ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА АНОМАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ГРЭДА

Нгуен Ван Дьеп (Воронеж)

Исследуется устойчивость стационарного течения жидкости модели Грэда [1,2] в пространстве между вращающимися бесконечно длинными концентрическими цилиндрами. Предполагается, что зазор между цилиндрами мал, цилиндры вращаются в одну сторону, малые возмущения осесимметричны [3]. Предполагается также, что моментные напряжения отсутствуют, а безразмерное время релаксации и безразмерная вращательная вязкость малы. Показано, что критическое значение числа Тейлора для жидкости модели Грэда больше, чем для ньютоновской жидкости. Указывается приближенный способ вычисления критического значения числа Тейлора, отмечаются некоторые свойства спектра собственных значений, устанавливается аналогия между задачей устойчивости течения жидкости модели Грэда и задачей устойчивости течения вязко-пластической жидкости [5].

1. При отсутствии моментных напряжений уравнения движения вязкой несжимаемой несимметричной жидкости в цилиндрической системе r, θ, z имеет вид [1,2]

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1+\delta}{R}\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{2\delta}{R}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{1+\delta}{R}\left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) + \frac{2\delta}{R}\left(-\frac{\partial \omega_z}{\partial r} + \frac{\partial \omega_r}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1+\delta}{R}\Delta v_z + \frac{2\delta}{R}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r\omega_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \omega_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 (\ldots)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\ldots)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (\ldots)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 (\ldots)}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{v_\theta \omega_\theta}{r} = \tau\omega_r + \frac{\tau}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \omega_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} + \frac{v_\theta \omega_r}{r^2} = -\tau\omega_\theta + \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = -\tau\omega_z + \frac{\tau}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$R = \frac{\Omega_1 R_1^2}{\nu}, \qquad \tau = \frac{4\nu_r}{J\Omega_1}, \qquad \delta = \frac{\nu_r}{\nu}$$

Здесь v_r, v_θ, v_z — безразмерные проекции вектора скорости, ω_r, ω_θ, ω_z — безразмерные проекции вектора средней угловой скорости вращения молекул жидкости, p — безразмерное равновесное давление, ν — кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r — кинематическая вращательная вязкость, J — скалярная константа жидкости с размерностью момента инерции единицы массы, Ω_1, R_1 — соответственно угловая скорость вращения и радиус внутреннего цилиндра, τ — безразмерное время релаксации, δ — безразмерная вращательная вязкость, характеризующая степень несимметричности тензора напряжений. Уравнения (1.1) имеют точное решение

$$v_r^\circ = v_z^\circ = \omega_r^\circ = \omega_\theta^\circ = 0, \qquad v_\theta^\circ = ar + b/r = v_0, \qquad \omega_z^\circ = a$$

$$a = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{(R_2^2 - R_1^2)\,\Omega_1}, \qquad b = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)\, R_2^2}{\Omega_1 (R_2^2 - R_1^2)} \tag{1.2}$$

Здесь Ω_2, R_2 — соответственно угловая скорость вращения и радиус внешнего цилиндра.

Решение (1.2) описывает стационарное течение жидкости в пространстве между вращающимися цилиндрами.

Для исследования устойчивости решения (1.2) относительно малых осесимметричных возмущений рассмотрим нестационарное решение уравнений (1.1) вида [3]

$$\begin{gathered}
v_r = v_r', \quad v_\theta = v_0 + v_\theta', \quad v_z = v_z', \quad p = p^\circ + p', \quad \omega_r = \omega_r' \\
\omega_\theta = \omega_\theta', \quad \omega_z = \omega_z^\circ + \omega_z', \quad v_r' = -\partial\psi'/\partial z, \; v_z' = r^{-1}\partial(r\psi')\,\partial r \\
v_\theta' = v(r)\,e^{\sigma t + i\lambda z}, \qquad \psi' = i\psi(r)\,e^{\sigma t + i\lambda z} \\
\omega_r' = \alpha(r)\,e^{\sigma t + i\lambda z}, \quad \omega_\theta' = \beta(r)\,e^{\sigma t + i\lambda z}, \quad \omega_z' = \gamma(r)\,e^{\sigma t + i\lambda z}
\end{gathered} \tag{1.3}$$

где λ — вещественный параметр, σ — комплексная величина.

Из уравнений (1.1) и (1.3) находим [3] соотношения для ψ и v:

$$\begin{gathered}
[L - \lambda^2 + (1 + \delta)^{-1}\sigma R]\,(L - \lambda^2)\,\psi = 2\,(1 + \delta)^{-1}\,\lambda R\,(a + br^{-2})\,v - \\
-\delta\,(1 + \delta)^{-1}\tau\,(L - \lambda^2)\,\{[\lambda v_0 r^{-2} v - (\sigma + \tau)\,(L - \lambda^2)\,\psi]\,([(\sigma + \tau)^2 + v_0^2\,r^{-3}]^{-1}\} \\
[L - \lambda^2 - (1 + \delta)^{-1}\,\sigma R]\,v = 2\,(1 + \delta)^{-1}\,\lambda\,Ra\psi + \delta\,(1 + \delta)^{-1}\,\tau\,(\sigma + \tau)^{-1}\,Lv - \\
-\delta\,(1 + \delta)^{-1}\,\tau\lambda\,[\lambda\,(\sigma + \tau)\,v + v_0 r^{-1}\,(L - \lambda^2)\,\psi]\,[(\sigma + \tau)^2 + v_0^2\,r^{-3}]^{-1}
\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$L \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}, \qquad \psi(1) = \psi\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{d\psi(1)}{dr} = \frac{d\psi(R_2/R_1)}{dr} =$$

$$= v(1) = v\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 0$$

Характеристическое уравнение задачи устойчивости решения (1.2) имеет вид

$$F\,(\sigma, \lambda, \delta, \tau, R, R_2 / R_1, \Omega_2 / \Omega_1) = 0 \tag{1.5}$$

При $\delta = 0$ уравнения (1.4), (1.5) соответствуют задаче устойчивости течения Куэтта ньютоновской жидкости. Как обычно [3], предполагается $\sigma = 0$; т. е. «нейтральное» возмущение является фактически вторичным течением, тогда критическое значение R, отвечающее границе области неустойчивости будет наименьшим положительным корнем R уравнения

$$F\,(0, \lambda, \delta, \tau, R, R_2 / R_1, \Omega_2 / \Omega_1) = 0$$

Для приближенного рассмотрения также предполагается, что зазор между цилиндрами мал, внешний цилиндр не вращается [3,5]. Кроме того, пусть $\delta \ll 1$, т. е. антисимметричное напряжение мало по сравнению с симметричным. Тогда если $\tau \ll 1$, то пренебрегая членами с δ^2, $\delta\tau$, τ^2, из уравнений (1.4) находим уравнения для u_1, v_1:

$$(D^2 - k^2)^2 u_1 = 2\,(1 - \delta) k^2 R' v_1, \qquad [D^2 - k^2\,(1 + \delta)]\,v_1 = 2aR' u_1 \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}
u_1 = v_1 = du_1 / d\xi = 0 \qquad \text{при } \xi = 0,\ \xi = 1 \\
\xi = (r - 1) / \varepsilon, \quad \varepsilon = (R_2 - R_1) / R_1 \ll 1, \quad k = \lambda\varepsilon, \quad R' = R\varepsilon^2 \\
u_1 = u / \varepsilon = \psi k / \varepsilon^2, \\
v_1 = v / \varepsilon, \qquad D(\ldots) = d(\ldots) / d\xi, \qquad a < 0
\end{gathered}$$

Исключая u_1 из (1.6) получим:

$$-(D^2 - k^2)^2\,[D^2 - k^2\,(1 + \delta)]\,v_1 = k^2 T\,(1 - \delta)\,v_1 \tag{1.7}$$

$$v_1 = 0, \qquad [D^2 - k^2\,(1 + \delta)]v_1 = 0, \qquad D\,[D^2 - k^2\,(1 + \delta)]\,v_1 = 0 \qquad \text{при } \xi = 0{,}1$$

$$T = -2\,aR'^2 = -2a\,(R_2 / R_1 - 1)^4 R^2 \tag{1.8}$$

Здесь T есть параметр Тейлора, наименьшее значение которого определяет критерий устойчивости.

Полагая $\delta = 0$ в (1.7), получаем известные уравнения для ньютоновской жидкости

$$\begin{gathered}
-(D^2 - k^2)v_1 = T^0\,kv_1, \qquad T^0 = -2a\,(R_2 / R_1 - 1)^4 R^2 \\
v_1 = 0, \quad (D^2 - k^2)\,v_1 = 0, \quad D(D^2 - k^2)v_1 = 0 \quad \text{при } \xi = 0;\ 1
\end{gathered} \tag{1.9}$$

Заметим, что уравнение (1.9) можно получить из (1.4) при предположении, что $\tau \gg 1$, $\delta \ll 1$.

В дальнейшем величины v_1, u_1 обозначим соответственно v, u.

2. Следуя [4], приведем уравнения (1.6) к интегральному операторному уравнению

$$v = \mu\, G_1 G_2\, v, \qquad \mu = k^2 (1 - \delta)\, T \tag{2.1}$$

где G_j — есть интегральные операторы Грина, которые определяются соотношениями

$$G_j f = \int_0^1 K_j (\xi, \xi_0)\, f (\xi_0)\, d\xi, \qquad j = 1, 2 \tag{2.2}$$

Функции K_1, K_2 — соответственно функции Грина обыкновенных дифференциальных операторов $[-D^2 + k^2 (1 + \delta)]$, $(D^2 - k^2)^2$, входящих в (1.6). Имеем

$$[D^2 - k^2 (1 + \delta)]\, f = \rho_0' \frac{d}{d\xi} \rho_1' \frac{d}{d\xi} \rho_2' f, \qquad \rho_0 = \rho_2 = e^{k\xi}$$

$$(D^2 - k^2)^2 f = \rho_0 \frac{d}{d\xi} \rho_1 \frac{d}{d\xi} \rho_2 \rho_0 \frac{d}{d\xi} \rho_1 \frac{d}{d\xi} \rho_2 f, \qquad \rho_1 = e^{-2k\xi}$$

$$\rho_0' = \rho_2' = e^{k\,(1+\delta/2)\,\xi}, \qquad \rho_1' = e^{-2k\,(1+\delta/2)\,\xi}$$

Функции ρ положительны, непрерывны и бесконечно непрерывно дифференцируемы. Следовательно, G_j есть интегральные осцилляционные операторы [6,7].

Произведение $G_1 G_2$ снова является осцилляционным оператором. Поэтому спектр задачи (2.1) состоит из последовательности простых и положительных характеристик чисел [7]

$$0 < \mu_1 (k) < \ldots < \mu_n (k) \to \infty \tag{2.3}$$

Легко проверить, что операторы G_j линейны, симметричны и вполне непрерывны в гильбертовом пространстве H° с скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{H^\circ} = \int_0^1 \varphi (\xi)\, \psi (\xi)\, d\xi$$

Тогда G_j будут аналитическими функциями параметра k, и все собственные значения μ_n также аналитически зависят [4] от k. Из (2.1) следует, что существует последовательность положительных значений T_n, при которых возможны нейтральные возмущения. Кроме того, они также являются (за исключением $k = 0;\ \infty$) аналитическими функциями параметра k.

Будем считать, что $0 < T_1 (k) < \ldots < T_n (k) \to \infty$. Здесь $T_1 (k)$ определяет границу области устойчивости. Обозначим через T^* минимальное значение $T_1 (k)$. Очевидно $T^* > 0$. Покажем, что T^* достигается при некотором значении $k > 0$. Для этого достаточно показать, что $T_1 (0) = T_1 (\infty) = \infty$, так как $T_1 (k)$ аналитически зависит от k. Имеем, что $\mu_1 (k) > 0$ для любых k, следовательно, $T_1 (k) = \mu_1 (k) / k^2 \to \infty$ при $k \to 0$. Чтобы оценить значение $T_1 (k)$ при $k \to \infty$, умножим уравнения (1.6) соответственно на u, v. Полученные уравнения проинтегрируем по ξ от нуля до единицы. После несложного вычисления получим оценку $T_1 (k) \geqslant k^4$, из которой следует, что $T_1 (k) \to \infty$ при $k \to \infty$.

3. Пренебрегая членами, содержащими δ^2, перепишем уравнения (1.7) в следующей форме:

$$-(D^2 - h^2)^3 v - 2\delta h^2 (D^2 - h^2)^2 v = \mu v, \qquad h^2 = k^2 (1 + \delta) \tag{3.1}$$

$$v = 0, \qquad (D^2 - h^2)\, v = 0, \qquad D\,(D^2 - h^2) v = 0 \quad \text{при } \xi = 0;\ 1$$

Пусть M — множество функций $\{v\}$, четырежды непрерывных дифференцируемых и удовлетворяющих краевым условиям (3.1). Пусть гильбертово пространство H является пополнением множества M по норме, порожденной скалярным произведением

$$(v, f)_H = \int_0^1 (Dv Df + h^2 v f)\, d\xi = - \int_0^1 [(D^2 - h^2)\, v]\, f\, d\xi \tag{3.2}$$

В пространстве H определим оператор A, удовлетворяющий соотношению

$$(Av, f)_H = \int_0^1 \{[(D^2 - h^2)^4 + 2\delta h^2 (D^2 - h^2)^3]\, v\}\, f\, d\xi, \qquad f \in H \tag{3.3}$$

Система уравнений (3.1) эквивалентна операторному уравнению

$$Av = \mu v \tag{3.4}$$

Легко проверить, что оператор A самосопряжен в пространстве H. Полагая $k = h$, приведем (1.9) к операторному уравнению

$$A^\circ v = \mu^\circ v, \qquad \mu^\circ = h^2 T^\circ \tag{3.5}$$

где A° определяется из равенства

$$(A^\circ v, f)_H = \int_0^1 [(D^2 - h^2)^4 v]^* f \, d\xi, \qquad f \in H \tag{3.6}$$

Оператор A° также самосопряжен в пространстве H. Запишем оператор A в форме $A = A^\circ + \delta A^1$, где оператор A^1 определяется из соотношения

$$(A^1 v, f)_H = 2 \int_0^1 [(D^2 - h^2)^3 v] f \, d\xi \tag{3.7}$$

Так как операторы A и A° самосопряженные, их собственные значения простые, то возможно разложение собственных значений оператора A в ряд [8]

$$\mu_1 = \mu_1^\circ + \delta\mu_1^1 + \ldots, \quad \mu_1^1 = (A^1 v_1^\circ, v_1^\circ)_H \tag{3.8}$$

Здесь $v_1^\circ(h, \xi)$ — собственная функция, соответствующая μ_1° — первому собственному значению оператора A°, μ_1 — первое собственное значение оператора A.

Из (1.9), (2.2), (3.5) и (3.8) при принебрежении квадратом малой величины v_1°, получим

$$T_1(k) = (1 + 2\delta) T^\circ_1(h) \tag{3.9}$$

При помощи (3.9) можно вычислить приближенно значения $T_1(k)$, если известно решение задачи устойчивости течения Куэтта ньютоновской жидкости.

Соотношение (3.9) показывает, что течение Куэтта жидкости модели Грэда более устойчиво, чем ньютоновской жидкости.

Отметим, что соотношения (1.7) совпадают по форме с уравнениями задачи устойчивости течения Куэтта вязко-пластической жидкости [5], если в (1.7) положить

$$\delta = f_0 = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2B}{S} - 1\right)^{-1} + \left[\frac{2B}{S(1+\varepsilon)^2} - 1\right]\right\}, \qquad B = \frac{S}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + 1, \qquad S = \frac{\tau_0}{\Omega_1 \eta}$$

Здесь τ_0 — предел текучести, η — динамический коэффициент ньютоновской жидкости.

Так как уравнение (1.7) справедливо для $\delta \ll 1$, то результаты расчетов в [5] могут быть использованы для определения устойчивости течения Куэтта жидкости модели Грэда при малых f_0.

Автор благодарит Д. Д. Ивлева и А. Т. Листрова за руководство работой.

Поступила 14 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Grad H. Statistical Mechanics, Thermodynamics, and Fluid Dynamics of Systems with an Arbitrary Number of Integrals. Comm. Pure Appl. Math., 1952, vol. 5, № 4.
2. Groot S. R. de, Mazur P. Non-Equilibrium Thermodynamics. Amst. N. — Holland publ., 1962, 510 p. Рус. пер.: Гротт С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
3. Lin C. C. The Theory of Hydrodynamic Stability. Cambridge, Univ. press, 1955. Рус. пер.: Линь Цзя-цзяо «Теория гидродинамической устойчивости». М., Изд-во, иностр. лит., 1958.
4. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
5. Астрахан И. М. Устойчивость вращательного движения вязко-пластической жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами. ПМТФ, 1961, № 2.
6. Крейн М. Г. О несимметричных осцилляционных функциях Грина обыкновенно-дифференциальных операторов. Докл. АН СССР, 1939, т. 25, № 8.
7. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. Изд. 2-е, М. — Л., Гостехиздат, 1950.
8. Виленкин Н. Я. и др. Функциональный анализ. М., «Наука», 1964.