связанные случайные функции; порядок уравнения считается известным. К системе прикладывается синусоидальное воздействие. Соответственно приближенному решению «прямой» задачи статистической динамики [3] строится итерационный процесс нахождения неизвестных моментных функций коэффициентов системы по измеряемым моментным функциям процесса на выходе. В качестве примера рассмотрена система второго порядка со случайно изменяющимся коэффициентом демпфирования.

1. Будем исследовать установившееся движение системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$[Q_0(p) + \mu Q_1(t, p)]\, x = [P_0(p) + \mu P_1(t, p)]\, y, \qquad y = \cos \omega_0 t$$

$$Q_0(p) = p^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k, \qquad P_0(p) = \sum_{k=0}^{m} c_k p^k, \qquad p = \frac{d}{dt} \qquad (m < n)$$

$$Q_1(t, p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \xi_k(t)\, p^k, \qquad P_1(t, p) = \sum_{k=0}^{m} c_k \eta_k(t)\, p^k \tag{1.1}$$

Здесь μ, a_k, c_k — неизвестные постоянные, $\xi_k(t)$, $\eta_k(t)$ — стационарные и стационарно связанные центрированные эргодические случайные функции, статистические характеристики которых подлежат определению; корни многочлена Q_0 по предположению различны и имеют отрицательные действительные части. Предполагается, что уравнение (1.1) имеет такое частное решение $x(t)$, все моменты которого конечны (в противном случае задача не имеет смысла), и что известны реализации процесса $x(t)$ при различных значениях ω_0.

Будем считать параметр μ малым и представим функцию $x(t)$ в виде ряда

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots \tag{1.2}$$

Тогда получим следующие разложения для среднего значения и корреляционной функции процесса $x(t)$ (угловыми скобками обозначается, вообще говоря, усреднение по множеству реализаций):

$$\langle x(t)\rangle = x_0(t) + \mu^2 \langle x_2(t)\rangle + \ldots \tag{1.3}$$

$$\langle [x(t) - \langle x(t)\rangle][x(t+\tau) - \langle x(t+\tau)\rangle]\rangle = \mu^2 \langle x_1(t)\, x_1(t+\tau)\rangle +$$
$$+ \mu^3 [\langle x_1(t)\, x_2(t+\tau)\rangle + \langle x_2(t) x_1(t+\tau)\rangle] + \ldots \tag{1.4}$$

(как будет видно из дальнейшего, $\langle x_1(t)\rangle = 0$ в силу равенства нулю средних значений случайных функций $\xi(t)$, $\eta(t)$). Аналогичные разложения имеют место для центральных моментных функций высших порядков, причем первый член ряда для центрального момента k-го порядка процесса $x(t)$ есть просто соответствующий момент k-го порядка процесса $x_1(t)$, взятый с коэффициентом μ^k. Сходимость указанных разложений при достаточно малых μ легко может быть доказана исходя из условия стационарности и ограниченности функций $\xi(t)$, $\eta(t)$. При решении «прямой» задачи, когда моменты этих функций известны, можно, кроме того, дать нижнюю оценку интервала сходимости. В рассматриваемом же случае оценить сходимость заранее невозможно (точнее, возможны лишь грубые качественные оценки), и эта оценка устанавливается в процессе непосредственного вычисления последовательных приближений.

Подставляя ряд (1.2) в уравнение (1.1), приходим к бесконечной системе уравнений

$$Q_0(p)\, x_0 = P_0(p)\, y, \qquad Q_0(p)\, x_1 = -Q_1(t, p)\, x_0 + P_1(t, p)\, y$$
$$Q_0(p)\, x_i = -Q_1(t, p)\, x_{i-1} \qquad (i \geqslant 2) \tag{1.5}$$

Частные решения этих уравнений, соответствующие установившимся колебаниям системы, можно записать в виде

$$x_0(t) = b_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{1.6}$$

$$x_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} G(t-t')\left[-Q_1(t', p')x_0(t') + P_1(t', p')y(t')\right]dt' \left(p' = \frac{d}{dt'}\right) \tag{1.7}$$

$$x_i(t) = -\int\limits_{-\infty}^{t} G(t-t')Q_1(t', p')x_{i-1}(t')\,dt' \qquad (i \geqslant 2) \tag{1.8}$$

где $G(\theta)$ — функция Грина оператора Q_0:

$$G(\theta) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\exp q_s\theta}{Q_0'(q_s)}, \qquad Q_0'(q) = \frac{dQ_0}{dq} \tag{1.9}$$

(через q_s обозначены корни многочлена Q_0). На основании соотношений (1.6) — (1.8) можно после применения операции усреднения выразить среднее значение и центральные моменты процесса $x(t)$ в виде бесконечного ряда, члены которого определяются моментами случайных функций $\xi(t)$, $\eta(t)$. В частности, первый член ряда (1.4) равен

$$\mu^2\langle x_1(t)x_1(t+\tau)\rangle = \mu^2 \int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{t+\tau} G(t-t')G(t+\tau-t'')\langle[-Q_1(t', p')x_0(t') +$$
$$+ P_1(t', p')y(t')][-Q_1(t'', p'')x_0(t'') + P_1(t'', p'')y(t'')]\rangle\,dt'\,dt'' \tag{1.10}$$

Прежде чем перейти к исследованию «обратной» задачи, покажем, что если ряд (1.2) сходится в среднем и среднеквадратичном, то процесс $x(t)$ можно представить в виде $x(t) = f(t)\cos\omega_0(t) + g(t)\sin\omega_0 t$, где $f(t)$, $g(t)$ — стационарные и стационарно связанные (в широком смысле) случайные процессы. Действительно, на основании (1.6) — (1.8) k-й член ряда (1.2) можно представить в виде линейной комбинации членов типа

$$z_k(t)e^{-i\omega_0 t} + z_{l*}(t)e^{i\omega_0 t}, \qquad z_k(t) = \int\limits_{\Gamma_k} G(t-\theta_1)e^{i\omega_0(t-\theta_1)}G(\theta_1-\theta_2)\times$$
$$\times e^{i\omega_0(\theta_1-\theta_2)}\ldots G(\theta_{k-1}-\theta_k)e^{i\omega_0(\theta_{l-1}-\theta_k)}\xi_i(\theta_1)\xi_j(\theta_2)\ldots\xi_l(\theta_k)\,d\Gamma_k \tag{1.11}$$

и аналогичных интегралов, содержащих функции $\eta(t)$ и произведения функций $\xi(t)$, $\eta(t)$. Здесь Γ_k — область k-мерного пространства, определяемая условием $-\infty < \theta_k < \theta_{k-1} < \ldots < \theta_1 < t$; звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину. На основании (1.11) легко убедиться, что из стационарности и стационарной связанности (в узком смысле) процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$ вытекают стационарность и стационарная связанность процессов $z_j(t)$, $z_k(t)$, $z_{j*}(t)$, $z_{k*}(t)$ (в широком смысле), так что сходимость ряда (1.2) в среднеквадратичном есть достаточное условие справедливости сформулированного выше утверждения. Отсюда следует, в частности, что значения процесса $x(t)$ в моменты времени t_k, удовлетворяющие условиям

$$t_k - t_l = (2\pi/\omega_0)(k-l), \quad k - l = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \tag{1.12}$$

совпадают со значениями некоторого стационарного в широком смысле случайного процесса. Аналогично можно показать, что моменты высших порядков этого процесса также зависят лишь от разностей значений t (при условии сходимости ряда (1.2) для соответствующих моментов). Однако эргодичность указанного процесса принимается в качестве гипотезы; в случае невыполнения этого условия постановка задачи идентификации по семейству реализаций $x(t)$, зависящему лишь от одного параметра ω_0, не имеет смысла.

2. Пусть, таким образом, известны среднее значение и центральные моменты процесса $x(t)$, вычисленные для значений $t = t_k, t_l, \ldots$, удовлетворяющих условию (1.12). Соотношения (1.6) (решение первого уравнения (1.5)), (1.10), а также аналогичные соотношения для моментов высшего порядка процесса $x_1(t)$ будут использоваться в качестве основных при определении статистических характеристик случайных функций $\xi(t)$, $\eta(t)$. Так как параметры b_0, φ_0 функции $x_0(t)$ и моменты процесса $x_1(t)$ неизвестны, то будем определять их при помощи последовательных приближений по известным суммам бесконечных рядов (1.3), (1.4) и аналогичных рядов для высших центральных моментов процесса $x(t)$. Положим вначале

$$x_0(t) = \langle x(t)\rangle = [\langle f(t)\rangle^2 + \langle g(t)\rangle^2]^{1/2} \sin [\omega_0 t + \operatorname{arc\,tg} (\langle g(t)\rangle / \langle f(t)\rangle)] \quad (2.1)$$

Здесь величины $\langle f(t)\rangle$, $\langle g(t)\rangle$ определяются на основании измерений значений $x(t)$ в двух семействах точек t_k, удовлетворяющих условиям (1.12) и соответствующих нулям функций $\sin \omega_0 t$, $\cos \omega_0 t$. В результате приходим к следующей задаче: определить коэффициенты первого уравнения (1.5) по его решению (1.6), где b_0, φ_0 — известные функции параметра ω_0. Как показано в работе [4], эта задача сводится к аппроксимации функции $b_0(\zeta) \exp[i\varphi_0(\zeta)]$ комплексного переменного $\zeta = \varkappa + i\omega_0$, значения которой заданы на мнимой оси, функцией, представляющей отношение полиномов степеней m и n и имеющей полюсы лишь в левой полуплоскости; нули и полюсы этой функции определяют соответственно корни полиномов $P_0(q)$ и $Q_0(q)$. Некоторые способы практического построения решения приведены, например, в книге [5].

Приравняем далее корреляционную функцию процесса $x(t)$ первому члену ряда (1.4) для S значений ω_0, где S должно быть не меньшим числа отличных от нуля элементов матрицы корреляционных функций $K(v)$ процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$. В соотношении (1.10), где теперь известны a_k, c_k, b_0, φ_0 и $G(\theta)$, перейдем к переменным $u = t'' + t'$, $v = t'' - t'$ и выполним интегрирование по u. Подставив в результат известные значения $\sin(\omega_0 t_k + \varphi_0)$, $\cos(\omega_0 t_k + \varphi_0)$, получим систему S интегральных уравнений Фредгольма первого рода относительно функций $K(v)$. В общем случае такую систему надо решать приближенно, например, как это часто делается в задачах идентификации [6], задавая для $K(v)$ функциональные зависимости, содержащие конечное число неизвестных параметров γ, определяемых по методу наименьших квадратов. Однако иногда (см., в частности, пример п. 3) удается непосредственно получить формулу обращения, выражающую $K(v)$ через известные функции $R_1(\tau) = \mu^2\langle x_1(t_k)\, x_1(t_k + \tau)\rangle$.

Следующий шаг итерационного процесса заключается в уточнении значений a_k, c_k за счет использования двух членов ряда в выражении для $\langle x(t)\rangle$. Для этого известные функции $K(v)$ подставляются в соотношение для $\langle x_2(t)\rangle$, составленное на основании (1.7), (1.8) (в работе [3] проведены вычисления $\langle x_2(t)\rangle$ для частного случая $m = 0$). Полагая $x_0(t) = \langle x(t)\rangle - \mu^2\langle x_2(t)\rangle$, находим уточненные значения b_0, φ_0, и, возвращаясь к решению первой задачи, уточняем a_k, c_k, а следовательно и функцию $G(\theta)$.

Общая схема предлагаемого итерационного процесса состоит в следующем. Каждый этап, связанный с добавлением членов порядка μ^r, начинается с рассмотрения соотношения для r-го момента процесса $x_1(t)$ (как отмечалось выше, в этом приближении указанный момент, взятый с коэффициентом μ^r, совпадает с соответствующим центральным моментом процесса $x(t)$). Из этого соотношения находим значения параметров, определяющих моменты r-го порядка процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$, по способу, который аналогичен описанному выше для моментов второго порядка. Определив затем слагаемые порядка μ^r, входящие в ряды для центральных моментов s-го порядка процесса $x(t)$ $(s < r)$, уточним $x_0(t)$ и моменты s-го порядка процесса $x_1(t)$; после этого уточняются значения a_k, c_k и значения параметров, определяющих моменты s-го порядка процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$ $(2 \leqslant s \leqslant r - 1)$. Следует заметить, однако, что такая схема, использующая информацию о моментах высокого порядка процесса $x(t)$, не является единственно приемлемой: уточнение, связанное с добавлением слагаемых порядка μ^r в ряд для момента s-го порядка процесса $x(t)$ $(s < r)$, можно осуществить непосредственно, задавая (с точностью до конечного числа параметров δ) зависимости, связывающие

щие моменты r-го порядка процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$ с моментами низших порядков. В этом случае параметры δ определяются одновременно с уточнением ранее найденных значений параметров γ, определяющих моменты низших порядков.

Следует отметить, что в случае «квазигармонических» систем, допускающих приведение к стандартной форме [7], соотношение для $R_1(\tau)$ можно существенно упростить, произведя предварительно усреднение за период членов, не содержащих функций $\xi(t)$, $\eta(t)$. Полученные в результате упрощенные приближенные соотношения могут оказаться полезными, например, при решении задачи на аналоговом устройстве путем непосредственного подбора параметров модели. Пример решения задачи по указанному методу приведен ниже.

3. Рассмотрим в качестве примера систему второго порядка со случайно изменяющимся коэффициентом демпфирования

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\,[1 + \mu\xi(t)]\,\frac{dx}{dt} + \Omega^2 x = a\cos\omega_0 t \tag{3.1}$$

Функция $G(\theta)$ в этом случае имеет вид

$$G(0) = \omega_1^{-1}\exp(-\alpha\theta)\sin\omega_1\theta, \qquad \omega_1 = \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2} \tag{3.2}$$

Будем для простоты считать значения α, Ω известными и поставим задачу об определении корреляционной функции $\mu^2 K(v)$ процесса $\mu\xi(t)$ по одной реализации процесса $x(t)$. Параметры b_0, φ_0 в рассматриваемом случае равны

$$b_0 = a\,[(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2]^{-1/2}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arc\,tg}\,[(\Omega^2 - \omega_0^2)\,/\,2\alpha\omega_0]$$

Составляя выражение (1.10) и используя (3.2), получим после интегрирования по переменной $u = t'' + t'$ (рассматривается случай $\sin(\omega_0 t_k + \varphi_0) = 1$):

$$R_1(\tau) = {}^1/_4\,\mu^2(\alpha b_0\omega_0\,/\,\omega_1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} K(v)\,[C^+\cos(\omega_0+\omega_1)\,|v-\tau| + D^+\sin(\omega_0+\omega_1)\,|v-\tau| +$$

$$+ C^-\cos(\omega_0-\omega_1)\,|v-\tau| - D^-\sin(\omega_0-\omega_1)\,|v-\tau|]\exp(-\alpha\,|v-\tau|)\,dv \tag{3.3}$$

Здесь

$$C^{\pm} = 1/\alpha + \alpha\{[\alpha^2 + (\omega_0 \pm \omega_1)^2]^{-1} - (\alpha^2 + \omega_0^2)^{-1} - (\alpha^2 + \omega_1^2)^{-1}\}$$

$$D^{\pm} = \omega_1(\alpha^2 + \omega_1^2)^{-1} \pm \omega_0(\alpha^2 + \omega_0^2)^{-1} \mp (\omega_0 \pm \omega_1)\,[\alpha^2 + (\omega_0 \pm \omega_1)^2]^{-1}$$

При выводе соотношения (3.3) использованы свойство четности функции $K(v)$ и условие $\exp(\pm i\omega_0\tau) = 1$.

Следует указать, что в рассматриваемом случае интегральное уравнение первого рода (3.3) можно непосредственно разрешить относительно неизвестной функции $K(v)$ [8]. Это решение имеет вид

$$\mu^2 K(v) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}(\alpha b_0\omega_0\,/\,\omega_1)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\{[C^+\alpha + D^+(\omega_0+\omega_1-\omega)]\,[\alpha^2 + (\omega_0+\omega_1-\omega)^2]^{-1} +$$

$$+ [C^+\alpha + D^+(\omega_0+\omega_1+\omega)]\,[\alpha^2 + (\omega_0+\omega_1+\omega)^2]^{-1} +$$

$$+ [C^-\alpha - D^-(\omega_0-\omega_1+\omega)]\,[\alpha^2 + (\omega_0-\omega_1+\omega)^2]^{-1} +$$

$$+ [C^-\alpha - D^-(\omega_0-\omega_1-\omega)]\,[\alpha^2 + (\omega_0-\omega_1-\omega)^2]^{-1}\}^{-1} e^{-i\omega v}\,d\omega \tag{3.4}$$

где $\Phi(\omega)$ — спектральная плотность «выборочного» процесса $\mu x_1(t_k)$:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} R_1(\tau)\,e^{i\omega\tau}\,d\tau$$

При этом предполагается, что функция $K(v)$ удовлетворяет установленным в [8] требованиям, обеспечивающим единственность и корректность найденного решения. Необходимо только иметь в виду, что значения $R_1(\tau)$ известны лишь для дискретного множества точек $\tau_i = 2\pi i / \omega_0$; вопросы точности получаемых оценок в данной работе не рассматриваются.

Отметим, что найденное решение может быть использовано и в том случае, когда к полезному сигналу, определяемому правой частью уравнения (3.1), добавляется аддитивная случайная помеха вида $\mu\zeta(t)$, которая не может измеряться. Действительно, как нетрудно показать, составляющие корреляционной функции процесса $x_1(t)$, которые соответствуют этой помехе, не содержат множителя b_0^2. Поэтому их можно отделить, варьируя амплитуду a полезного сигнала, после чего функция $K(v)$ находится по методу, изложенному выше.

Проиллюстрируем теперь результат, получающийся при использовании метода усреднения (см. работу [9], где при помощи подобного метода рассмотрен ряд других «прямых» задач). Для простоты рассмотрим случай точного резонанса ($\omega_0 = \Omega$). Положив $\alpha = \mu\alpha_1$, $a = \mu a_1$ и использовав замену переменных

$$x(t) = b(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad dx(t)/dt = \omega_0 b(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \tag{3.5}$$

перейдем от (3.1) к уравнениям в стандартной форме относительно функций $b(t)$, $\varphi(t)$. В этих уравнениях усредняются за период $2\pi/\omega_0$ члены, не содержащие $\xi(t)$, после чего решения для усредненных амплитуды и фазы, обозначаемых по-прежнему через b, φ, ищутся в виде рядов

$$b(t) = b_0 + \mu b_1(t) + \ldots, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \mu\varphi_1(t) + \ldots$$

Окончательное выражение первого приближения для корреляционной функции случайной составляющей амплитуды μb_1 имеет вид

$$\mu^2 \langle b_1(t)\, b_1(t+\tau)\rangle = {}^1/_2\, \mu^2\alpha b_0^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(v)\, e^{-\alpha|v-\tau|}(1 + {}^1/_2 \cos 2\omega_0 v)\, dv \tag{3.6}$$

Сравнивая (3.6) с «точным первым приближением» (3.3), можно оценить область применимости метода усреднения. Нетрудно убедиться, что эти выражения совпадут, если во втором из них для случая $\omega_0 = \Omega$ отбросить члены высшего порядка малости относительно α/Ω и, кроме того, положить

$$\cos(\omega_0 - \omega_1)\tau \approx 1, \qquad \sin(\omega_0 - \omega_1)\tau \approx 0 \tag{3.7}$$

$$\cos(\omega_0 - \omega_1)v \approx 1, \qquad \sin(\omega_0 - \omega_1)v \approx 0 \tag{3.8}$$

Требование малости величины α/Ω очевидно; при выполнении этого требования выполняются и условия (3.8). Что же касается условий (3.7), то они эквивалентны условию $\Omega\tau \ll \pi(\Omega/\alpha)^2$ и отражают известный [7] факт, что метод усреднения дает хорошее приближение лишь на интервалах времени порядка $1/\mu$.

Автор благодарит Л. А. Галина и А. А. Первозванского за все замечания, высказанные при обсуждении работы.

Поступила 5 VI 1967

Институт проблем механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Human Vibration Research. Lippert S. (ed). Pergamon Press, 1963.
2. Математическое описание характеристик человека-оператора как звена системы управления (обзор). Вопросы ракетной техники, Изд-во иностр. лит., 1965, № 12.
3. Диментберг М. Ф. Амплитудно-частотная характеристика системы со случайно изменяющимися параметрами. Инж. ж. МТТ, 1966, № 2.
4. Галин Л. А. Определение дифференциального уравнения прибора на основании испытания при вынужденных колебаниях. ПММ, 1946, т. 10, вып. 1.
5. Боде Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
6. Цыпкин Я. З. Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах. Автоматика и телемеханика, 1966, № 1.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е, М., Физматгиз, 1963.
8. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. М., Физматгиз, 1962.
9. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. М. «Наука», 1966.