

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ТЕПЛООВОГО ВЗРЫВА

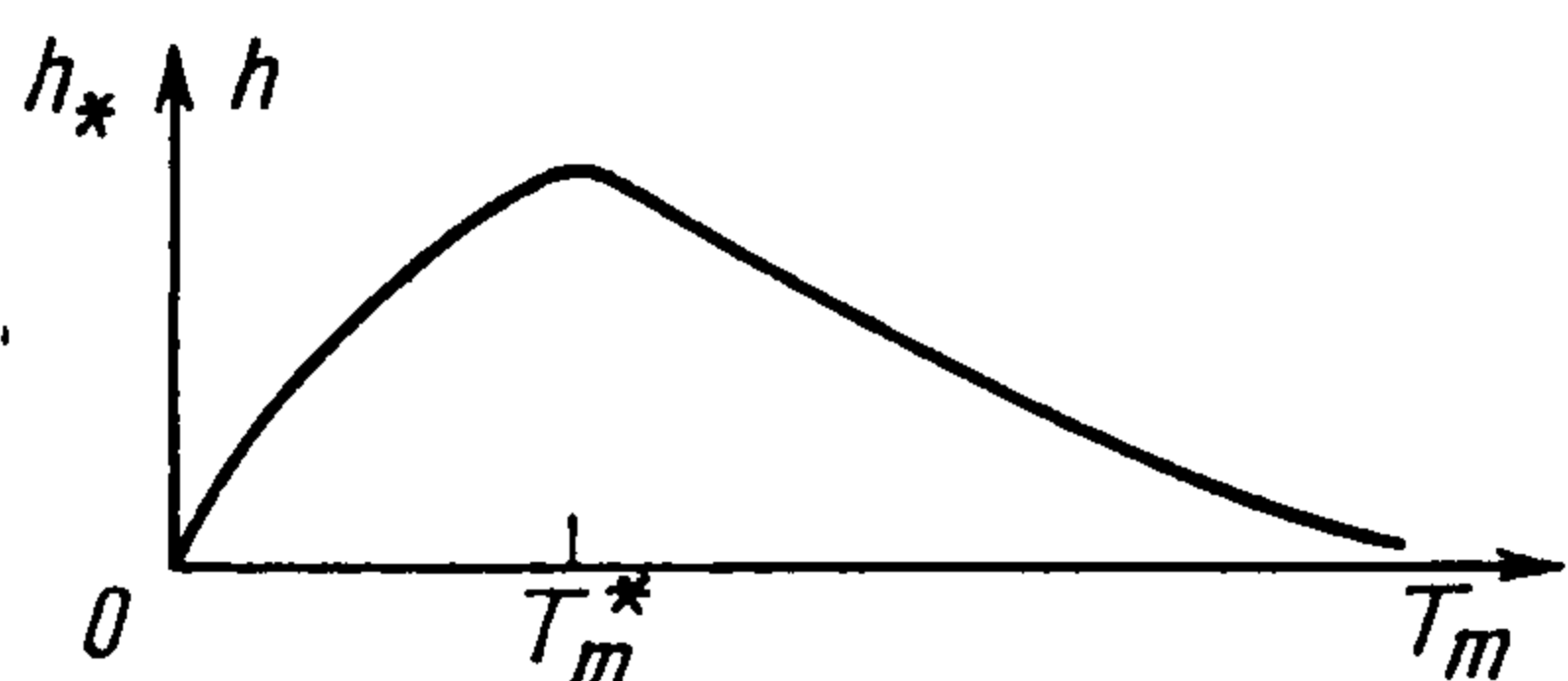
С. А. Каганов

(Саратов)

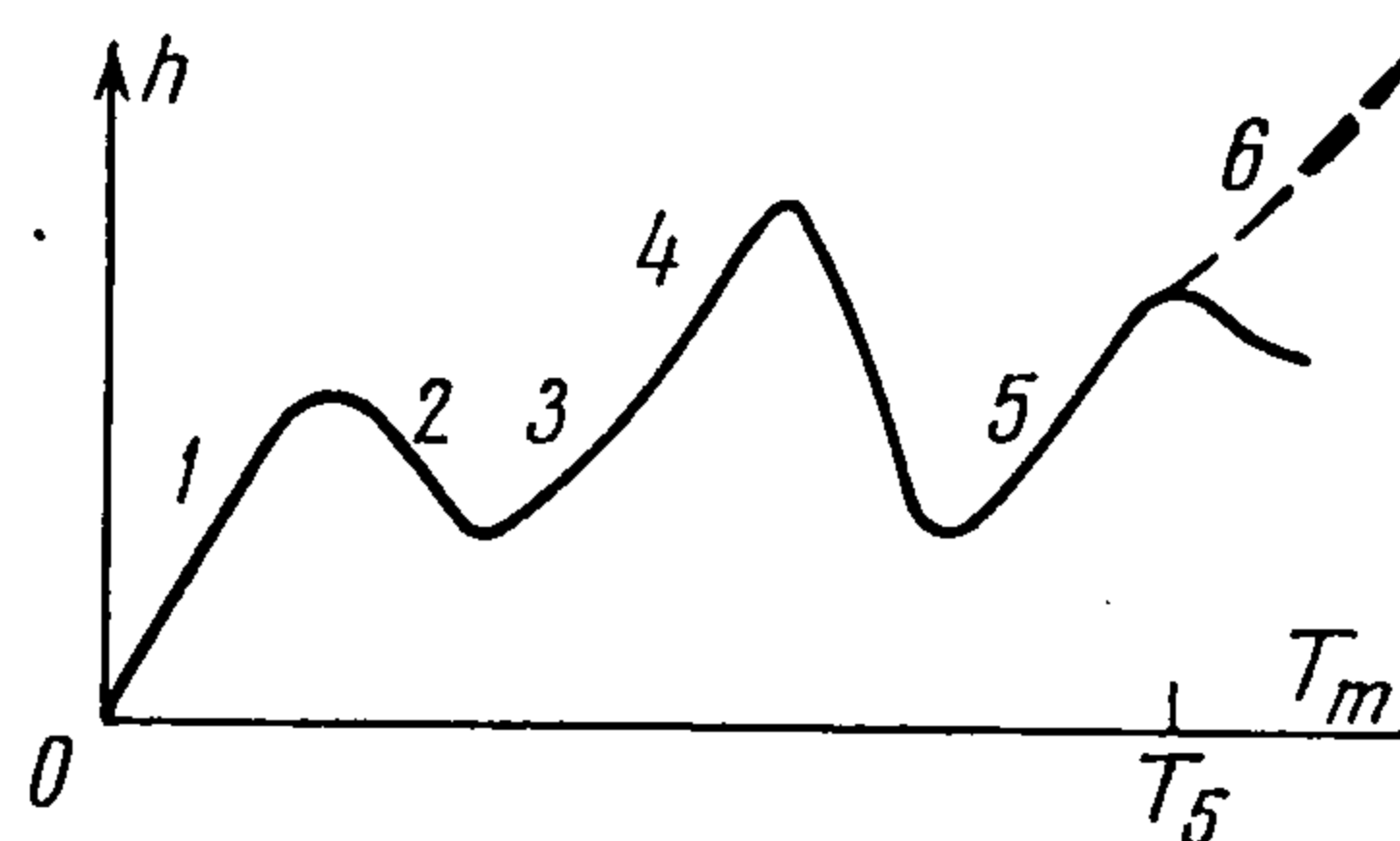
Как известно [1,2], в стационарной теории теплового взрыва рассматриваются решения краевой задачи

$$\Delta T + \varphi(T) = 0, \quad T|_{\Gamma} = 0 \quad (0.1)$$

Здесь  $\Gamma$  — поверхность, ограничивающая область  $G$  (сосуд),  $T$  — температура,  $\varphi(T)$  — положительная, монотонно возрастающая, дифференцируемая в  $[0, +\infty]$  функция. Если решение задачи (0.1) существует, то считается, что в сосуде  $G$  взрыва не происходит, в противном случае — происходит. В [1,2] задача рассматривалась для  $\varphi(T) = e^T$  и областей с плоской, цилиндрической и сферической симметрией.



Фиг. 1



Фиг. 2

Соответственно этому задача может быть сведена к задаче для отрезка, круга и шара с одной независимой переменной, равной расстоянию от центра.

Запишем задачу (0.1) для отрезка

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \varphi(T) = 0, \quad T|_{x=\pm h} = 0 \quad (0.2)$$

В указанных работах показано, что для  $\varphi(T) = e^T$  существует критическое значение  $h = h_*$ , что для  $0 \leq h \leq h_*$  решение задачи (0.2) существует, а для  $h > h_*$  не существует. При этом для  $0 < h < h_*$  имеется два решения. Если обозначить  $T_m = T(0)$  максимальное значение температуры и ввести функцию  $h = h(T_m)$ , то соответствующая кривая имеет вид (фиг. 1). Отметим, что ввиду симметрии выполняется условие  $dT/dx = 0$  при  $x = 0$  и функция  $h(T_m)$  будет однозначной и непрерывной (решение задачи Коши для уравнения (0.2) с условиями  $dT/dx = 0, T = T_m$  при  $x = 0$  существует и непрерывно зависит от  $T_m$ ). В случае круга имеет место аналогичный результат. В случае шара также существует критическое значение радиуса, но кривая  $h(T_m)$ , как следует из [2], имеет более сложный вид. В [3] задача рассматривалась для функций  $\varphi(T)$  достаточно общего вида. В общем случае для данного  $h$  может существовать более двух решений, а возможна и единственность. Кривая  $h(T_m)$  может иметь несколько максимумов (фиг. 2). Вид кривой зависит от  $\varphi(T)$ .

Если  $\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \varphi(T) = 0$  при  $T \rightarrow \infty$ , то  $h(T_m) \rightarrow \infty$  при  $T_m \rightarrow \infty$ . Если  $\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \varphi(T) = A$  при  $T \rightarrow \infty$ , где  $0 < A < \infty$ , то  $\lim_{T_m \rightarrow \infty} h(T_m)$  будет конечной величиной большей нуля. Если  $\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \varphi(T) = \infty$  при  $T \rightarrow \infty$ , то  $h(T_m) \rightarrow 0$  при  $T_m \rightarrow \infty$ .

В [4] проведено исследование устойчивости стационарных решений для  $\varphi(T) = e^T$  и перечисленных симметричных областей. Показано, что устойчивыми являются лишь те решения, для которых  $T_m < T_m^*$ , где  $h(T_m^*) = h_*$ . В [5] рассмотрены некоторые вопросы устойчивости для областей произвольной формы и функций  $\varphi(T)$ , для которых  $\varphi''(T) > 0$ . Именно, в [5] показано, что существуют настолько малые области, для которых малые решения устойчивы, и если для области  $G$  существует устойчивое решение, то и для любой области  $G' \subseteq G$  существует устойчивое решение.

Ниже исследуется устойчивость для произвольных функций  $\varphi(T)$ . Предполагается, что  $\varphi'(T)$  ограничено в любом конечном интервале. В § 1 рассмотрен случай симметричных областей. В § 2 этот же случай рассмотрен с помощью другого метода. В § 3 результаты обобщаются на произвольные области.

§ 1. Рассмотрим задачу (0.2) для отрезка. В случае круга и шара рассуждения аналогичны. Разобьем кривую  $h(T_m)$  на участки, соответствующие монотонному изменению функции (фиг. 2). Для каждого из участков рассмотрим семейство решений  $T(x, h)$ , непрерывно зависящее от  $h$ . Легко видеть, что  $T' = dT/dh$  удовлетворяет уравнению

$$d^2T'/dx^2 + \varphi'(T) T' = 0 \quad (1.1)$$

и условию

$$dT'/dx = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (1.2)$$

Любое решение  $\psi(x)$  задачи

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \varphi'(T)\psi = 0, \quad \frac{d\psi}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad (1.3)$$

имеет вид  $\psi = cT'$ , где  $c$  — постоянная, и обратно. Поэтому, если  $T'$  обращается в нуль внутри интервала  $(-h, h)$ , то и  $\psi$  обладает этим свойством, и обратно.

Используя метод малых возмущений при исследовании устойчивости стационарного решения, приходим к задаче об определении знака наименьшего собственного значения  $\lambda$ :

$$d^2\psi/dx^2 + \varphi'(T)\psi = -\lambda\psi, \quad \psi|_{x=\pm h} = 0 \quad (1.4)$$

Если наименьшее собственное значение отрицательно, то решение  $T(x, h)$  неустойчиво, если же положительно, то устойчиво. Известно [6], что наименьшему собственному значению соответствует собственная функция, не обращающаяся в нуль внутри рассматриваемого интервала и что с увеличением интервала наименьшее собственное значение убывает.

Исследование устойчивости удобно связать с понятием огибающей семейства  $T(x, h)$  интегральных кривых задачи (0.2), соответствующих непрерывной ветви решений. Именно, докажем, что если семейство имеет огибающую, то каждая кривая, касающаяся огибающей, соответствует неустойчивому решению. Обратно, если для некоторого  $h_0$  решение неустойчиво, то существует огибающая семейства  $T(x, h)$  для  $h$  достаточно близких к  $h_0$ .

Действительно, пусть семейство  $T(x, h)$  имеет огибающую и огибающая касается кривой  $T(x, h_0)$  в точке с абсциссой  $x_0$  ( $0 < x_0 < h_0$ ). Тогда существует решение уравнения (1.1) с условием  $T' = 0$  при  $x = \pm x_0$ . Поэтому существует решение задачи (1.3) с  $\lambda = 0$  и удовлетворяющее условию  $\psi|_{x=\mp x_0} = 0$  при  $x = x_0$  и тогда существует решение задачи (1.4) для некоторого  $\lambda < 0$ , т. е. рассматриваемое решение неустойчиво. Обратно предположим, что решение  $T(x, h_0)$  неустойчиво, т. е. существует решение задачи (1.4) с первым собственным значением  $\lambda_0 < 0$ .

Так как при уменьшении интервала первое собственное значение возрастает и для достаточно малых интервалов делается положительным, то ввиду непрерывной зависимости первого собственного значения от длины интервала найдется точка  $x_0$ ,  $0 < x_0 < h_0$ , что для интервала  $(-x_0, x_0)$  первое собственное значение равно нулю. Но так как  $T' = c\psi$ , то  $T' = 0$  при  $x = \pm x_0$ .

Далее ввиду непрерывной зависимости собственного значения от коэффициентов и величины интервала, если существует решение задачи (1.4) с  $\lambda_0 < 0$  для  $h = h_0$ , то для  $h$ , достаточно близких к  $h_0$ , задача (1.4) также имеет отрицательные первые собственные значения, и функции  $T(x, h)$  будут обращаться в нуль для  $h$  из указанной окрестности в точках  $x$ , лежащих в некоторой окрестности  $x_0$ . А это означает, что соответствующее семейство  $T(x, h)$  имеет огибающую.

Полезность доказанного утверждения обнаруживается сразу же, если его применить к случаю  $\varphi(T) = e^T$ , рассматриваемому в [4]. Именно, результаты этой работы, полученные при помощи детальных выкладок, использующих явные аналитические зависимости,<sup>1</sup> характерные для данного случая, являются непосредственным его следствием.

Отметим, что доказательство в [4] использует уравнение огибающей, что и было замечено в этой работе.

Доказанное утверждение значительно облегчает исследование в тех случаях, когда наличие или отсутствие огибающей может быть установлено из побочных (например, геометрических) соображений. Если, например, имеется семейство вложенных одна в другую выпуклых кривых, то такое семейство огибающей не имеет. Интересно отметить, что доказательство устойчивости стационарного решения в теории горения [2] по существу основано на том, что семейство  $T_0(x+c)$  не имеет огибающей.

Легко показать, что участки убывания функции  $h(T_m)$  соответствуют неустойчивым решениям. Действительно, в этом случае кривые  $T(x, h)$  для разных  $h$  пересекаются и для каждого допустимого  $h$  существует точка  $0 < x_h < h$ , для которой  $T(x_h, h) = 0$ . Действительно, если бы  $T(x, h)$  сохраняло знак при данном  $h$  для всех  $x$ , то это означало, что  $T(x, h)$  монотонна при изменении  $h$  для всех  $x$ .

Рассмотрим теперь участки возрастания функции  $h(T_m)$ . Сначала рассмотрим первый участок возрастания, выходящий из начала координат и соответствующий решениям с меньшими  $T_m$ . Покажем, что этому участку соответствуют устойчивые решения. Функция  $T(x, h)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$T(x, h) = \int_{-h}^h K_h(x, \xi) \varphi[T(\xi)] d\xi \quad (1.5)$$

где  $K_h(x, \xi)$  — соответствующая функция Грина.

Нетрудно показать, что решение с наименьшим  $T_m$  может быть получено как предел при  $k \rightarrow \infty$  последовательности функций

$$T_k(x, h), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad T_0 = 0 \quad \left( T_k(x, h) = \int_{-h}^h K_h(x, \xi) \varphi[T_{k-1}(\xi)] d\xi \right)$$

Так как  $K_{h_1} < K_{h_2}$  для  $h_1 < h_2$ , то  $T(x, h_1) \leq T(x, h_2)$ . Но имеет место более сильное неравенство  $T(x, h_1) < T(x, h_2)$ . Действительно, если в некоторой точке было бы  $T(x_0, h_1) = T(x_0, h_2)$ , то ввиду того, что соответствующие кривые не могут пересекаться, они имели бы общую касательную и решения бы совпали. Таким образом, семейство  $T(x, h)$ , соответствующее первому участку возрастания функции  $h(T_m)$ , есть семейство выпуклых ( $d^2T/dx^2 < 0$ ), вложенных одна в другую кривых, такое семейство огибающей не имеет и, следовательно, решения устойчивы.

Это доказательство пригодно для любого участка кривой с наименьшими  $T_m$  (участок 4 фиг. 2).

Остается доказать устойчивость решения для участков возрастания 3 и 5 фиг. 2. Для этого покажем, что если, двигаясь вдоль ветви кривой  $h(T_m)$ , происходит переход от устойчивых решений к неустойчивым, то на этой ветви существует точка, для которой  $dh/dT_m = 0$ . Для доказательства переформулируем задачу (0.2) следующим образом. Введем независимую переменную  $y = x/h$ . Тогда

$$d^2T/dy^2 + h^2\varphi(T) = 0, \quad T|_{y=\pm 1} = 0 \quad (1.6)$$

Исследование устойчивости сведется к изучению задачи

$$d^2\psi/dy^2 + h^2\varphi'(T)\psi = -\lambda\psi, \quad \psi|_{y=\pm 1} = 0 \quad (1.7)$$

Пусть при непрерывном изменении  $h$  на данной ветви происходит переход от устойчивости к неустойчивости. Тогда, так как первое собственное значение непрерывно зависит от  $h$  и должно менять знак, то существует значение  $h$ , для которого задача имеет решение с  $\lambda = 0$ , не обращающееся в нуль в  $(-1, 1)$ . Обозначим это решение  $\psi_0(y)$ . Продифференцируем теперь (1.6) по  $T_m$ . Тогда, обозначая  $T' = dT / dT_m$ :

$$\frac{d^2 T}{dy^2} + h^2 \varphi'(T) T' = -2h \frac{dh}{dT_m} \varphi(T), \quad T' |_{y=\pm 1} = 0 \quad (1.8)$$

Но так как однородная краевая задача имеет решение  $\psi_0(y)$ , то неоднородная может иметь решение только при выполнении условия

$$\frac{dh}{dT_m} \int_{-1}^1 \psi_0(y) \varphi(T) dy = 0$$

Следовательно,  $dh / dT_m = 0$ ; отсюда следует, что участок 3 фиг. 2 дает устойчивые решения, так как на участке 4 решения устойчивы.

Для доказательства устойчивости решений на участках 5 фиг. 2 поступим следующим образом. Функцию  $\varphi(T)$  для значений  $T$  больших фиксированного  $T_5$  можно продолжить так, чтобы  $h(T_m)$  возрастала при  $T > T_5$  (пунктирная линия 6 на фиг. 2). Достаточно положить  $\varphi(T) = \varphi(T_5)$  для  $T > T_5$  и участок стыка закруглить выпуклым образом.

Так как вид функции  $\varphi(T)$  при больших значениях не влияет на решения с меньшими  $T$ , то отсюда получаем устойчивость решений на участках 5. Тем самым показано, что всем возрастающим участкам кривой соответствуют устойчивые ветви решения. В виде непосредственного следствия имеем: если задача (0.2) для данного  $h$  имеет несколько решений, то первое устойчиво, второе неустойчиво и т. д., чередуясь. Решения располагаем в порядке возрастания  $T_m$ .

Очевидно, что все предыдущие рассуждения без существенных изменений переносятся на случай круга и шара.

§ 2. Проведем исследование устойчивости другим способом, который может оказаться полезным при изучении такого рода задач.

Во-первых, нетрудно убедиться в том, что решение, которое стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$ , устойчиво. Доказательство получается так же, как в [5], нужно только потребовать, чтобы  $\varphi'(T)$  было ограничено при  $T \rightarrow 0$ .

Далее, умножая (1.7) на  $T'$ , а (1.8) на  $\psi$ , вычитая из первого второе и интегрируя в  $[-1, 1]$ , получаем

$$\frac{\lambda}{h'} = \int_{-1}^1 \psi \varphi(T) dy \Big/ \int_{-1}^1 \psi T' dy \quad (2.1)$$

Пусть  $\lambda$  — наименьшее собственное значение задачи (1.7); из (2.1) тогда следует, что если  $h' > 0$  и  $T' \geq 0$ , то  $\lambda > 0$ ; отсюда следует, что первое решение устойчиво.

Пусть  $h' \rightarrow 0$ . При  $h' = 0$  уравнение (1.7) имеет решение  $\psi = T'$ , поэтому из (2.1) имеем

$$\lim_{h' \rightarrow 0} \frac{\lambda}{h'} = \int_{-1}^1 T' \varphi(T) dy \Big/ 2h \int_{-1}^1 T'^2 dy$$

Так как для наименьшего решения  $T' \geq 0$ , то интеграл справа положителен и поэтому  $d\lambda / dh' > 0$  при  $h' = 0$ . Отсюда следует, что  $\lambda$  меняет знак вместе с  $h'$ .

Комбинируя с результатами § 1, нетрудно получить отсюда, что для возрастающих участков кривой  $h(T_m)$  решения устойчивы, а для убывающих — неустойчивы.

§ 3. Предыдущие результаты допускают обобщение на случай произвольных областей. Рассмотрим решение задачи (0.1) для произвольной области. Наряду с (0.1), рассмотрим соответствующее интегральное уравнение

$$T = \int_G K(P, Q) \varphi[T(Q)] dQ$$

Введем параметр  $h$  и рассмотрим уравнение с параметром

$$T = h \int_G K(P, Q) \varphi [T(Q)] dQ \quad (3.1)$$

Как следует из результатов работы [7], это уравнение имеет непрерывную ветвь решений бесконечной длины в пространстве непрерывных функций. Используя длину  $R$  решения в качестве параметра, определяющего решение уравнений (3.1) и вводя функцию  $h(R)$ , аналогичную функции  $h(T_m)$ , без существенных изменений переносим результаты § 1,2 на случай произвольной области. При этом используется легко получаемое небольшое усиление результатов работы [8], а именно: при увеличении области наименьшее собственное значение уменьшается. Если для данного  $h$  имеется несколько решений, то, располагая их в порядке возрастания их длины, получаем, что первое решение устойчиво, второе неустойчиво и т. д., чередуясь. При этом в качестве длины решения  $R$  можно взять  $\max T(P)$  при  $P \in G$ .

Нетрудно видеть, что указанные методы могут быть использованы при исследовании устойчивости решений более общих уравнений и с другими краевыми условиями. Эти же методы применимы, например, к уравнениям типа  $L(T) + \varphi(T) = 0$ , где  $L(T)$  — самосопряженный оператор.

В заключение отметим, что аналогичным образом рассматривается задача о тепловой устойчивости стационарных решений при изучении течений вязкой жидкости в плоском канале и круглой трубе с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры [9].

Автор благодарит С. В. Фальковича за обсуждения.

Поступила 19 VI 1967.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Франк-Каменецкий Д. Д. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., Изд-во АН СССР, 1948.
2. Гельфанд И. М. Задачи теории квазилинейных уравнений. Усп. матем. н. 1959, т. 16, вып. 2.
3. Каганов С. А. К стационарной теории теплового взрыва. ПМТФ, 1963, № 1.
4. Истратов А. Г., Либрович В. Б. Об устойчивости решений в стационарной теории теплового взрыва. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
5. Сивашинский Г. В. О существовании и устойчивости решений в стационарной теории взрыва. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
6. Лаврентьев М. В., Люстерник А. А. Курс вариационного исчисления. ГИТТЛ, 1950.
7. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Физматгиз, 1962.
8. Титчмарш Э. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 2. Изд-во иностр. лит., 1961.
9. Каганов С. А. О ламинарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале и круглой трубе с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры. ПМТФ, 1962, № 3.