МЕТОД ГОДОГРАФА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СПЛОШНЫХ НЕЛИНЕЙНО ПРОВОДЯЩИХ СРЕД

Ю. П. Емец (Киев)

Имеется обширный класс проводников, в которых при наличии сильных электрических полей нарушается линейная связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля. Отклонение от закона Ома наблюдается, прежде всего, в таких средах, как плазма и полупроводники. Физическая причина нелинейной проводимости заключается в появлении неравновесного состояния носителей тока. Электроны при столкновениях сравнительно медленно передают свою энергию (ионам, молекулам и т. д.) ввиду малости своей массы, вместе с тем, обладая довольно большой длиной свободного пробега, в период между столкновениями они получают от электрического поля большую энергию. В результате разогрева полем температура электронов может значительно отличаться от равновесной.

В силу нелинейности исходных уравнений нахождение распределения тока в средах с такими свойствами затруднено. Преобразованием годографа уравнения электродинамики линеаризуются и в совокупности с приближенными методами позволяют получить эффективный способ расчета электрических полей в нелинейно проводящих средах.

§ 1. **Уравнения для силовой и потенциальной функций электрического тока.** Отправным положением в построении электродинамики сплошных нелинейно проводящих сред служит уравнение состояния, общая форма которого

$$F(\mathbf{j}, \mathbf{E}, \sigma, x, y, z, t, \ldots) = 0 \tag{1.1}$$

указывает на наличие связи между структурой среды и электрическим полем. Такая связь не всегда может быть установлена теоретически и определяется в основном из опыта или правдоподобных рассуждений.

В работе рассматривается изотропная и однородная среда при изотермических условиях. В этом случае имеется достаточно физических оснований для предположения, что уравнение состояния может быть представлено в виде

$$\mathbf{j} = \sigma(j)\,\mathbf{E}, \qquad j = |\mathbf{j}| \tag{1.2}$$

где $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля, σ — электропроводность среды, которая однозначным образом зависит от плотности тока j.

Для упрощения дальнейших теоретических выкладок и более четкого выяснения электродинамических явлений в нелинейной среде рассмотрение проводится только для двумерных стационарных полей. Условие непрерывности тока и закон индукции дают два уравнения

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{j_x}{\sigma}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{j_y}{\sigma}\right) = 0 \tag{1.3}$$

Отсюда следует, что можно ввести силовую $Q(x, y)$ и потенциальную $P(x, y)$ функции тока по формулам

$$j_x = \frac{\partial Q}{\partial y} = \sigma \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad j_y = -\frac{\partial Q}{\partial x} = \sigma \frac{\partial P}{\partial y} \tag{1.4}$$

С учетом соотношений

$$\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{1}{j}\left(j_x \frac{\partial j_x}{\partial x} + j_y \frac{\partial j_y}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial j}{\partial y} = \frac{1}{j}\left(j_x \frac{\partial j_x}{\partial y} + j_y \frac{\partial j_y}{\partial y}\right) \tag{1.5}$$

второе уравнение в (1.3) преобразуется к виду

$$\frac{\partial j_x}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{1}{J^2}\left[j_x^2 \frac{\partial j_x}{\partial y} - j_x j_y\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} - \frac{\partial j_y}{\partial y}\right) - j_y^2 \frac{\partial j_y}{\partial x}\right] = 0 \tag{1.6}$$

Здесь $J^2 = \sigma j\,(d\sigma / dj)^{-1}$ — характерная плотность электрического тока, определяющая степень нелинейности среды или неравновесности проводимости. Наименьшие значения J принимает, когда проводимость среды сильно зависит от плотности тока j, если же нелинейность исчезает, то $J^2 \to \infty$.

Из (1.6) и (1.3) находится уравнение для $Q\,(x,\ y)$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}-\frac{1}{J^2}\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}-2\,\frac{\partial Q}{\partial x}\,\frac{\partial Q}{\partial y}\,\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right]=0 \qquad (1.7)$$

Чтобы получить уравнение для потенциала тока $P\,(x,\ y)$, необходимо воспользоваться соотношениями

$$\left(1-\frac{j_x^2}{J^2}\right)\frac{\partial j_x}{\partial x}-\frac{j_xj_y}{J^2}\frac{\partial j_y}{\partial x}=\sigma\frac{\partial^2 P}{\partial x^2},\qquad \left(1-\frac{j_y^2}{J^2}\right)\frac{\partial j_y}{\partial y}-\frac{j_xj_y}{J^2}\frac{\partial j_x}{\partial y}=\sigma\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \qquad (1.8)$$

$$\left(1-\frac{j_x^2}{J^2}\right)\frac{\partial j_x}{\partial y}-\frac{j_xj_y}{J^2}\frac{\partial j_y}{\partial y}=\sigma\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y},\qquad \left(1-\frac{j_y^2}{J^2}\right)\frac{\partial j_y^2}{\partial x}-\frac{j_xj_y}{J^2}\frac{\partial j_x}{\partial x}=\sigma\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}$$

которые получаются из (1.4), а также условием непрерывности тока (1.3). После несложных преобразований находится уравнение

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-\frac{1}{J^2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-2\,\frac{\partial P}{\partial x}\,\frac{\partial P}{\partial y}\,\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right]=0 \qquad (1.9)$$

Полученные квазилинейные уравнения (1.7) и (1.9) совпадают внешне по форме и имеют смешанный эллиптико-гиперболический тип. Их различие, однако, заключается в том, что характерная плотность тока J выражается через P и Q неодинаковым (и часто непростым) образом.

Если σ не зависит от j (среда линейная), то P и Q становятся гармоническими функциями

$$\Delta P\,(x,\ y)=0,\qquad \Delta Q\,(x,\ y)=0\qquad (\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2) \qquad (1.10)$$

Это обстоятельство широко используется при расчетах электрических полей методами теории функций комплексного переменного.

Нелинейные уравнения (1.7) и (1.9) с трудом поддаются исследованию и общий способ их решения обычно состоит в применении различных приближенных методов. В частности, когда проводимость σ слабо зависит от j и, следовательно, большие значения принимает J, можно воспользоваться разложением P и Q в ряды по малому параметру $1/J^2$:

$$P\,(x,\ y)=P_0(x,\ y)+\frac{1}{J^2}P_1(x,\ y)+\frac{1}{J^4}P_2(x,\ y)+\ldots \qquad (1.11)$$

где основной член ряда $P_0\,(x,\ y)$ соответствует решению линейной проводимости, а остальные члены — $P_i\,(x,\ y)$ $(i=1,\ 2,\ldots)$ удовлетворяют линейным эллиптическим уравнениям, получаемым подстановкой (1.11) в (1.9).

§ 2. **Отображение в плоскость годографа.** Путем замены зависимых и независимых переменных точные нелинейные уравнения (1.7) и (1.9) допускают преобразование в точные линейные уравнения. Такой переход выполняется посредством преобразования Лежандра, либо введением в качестве независимых переменных j и θ ($j=|\mathbf{j}|$, θ — угол между вектором $\mathbf{j}$ и осью x). Оба эти преобразования равносильны, и их применение в нелинейной электродинамике по сути аналогично соответствующим преобразованиям в теории течений сжимаемой жидкости [1,2].

Согласно (1.4) можно записать

$$dQ=j_x\,dy-j_y\,dx,\qquad \sigma\,dP=j_x\,dx+j_y\,dy \qquad (2.1)$$

Отсюда следует:

$$dz=(\sigma\,dP+i\,dQ)\,\frac{e^{i\theta}}{j},\qquad j=(j_x^2+j_y^2)^{1/2},\qquad \theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{j_y}{j_x} \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial j}=\left(\sigma\frac{\partial P}{\partial j}+i\frac{\partial Q}{\partial j}\right)\frac{e^{i\theta}}{j},\qquad \frac{\partial z}{\partial\theta}=\left(\sigma\frac{\partial P}{\partial\theta}+i\frac{\partial Q}{\partial\theta}\right)\frac{e^{i\theta}}{j}$$

$$\left(D=\frac{\partial P}{\partial j}\frac{\partial Q}{\partial\theta}-\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\partial Q}{\partial j}\equiv\frac{\partial(P,\ Q)}{\partial(j,\ \theta)}\neq 0\right)$$

Дифференциация двух последних уравнений соответственно по θ и j дает

$$\frac{\partial Q}{\partial j} = \frac{\sigma}{j}\left(1 - \frac{j}{\sigma}\frac{d\sigma}{dj}\right)\frac{\partial P}{\partial \theta}, \qquad \frac{dQ}{\partial \theta} = -\sigma j\frac{\partial P}{\partial j} \tag{2.3}$$

Из (2.3) легко получаются уравнения для потенциальной и силовой функций электрического тока в плоскости годографа

$$\frac{\partial^2 P}{\partial j^2} + \frac{1-\Gamma^2}{j^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{1+\Gamma^2}{j}\frac{\partial P}{\partial j} = 0 \tag{2.4}$$

$$\left(\Gamma^2 = \frac{j}{\sigma}\frac{d\sigma}{dj}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial j^2} + \frac{1-\Gamma^2}{j^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} + \frac{d}{dj}\left(\frac{j}{\sigma(1-\Gamma^2)}\right)\frac{\partial Q}{\partial j} = 0 \tag{2.5}$$

Здесь $\Gamma^2 = j^2 / J^2$ — безразмерное число, характеризующее нелинейную проводимость. Это число имеет важное значение в задачах электродинамики нелинейно проводящих сред. Для трех случаев распределения тока $\Gamma < 1$, $\Gamma = 1$ и $\Gamma > 1$ уравнения (2.4), (2.5) будут соответственно эллиптическими, параболическими и гиперболическими. Тип уравнения указывает на глубокое различие в характере протекаемых в нелинейной среде процессов. При $\Gamma < 1$ распределение тока управляется эллиптическим уравнением и его решения представляются гладкими функциями. В случае $\Gamma > 1$ уравнения (2.4), (2.5) становятся гиперболическими и, следовательно, его решения могут иметь разрывы (на характеристиках), что указывает на возможность существования ударных электрических волн в нелинейной среде. Наконец, если проводимость σ линейно зависит от плотности электрического тока ($\sigma \equiv j$, $\Gamma = 1$), то, например, уравнение (2.4) становится параболическим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial j^2} + \frac{2}{j}\frac{\partial P}{\partial j} = 0 \tag{2.6}$$

Как видно, уравнения (2.4) — (2.6) линейны и их решения поэтому значительно проще соответствующих нелинейных уравнений в физической плоскости (1.7) и (1.9). Необходимо, однако, отметить, что при решении конкретных задач в плоскости годографа усложняются граничные условия и, более того, они не всегда могут быть получены.

§ 3. Нелинейные явления в плазме. На основе элементарной теории можно рассмотреть некоторые энергетические соотношения в нелинейной плазме. Ряд вопросов физической природы неравновесной проводимости плазмы и расчеты полей в средах с такими свойствами (в основном для случаев, когда проводимость слабо зависит от плотности тока j) изучались Керреброком и Шерманом [3,4].

При наличии только упругих столкновений баланс энергии для электронов в электрическом поле за единицу времени записывается в следующем виде [5]:

$$\mathbf{jE} = \frac{3}{2}\delta\frac{n_e}{\tau}k(T_e - T) \tag{3.1}$$

где n_e и τ — концентрация и эффективное время столкновения электронов; δ — средняя относительная доля энергии, передаваемая электроном при столкновении с тяжелыми частицами; T и T_e — эффективные температуры соответственно тяжелых частиц и электронов; δ, n_e и τ зависят от T_e и в общем случае рассчитываются на основании кинетической теории, либо определяются из соответствующих экспериментов. В частности, для слабо и полностью ионизированной плазмы имеем $\delta = 2m_e / m_\alpha \sim 10^{-1} \div 10^{-5}$, где m_α — масса тяжелой частицы, а m_e — масса электрона.

В формуле (3.1) слева стоит работа, производимая полем над плазмой в единицу времени, а справа — энергия, теряемая электроном при столкновении с тяжелыми частицами.

Учитывая, что

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}, \qquad \sigma = n_e e^2\tau / m_e \tag{3.2}$$

уравнение (3.1) можно переписать иначе

$$j^2 = \frac{\delta}{2}n_e^2 e^2\frac{3kT}{m_e}\left(\frac{T_e}{T} - 1\right) \tag{3.3}$$

или, поскольку $j = n_e e v$ и $\delta = 2m_e / m_\alpha$ (v — вектор скорости направленного движения электронов), еще в таких двух видах

$$v_{\max}^2 = v_0^2 + v^2 \qquad \left(v_{\max}^2 = \frac{3kT_e}{m_a}, \quad v_0^2 = \frac{3kT}{m_a}\right)$$
$$\frac{T_e}{T} = 1 + \Lambda^2 \qquad \left(\Lambda^2 = \frac{v^2}{v_0^2}\right) \tag{3.4}$$

Так как v_0^2 пропорционально местной кинетической энергии в плазме, а v — местной энергии электрического поля, то безразмерный параметр Λ характеризует местное отношение энергии поля к тепловой энергии плазмы. При этом $v_{\max}$ указывает максимально возможную скорость направленного движения электронов.

Чтобы установить характер нелинейности в плазме (путем оценки безразмерных параметров Γ и Λ), необходимо обратиться к выражению для проводимости (3.2). В этой формуле концентрация электронов n_e и время их релаксации τ в общем случае зависят от T_e и, следовательно, от электрического поля. Возможны три случая: а) $n_e = \text{const}$, $\tau(T_e)$; б) $n_e(T_e)$, $\tau(T_e)$ и в) $n_e(T_e)$, $\tau = \text{const}$.

Первая наиболее простейшая ситуация, по-видимому, реализуется в сильно ионизированной плазме. Приближенно можно считать, что

$$\tau = \tau_0 (T_e / T)^\gamma \tag{3.5}$$

где τ_0 — время релаксации при $T_e = T$, γ — параметр, определяемый видом соударения электронов. Тогда согласно предыдущим формулам имеют место следующие формулы для проводимости:

$$\sigma = \sigma_0 (T_e / T)^\gamma = \sigma_0 (1 + \Lambda^2)^\gamma \tag{3.6}$$

характерной плотности тока J:

$$J^2 = \sigma j \left(\frac{d\sigma}{dj}\right)^{-1} = n_e^2 e^2 \frac{v_{\max}^2}{2\gamma} = n_e^2 e^2 v_*^2 \tag{3.7}$$

и безразмерного числа Γ:

$$\Gamma^2 = \frac{j^2}{J^2} = 2\gamma \frac{v^2}{v_{\max}^2} = \frac{v^2}{v_*^2} \tag{3.8}$$

Здесь v_* — критическая скорость электронов. Если направленная скорость электронов меньше критической скорости ($v < v_*$), то безразмерное число Γ меньше единицы ($\Gamma < 1$) и решения уравнений (2.4), (2.5) будут гладкими. Напротив, при $v > v_*$ имеем $\Gamma > 1$, и в плазме вполне могут возникнуть разрывы электрического поля. Последнее имеет место при выполнении неравенства $0 < v_* < v_{\max} < \infty$, что возможно всегда, когда $\gamma > 1/2$ (например, если электроны сталкиваются с ионами, то $\gamma = 3/2$).

В двух других случаях вследствие сложного вида зависимости концентрации электронов от T_e (для слабо ионизированной плазмы по формуле Саха), интерпретация v_* уже не будет такой наглядной, как выше.

Поступила 29 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Изд., 2-е, М., «Наука», 1966.
2. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
3. Kerrebrock J. L. Nonequilibrium ionisation due to electron heating: I. Theory. AIAA J.,1964, vol. 2, No. 6, p. 1072—1080. Рус. пер.: Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 6.
4. Sherman A. Magnetohydrodynamic channel flows with nonequilibrium ionisation. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, NO 9, p. 1782—1787.
5. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Физматгиз, 1960.