К ПРИНЦИПУ СВЕДЕНИЯ

С. И. Горшин (Алма-Ата)

1. Рассмотрим следующую возмущенную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, x, y) + Q(t, x, y), \qquad \frac{dx}{dt} = X(t, x, y) + R(t, x, y) \tag{1.1}$$

Здесь t — вещественная независимая переменная; x, y — искомые функции от t с областью значений в некотором полном линейном нормированном пространстве E. Функции $X(t, x, y)$, $Y(t, x, y)$ заданы в некоторой области

$$t \geqslant 0, \qquad \|x\| \leqslant H, \qquad \|y\| \leqslant H \tag{1.2}$$

из пространства E, обращающиеся в нули при $x = y = \theta$; $Q(t, x, y)$, $R(t, x, y)$ — некоторые неизвестные функции из пространства E, характеризующие постоянно действующие возмущения, вообще говоря, не обращаются в нули при $x = y = \theta$, а удовлетворяют в области (1.2) условию

$$\|Q(t, x, y)\| \leqslant \rho, \qquad \|R(t, x, y)\| \leqslant \rho \tag{1.3}$$

где $\rho > 0$ — достаточно малое число.

Допустим, что правые части системы уравнений (1.1) удовлетворяют в области (1.2) следующим условиям.

1) Функции $X(t, x, y)$, $Y(t, x, y)$, $Q(t, x, y)$, $R(t, x, y)$ однозначны и непрерывны по t.

2) Для любых двух точек (t, x', y') и (t, x'', y'') имеет место неравенство

$$\|U(t, x', y') - U(t, x'', y'')\| \leqslant \alpha(t)\, \Delta u \quad (\Delta u = \max[\|x' - x''\|, \|y' - y''\|])$$

где $\alpha(t)$ — вещественная, ограниченная, непрерывная функция при $t \geqslant 0$, а $U(t, x, y)$ означает любую из функций $X(t, x, y)$, $Y(t, x, y)$, $Q(t, x, y)$ или $R(t, x, y)$.

Переменную y назовем критической, а переменную x — основной.

Решение $x = y = \theta$ системы уравнений (1.1) без возмущений в дальнейшем будем называть нулевым решением. Пусть $x = z(t)$ — непрерывная функция из пространства E, удовлетворяющая условию $\|z(t)\| \leqslant H$. Рассмотрим уравнение

$$dy / dt = Y(t, z(t), y) + Q(t, z(t), y) \tag{1.4}$$

которое получено из первого уравнения системы (1.1) путем замены $x = z(t)$.

Наряду с уравнением (1.4) будем рассматривать уравнение без возмущений

$$dy / dt = Y(t, z(t), y) \tag{1.5}$$

Определение 1.1. Будем говорить, что решения уравнения (1.5) устойчивы с постоянно действующими возмущениями при численно достаточно малой основной переменной, если для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < H)$ и для любого начального значения $t = t_0 \geqslant 0$ при любом указанном выборе функции $x = z(t)$ существуют два других числа $r = r(\varepsilon, t_0) > 0$ и $\rho = \rho(\varepsilon, t_0) > 0$ таких, что коль скоро

$$\|y(t_0)\| \leqslant r, \qquad \|z(t_0)\| \leqslant r$$

то при всех тех значениях $t > t_0$, при которых

$$\|z(t)\| \leqslant \varepsilon$$

будет тем самым иметь место и неравенство

$$\|y(t)\| < \varepsilon$$

при любых возмущениях $Q(t, x, y)$, удовлетворяющих условию (1.3). Здесь $y(t)$ — есть решение уравнения (1.4), проходящее через точку (t_0, y_0).

Если указанные числа $r > 0$ и $\rho > 0$ не зависят от выбора начального значения $t = t_0 \geqslant 0$, то решения уравнения (1.5) назовем равномерно устойчивыми с постоянно действующими возмущениями при численно достаточно малой основной переменной.

Определение 1.2. Будем говорить, что решения уравнения (1.5) неустойчивы с постоянно действующими возмущениями при численно достаточно малой основной переменной, если для любого $t = t_0 \geqslant 0$ и любого достаточно малого числа $\rho > 0$ существует такая точка (t_0, y_0) при сколь угодно малом значении величины $\|y_0\| > 0$ и такое возмущение $Q(t, x, y)$, удовлетворяющее условию (1.3), что при любом указанном выборе функции $x = z(t)$, среди решений уравнения (1.4), проходящих через эту точку, всегда найдется такое решение, которое при некотором значении $t > t_0$ будет удовлетворять неравенству

$$\| y(t) \| \geqslant \varepsilon$$

где $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < H$) — некоторая постоянная, не зависящая от выбора функции $x = z(t)$, указанной точки (t_0, y_0) и выбора возмущений $Q(t, x, y)$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.1. Если возмущенная система дифференциальных уравнений такова, что решения первого уравнения устойчивы с постоянно действующими возмущениями при численно достаточно малой основной переменной, а также решения второго уравнения устойчивы с постоянно действующими возмущениями при численно достаточно малой критической переменной, то нулевое решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Доказательство. Пусть задано число $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < H$) и начальное значение $t = t_0 \geqslant 0$. Допустим $x = x(t)$, $y = y(t)$ — решение возмущенной системы уравнений (1.1), проходящее через точку (t_0, x_0, y_0). Тогда по условию теоремы найдутся числа $r_1 = r_1(\varepsilon, t_0) > 0$ и $\rho_1 = \rho_1(\varepsilon, t_0) > 0$ такие, что коль скоро

$$\| x(t_0) \| \leqslant r_1, \qquad \| y(t_0) \| \leqslant r_1$$

о при всех тех значениях $t \geqslant t_0$, при которых

$$\| x(t) \| \leqslant \varepsilon, \qquad \| Q(t, x, y) \| \leqslant \rho_1$$

будет тем самым выполняться неравенство $\| y(t) \| < \varepsilon$. При этом найдутся также числа $r_2 = r_2(\varepsilon, t_0) > 0$ и $\rho_2 = \rho_2(\varepsilon, t_0) > 0$ такие, что коль скоро $\| x(t_0) \| \leqslant r_2$, $\| y(t_0) \| \leqslant r_2$, то при всех тех значениях $t > t_0$, при которых $\| y(t) \| \leqslant \varepsilon$, $\| R(t, x, y) \| \leqslant \rho_2$, будет тем самым выполняться неравенство $\| x(t) \| < \varepsilon$.

Если положить $r = \min(r_1, r_2)$, $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, то коль скоро $x(t_0) \| \leqslant r$, $\| y(t_0) \| \leqslant r$, то при всех тех значениях $t > t_0$, при которых $\| x(t) \| \leqslant \varepsilon$, $\| Q(t, x, y) \| \leqslant \rho$, будет тем самым и

$$\| y(t) \| < \varepsilon \tag{1.6}$$

и при всех тех значениях $t > t_0$, при которых $\| y(t) \| \leqslant \varepsilon$, $\| R(t, x, y) \| \leqslant \rho$, будет тем самым и

$$\| x(t) \| < \varepsilon \tag{1.7}$$

Отсюда следует, что неравенства (1.6) и (1.7) не могут одновременно обратиться в равенства, а тем самым и ни одно из этих неравенств не может обратиться в равенство. Следовательно, при всех значениях $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ имеют место неравенства (1.6) и (1.7), т. е. нулевое решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Теорема 1.2. Если возмущенная система дифференциальных уравнений такова, что решения первого уравнения неустойчивы с постоянно действующими возмущениями при численно достаточно малой основной переменной, то нулевое решение неустойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Теорема очевидна. Ясно, что вместо первого уравнения системы можно рассматривать ее второе уравнение.

2. Допустим, что функция $X(t, x, y)$ имеет следующий вид:

$$X(t, x, y) = P(t, x) + N(t, y) + L(t, x, y) \tag{2.1}$$

Здесь $P(t, x)$ — функция, непрерывная по t, линейная относительно x, т. е.

$$P(t, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 P(t, x_1) + \alpha_2 P(t, x_2)$$

и удовлетворяет условию

$$\| P(t, x) \| \leqslant \| x \| p(t)$$

где α_1 и α_2 — любые вещественные числа, а $p(t)$ — вещественная, непрерывная, ограниченная функция. Функции $N(t, y)$ и $L(t, x, y)$ удовлетворяют неравенствам

$$\| N(t, y) \| \leqslant \| y \| \gamma(\| y \|), \qquad \| L(t, x, y) \| \leqslant \| x \| \delta(\| x \|, \| y \|)$$

где $\gamma(\| y \|) \to 0$ при $\| y \| \to 0$, $\delta(\| x \|, \| y \|) \to 0$ при $\| x \| + \| y \| \to 0$.

Допустим, что линейное уравнение

$$dx / dt = P(t, x)$$

таково, что любое его ограниченное решение $x = f(t, t_0, x_0)$, проходящее через точку (t_0, x_0), удовлетворяет при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ неравенству

$$\| f(t, t_0, x_0) \| \leqslant \| x_0 \| B \exp[-\alpha(t - t_0)] \tag{2.2}$$

где $B \geqslant 1$ и $\alpha > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от t_0 и x_0.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Если возмущенная система дифференциальных уравнений такова, что решения первого уравнения устойчивы с постоянно действующими возмущениями при численно достаточно малой основной переменной, а функция X имеет вид (2.1) и удовлетворяет указанным условиям, то нулевое решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Доказательство. Пусть задано число $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < H)$ и начальное значение $t = t_0 \geqslant 0$. Пусть $r_1 = r_1(\varepsilon, t_0)$ и $\rho_1 = \rho_1(\varepsilon, t_0)$ — те числа, которые определяются при помощи уравнения (1.5). Допустим

$$r = \min\left(r_1, \frac{\varepsilon}{5B}\right), \qquad \rho = \min\left(\rho_1, \frac{\alpha\varepsilon}{5B}\right)$$

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ — решение возмущенной системы уравнений (1.1), проходящее через точку (t_0, x_0, y_0) и удовлетворяющее условию

$$\| x(t_0) \| \leqslant r, \qquad \| y(t_0) \| \leqslant r$$

Тогда, согласно условиям теоремы, следует, что при всех тех значениях $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ при которых имеет место неравенство

$$\| x(t) \| \leqslant \varepsilon \tag{2.3}$$

будет тем самым иметь место и неравенство

$$\| y(t) \| < \varepsilon \tag{2.4}$$

при любых возмущениях $Q(t, x, y)$, удовлетворяющих условию (1.3).

Рассмотрим сегмент $[t_0, t]$, на котором имеет место неравенство (2.3), а тем самым и неравенство (2.4). Тогда функция $x = x(t)$, входящая в решение системы (1.1), будет удовлетворять равенству [2]

$$x(t) = f(t, t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} f[t, \tau, N(\tau, y(\tau))]\, d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} f[t, \tau, L(\tau, x(\tau), y(\tau))]\, d\tau + \int_{t_0}^{t} f[t, \tau, R(\tau, x(\tau), y(\tau))]\, d\tau$$

Следовательно,

$$\|x(t)\| \leqslant rBe^{[-\alpha(t-t_0)]} + \int_{t_0}^{t} Be^{[-\alpha(t-\tau)]}\varepsilon\gamma(\varepsilon)\,d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} Be^{[-\alpha(t-\tau)]}\varepsilon\delta(\varepsilon, \varepsilon)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} Be^{[-\alpha(t-\tau)]}\rho\,d\tau$$

Отсюда получаем, что на сегменте $[t_0, t]$ имеет место неравенство

$$\|x(t)\| \leqslant rB + \varepsilon B\alpha^{-1}\gamma(\varepsilon) + \varepsilon B\alpha^{-1}\delta(\varepsilon, \varepsilon) + B\alpha^{-1}\rho \leqslant {}^4/_5\,\varepsilon$$

если только число $\varepsilon > 0$ было предварительно взято настолько малым, что

$$B\alpha^{-1}\gamma(\varepsilon) \leqslant {}^1/_5, \qquad B\alpha^{-1}\delta(\varepsilon, \varepsilon) \leqslant {}^1/_5$$

а возмущения $R(t, x, y)$ удовлетворяли условию (1.3).

Следовательно, если на сегменте $[t_0, t]$ имеет место неравенство (2.3), то тем самым имеет место и более сильное неравенство

$$\|x(t)\| \leqslant {}^4/_5\,\varepsilon$$

Отсюда следует, что неравенства (2.3) и (2.4) будут иметь место при любом значении $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ и любых возмущениях, удовлетворяющих условию (1.3), т. е. нулевое решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Поступила 13 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Персидский К. П. Некоторые критические случаи счетных систем. Изв. АН КазССР, сер. матем. и механ., 1951, вып. 5.
2. Персидский К. П. Об устойчивости решений счетной системы дифференциальных уравнений. Изв. АН КазССР, сер. матем. и механ., 1948, вып. 2.
3. Ятаев М. К исследованию одного критического случая устойчивости. Изв. АН КазССР, сер. физ.-матем., 1954, № 129.
4. Горшин С. И. Об устойчивости решений уравнений в линейном нормированном пространстве при постоянно действующих возмущениях. Изв. АН КазССР, сер. физ.-матем. н., 1965, вып. 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВАНИИ ИЗМЕРЕНИЯ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

М. Ф. Диментберг

(Москва)

При построении математического описания механических систем, систем автоматического управления и т. п. на основании результатов измерений процессов на входе и выходе системы (т. е. при решении задачи идентификации) в ряде случаев приходится сталкиваться с тем фактом, что процесс на выходе системы является случайным даже при строго детерминированном входном сигнале (при условии тождественного равенства нулю процесса на выходе в случае отсутствия сигнала на входе). Это обстоятельство свидетельствует о «стохастичности» исследуемой системы; достаточно полная математическая модель такой системы должна иметь параметры, являющиеся случайными функциями времени, а идентификация подобной системы должна включать определение статистических характеристик этих изменений параметров. Указанные характеристики могут использоваться, в частности, для оценки качества и надежности систем, например, в тех случаях, когда «номинальные» значения параметров лежат вблизи границы области устойчивости.