О ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗНОСТИ СКОРОСТЕЙ В ДВУХ ТОЧКАХ ОДНОРОДНОГО, ИЗОТРОПНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

В. Р. Кузнецов (Москва)

В работе рассматривается уравнение для характеристической функции вероятности разности скоростей в двух точках однородного, изотропного турбулентного потока. Это уравнение выводится при помощи двух предположений из уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости и имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = i\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda_k\partial r_k} + \frac{2}{3}\varepsilon\lambda_k^2 f$$

Здесь t — время, $r_j = x_j^{(1)} - x_j^{(2)}$ $(j = 1,2,3)$, $x_j^{(s)}$ $(s = 1,2)$ — координаты рассматриваемых точек, $\varepsilon = -\frac{1}{2}\,d\langle u^2{}_j\rangle / dt$ — скорость диссипации кинетической энергии потока, $u_j(\mathbf{x}^{(s)})$ — скорость, $f(\lambda) = \int \exp(i\lambda_j v_j)\, P(v)\, d^3v$, $P(\mathbf{v})$ — плотность вероятности разности скоростей, $v_j = u_j(\mathbf{x}^{(1)}) - u_j(\mathbf{x}^{(2)})$. Введем величины

$$\varphi = \exp(i\lambda_j v_j), \qquad \varepsilon_{kj}^{(s)} = \frac{\partial u_k(\mathbf{x}^{(s)})}{\partial x_l^{(s)}}\frac{\partial u_j(\mathbf{x}^{(s)})}{\partial x_l^{(s)}}$$

Среднее значение величины φ есть не что иное, как искомая характеристическая функция. Среднее значение величины $\varepsilon_{kj}^{(s)}$ пропорционально диссипации кинетической энергии потока.

Предположим, что величины φ и $\varepsilon_{kj}^{(s)}$ статистически независимы при условии, что число Рейнольдса велико, а расстояние между рассматриваемыми точками велико по сравнению с величиной $\eta = \nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4}$. Здесь ν — коэффициент кинематической вязкости. Величина $\varepsilon_{kj}^{(s)}$ определяется коэффициентами Фурье $dZ_k(\varkappa')$ с волновыми числами $\varkappa'$, близкими к $1/\eta$. Здесь

$$dZ_k(\varkappa) = \frac{1}{(2\pi)^3}\times$$
$$\times\int u_k(\mathbf{x})\, e^{-i\varkappa\cdot\mathbf{x}}\left[\frac{\exp(-ixd\varkappa_1) - 1}{-ix_1}\right]\left[\frac{\exp(-ix_2\, d\varkappa_2) - 1}{-ix_2}\right]\left[\frac{\exp(-ix_3\, d\varkappa_3) - 1}{-ix_3}\right] d^3x$$

Величина φ определяется коэффициентами Фурье $dZ_k(\varkappa'')$ с волновыми числами $\varkappa''$, близкими к $1 / |\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}| = 1/r$. Если число Рейнольдса велико и $r \gg \eta$, то величины $dZ_k(\varkappa')$ и $dZ_k(\varkappa'')$ согласно А. Н. Колмогорову [1] статистически независимы. В силу этого предположение, сформулированное выше, достаточно правдоподобно.

Предположим также, что отсутствует корреляция между φ и ψ_k. Здесь

$$\psi_k = \frac{\partial p(\mathbf{x}^{(1)})}{\partial x_k^{(1)}} - \frac{\partial p(\mathbf{x}^{(2)})}{\partial x_k^{(2)}}$$

а p — давление, поделенное на плотность.

Среднее значение произведения этих величин характеризует действие сил давления на турбулентность. Это действие, по общепринятому мнению, сводится к перераспределению энергии между вихрями одного размера, но по-разному ориентированными в пространстве и вызывает, таким образом, тенденцию к изотропии. Коль скоро турбулентность изотропна, этим действием в первом приближении можно пренебречь.

Из уравнений гидродинамики при помощи высказанных выше предположений нетрудно получить искомое уравнение. Имеем

$$\frac{\partial\langle\varphi\rangle}{\partial t} = i\lambda_k\left\langle\varphi\left(\frac{\partial u_k(\mathbf{x}^{(1)})}{\partial t} - \frac{\partial u_k(\mathbf{x}^{(2)})}{\partial t}\right)\right\rangle = i\lambda_k\left\langle\left(-u_j(\mathbf{x}^{(1)})\frac{\partial u_k(\mathbf{x}^{(1)})}{\partial x_j^{(1)}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + u_j(\mathbf{x}^{(2)})\frac{\partial u_k(\mathbf{x}^{(2)})}{\partial x_j^{(2)}} - \psi_k + \nu\Delta u_k(\mathbf{x}^{(1)}) - \nu\Delta u_k(\mathbf{x}^{(2)})\right)\right\rangle \tag{1}$$

$$i\lambda_k\left\langle\varphi\left(-u_j(\mathbf{x}^{(1)})\frac{\partial u_k(\mathbf{x}^{(1)})}{\partial x_j^{(1)}} + u_j(\mathbf{x}^{(2)})\frac{\partial u_k(\mathbf{x}^{(2)})}{\partial x_j^{(2)}}\right)\right\rangle =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x_k^{(1)}}\langle u_k(\mathbf{x}^{(1)})\varphi\rangle - \frac{\partial}{\partial x_k^{(2)}}\langle u_k(\mathbf{x}^{(2)})\varphi\rangle = -\frac{\partial}{\partial r_k}\langle\varphi v_k\rangle = i\frac{\partial^2\langle\varphi\rangle}{\partial\lambda_k\partial r_k} \tag{2}$$

Используя первое предположение, имеем

$$2\nu \frac{\partial^2 \langle \varphi \rangle}{\partial r_k^{\,2}} = i\nu\lambda_k \langle \varphi (\Delta u_k (\mathrm{x}^{(1)}) - \Delta u_k (\mathrm{x}^{(2)})) \rangle - 2\nu\lambda_j\lambda_k \langle \varepsilon_{jk} \rangle \langle \varphi \rangle \tag{3}$$

В соответствии со вторым предположением получаем $i\lambda_k \langle \varphi\psi_k \rangle = 0.$ (4)

Из формул (1) — (4) находим

$$\frac{\partial f}{\partial t} = i \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_k \partial r_k} + 2\nu \frac{\partial^2 f}{\partial r_k^2} + 2\nu \langle \varepsilon_{jk} \rangle \lambda_j \lambda_k f$$

Величина $2\nu\, \partial^2 f / \partial r_k^2$ пренебрежимо мала, если $r \gg \eta$. Учитывая это обстоятельство, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = i \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_k \partial r_k} + \frac{2}{3} \varepsilon \lambda_k^2 f \tag{5}$$

При выводе формулы (5) было использовано равенство $\nu\langle \varepsilon_{jk} \rangle = {}^1/_3\, \varepsilon\, \delta_{jk}$, которое имеет место в силу изотропии и однородности.

Уравнение (5) следует решать с граничными условиями: $f = 1$ при $r = 0$; $f = 1$; $\partial f / \partial \lambda_k = 0$ при $|\lambda| = 0$. Последнее условие — следствие равенства $\langle v_k \rangle = 0$.

Уравнение (5) может быть проинтегрировано в квадратурах. Прежде чем это сделать, исследуем его свойства и два предельных случая, им описываемые.

Если функцию f разложить в ряд Тэйлора по λ и подставить полученный ряд в (5), то из равенства нулю коэффициента, стоящего при λ_k, получится уравнение неразрывности для второго момента поля скоростей, а из равенства нулю коэффициента, стоящего при $\lambda_k\lambda_j$ получится известное уравнение Кармана — Ховарта. Последующие соотношения будут связывать моменты порядков n, $n + 1$ и $n - 2$ (n — целое).

Уравнение для плотности вероятности разности скоростей в двух точках получается из (5) при помощи обратного преобразования Фурье. Оно имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - v_k \frac{\partial P}{\partial r_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 P}{\partial v_k^2}$$

Это уравнение по форме похоже на уравнение диффузии пассивной примеси в шестимерном пространстве (v_j, r_j).

Рассмотрим соотношение (5) при $r \to \infty$. Предположим, что $\langle u_k \rangle = 0$. Так как все одноточечные моменты нечетных порядков в силу изотропии равны нулю, то в этом случае $f \to F^2 (\lambda)$.

Здесь F — характеристическая функция вероятности скорости в одной точке.

Следовательно, из (5) при $r \to \infty$ получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{3} \varepsilon \lambda_k^2 F \tag{6}$$

Отсюда находим

$$F (\lambda, t) = F (\lambda, 0) \exp [-{}^1/_6 (\langle u_k^2 \rangle - \langle u_k^2 (0) \rangle)\lambda_k^2]$$

Если $\langle u_k^2 \rangle = 0$, то $F = 1$ и, следовательно,

$$F (\lambda, 0) = \exp [- {}^1/_6\, \lambda_k^2 \langle u_k^2 (0) \rangle] \tag{7}$$

Таким образом,

$$F = \exp [- {}^1/_6\, \lambda_k^2 \langle u_k^2 \rangle]$$

т. е. вероятность скорости в одной точке распределена по нормальному закону, что согласуется с экспериментальными данными Таунсенда [2].

Формула (7) свидетельствует о том, что уравнение (6) имеет физически правильное решение не со всякими начальными условиями. Последнее может вызвать удивление. Однако следует иметь в виду, что уравнение (6) было получено при определенных предположениях, справедливых лишь для турбулентности, находящейся в так называемом «равновесном» состоянии. Пока это состояние будет достигнуто, пройдет некоторое время, за которое функция F приобретет вид (7).

Рассмотрим другой предельный случай, когда r настолько мало, что принадлежит инерционному интервалу. При этом из соображений размерности и в силу изотропии функция f должна зависеть только от переменных

$$z = \sqrt{\lambda_k^2}(\varepsilon r)^{1/3}, \qquad y = \lambda_j r_j / r \sqrt{\lambda_k^2}$$

Учитывая это, из (5) получаем

$$\frac{1}{3} z \frac{\partial f}{\partial z} r^{2/3} \varepsilon^{-4/3} \frac{d\varepsilon}{dt} = i\left[\frac{1}{3} y \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{3} yz \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{4}{3}(1-y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{z} y (1-y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{z}(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}\right] + \frac{2}{3} z^2 f$$

Отсюда при $r \to 0$ или при $t \to \infty$ имеем

$$\frac{1}{3} y \frac{\partial}{\partial z}\left(z \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{4}{3}(1-y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} - \frac{1}{z} y (1-y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{z}(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{2}{3} i z^2 f = 0 \qquad (8)$$

Решение уравнения (8) с условиями $f = 1$, $\partial f / \partial z = 0$ при $r = 0$ есть характеристическая функция искомого распределения вероятностей в инерционном интервале.

Уравнение (8) принадлежит к гиперболическому типу при всех значениях переменных z и y, имеющих физический смысл ($0 \leqslant z < \infty$, $|y| \leqslant 1$). В связи с тем, что линия $z = 0$ является его характеристикой, возможны два случая: 1) решение отсутствует; 2) решение существует и неединственно. Несложное исследование показывает, что условие совместности выполняется и поэтому реализуется второй случай.

Уравнение (8) связывает моменты порядков n и $n + 3$. Структура связи такова, что момент порядка $2n + 3$ выражается через момент порядка $2n$ единственным образом, а момент порядка $2n$ выражается через момент порядка $2n - 3$ и одну произвольную постоянную. Действительно, представим f в виде

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} A_{n,m} \frac{i^n z^n y^m}{n!}$$

где m — целое, и подставим в (8). Равенство нулю коэффициента при $z^{n-1} y^{m-1}$ дает

$$A_{n,m} = -\frac{(n-m+2)(n-3m+6)}{m(4n-3m+6)} A_{n,m-2} - \frac{2n(n-1)(n-2)}{m(4n-3m+6)} A_{n-3,m+1}$$

Отсюда нетрудно убедиться, что при n — нечетном ($m = 1, 3, \ldots, n$) число неизвестных и число уравнений совпадает, а при n — четном ($m = 0, 2, \ldots, n$) число неизвестных на единицу больше числа уравнений.

В качестве примера приведем шесть первых, отличных от нуля моментов

$$\langle V_n^2 \rangle = A_{2,0}, \qquad \langle V_p^2 \rangle = {}^3/_4\, A_{2,0}$$
$$\langle V_n^2 V_p \rangle = -{}^4/_{15}, \quad \langle V_p^3 \rangle = -{}^4/_5$$
$$\langle V_n^4 \rangle = A_{4,0}, \quad \langle V_n^2 V_p^2 \rangle = {}^1/_4\, A_{4,0}; \quad \langle V_p^4 \rangle = {}^9/_{20}\, A_{4,0}$$
$$\langle V_n^4 V_p \rangle = -{}^{24}/_{23}\, A_{2,0}, \qquad \langle V_n^2 V_p^3 \rangle = -{}^{353}/_{391}\, A_{2,0}, \qquad \langle V_p^5 \rangle = -{}^{1410}/_{391}\, A_{2,0} \qquad (9)$$
$$\langle V_n^6 \rangle = A_{6,0}, \quad \langle V_n^4 V_p^2 \rangle = {}^3/_{20}\, A_{6,0} + {}^4/_{15}, \quad \langle V_n^2 V_p^4 \rangle = {}^1/_{10}\, A_{6,0} + {}^8/_{15} \quad \langle V_p^6 \rangle = {}^1/_4\, A_{6,0} + 4$$
$$\langle V_n^7 \rangle = -{}^{60}/_{31}\, A_{4,0}; \quad \langle V_n^4 V_p^3 \rangle = -{}^{5294}/_{5425}\, A_{4,0}; \langle V_n^2 V_p^5 \rangle = -{}^{33}/_{25}\, A_{4,0}\ \langle V_p^7 \rangle = -{}^{4221}/_{775}\, A_{4,0}$$

Здесь индекс p относится к компоненте вектора $\mathbf{V}$, параллельной вектору $\mathbf{r}$; n — перпендикулярной, а $\mathbf{V} = \mathbf{v}(\varepsilon r)^{-1/3}$. Из формул (9) получаем

$$\langle v_p^5 \rangle / (\langle v_p^2 \rangle \langle v_p^3 \rangle) = {}^{2350}/_{391}, \qquad \langle v_p^3 v_n^2 \rangle / (\langle v_p^3 \rangle \langle v_n^2 \rangle) = {}^{1765}/_{1564}$$
$$\langle v_p^7 \rangle / (\langle v_p^4 \rangle \langle v_p^3 \rangle) = {}^{469}/_{31}, \qquad \langle v_p^3 v_n^4 \rangle / (\langle v_p^3 \rangle \langle v_n^4 \rangle) = {}^{2647}/_{1805}$$

Постоянные $A_{4,0}$ и $A_{6,0}$ не могут быть произвольными. Из неравенств

$$(\langle v_p^3 \rangle)^2 \leqslant \langle v_p^2 \rangle [\langle v_p^4 \rangle - (\langle v_p^2 \rangle)^2], \qquad \langle v_n^6 \rangle \geqslant (\langle v_n^4 \rangle)^{3/2}$$

и формул (9) имеем

$$A_{4,0} \geqslant {}^{20}/_3\, ({}^8/_{25})^{2/3}, \qquad A_{6,0} \geqslant {}^8/_{25}\, ({}^{20}/_3)^{3/2}$$

Исследование моментов более высоких порядков показало, что характер ограничений на величины $A_{2n,0}$ всегда одинаков, а именно: каждая постоянная $A_{2n,0}$ должна быть не менее определенного числа, зависящего от величин $A_{2n-2,0}$, $A_{2n-4,0}, \ldots$ $A_{2,0}$.

Слишком большие значения этих постоянных невозможны, так как в противном случае ряд для характеристической функции не будет сходиться. Это соображение вероятно позволит получить какую-либо конкретную оценку величин $A_{2n,0}$ сверху при использовании уравнения для плотности вероятности разности скоростей, которое в инерционном интервале имеет вид

$$-w\alpha\Pi - \frac{1}{3}w^2\alpha\frac{\partial\Pi}{\partial w} + w(1-\alpha^2)\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha} + \frac{2}{3w^2}\frac{\partial}{\partial w}\left(w^2\frac{\partial\Pi}{\partial w}\right) + \frac{2}{3w^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(1-\alpha^2)\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}\right] = 0$$

$$\left(w = \sqrt{\overline{v_k^2}}\,(\varepsilon r)^{-1/3}, \quad \alpha = v_j r_j / r\sqrt{\overline{v_k^2}}, \ \Pi = P(\varepsilon r)^{-1}\right)$$

Это уравнение принадлежит к эллиптическому типу. Его решение также может оказаться неединственным, так как коэффициент, стоящий при неизвестной функции ($-w\alpha$), меняет знак. Однако в этом случае существует ограничение: функция $\Pi(w)$ должна убывать настолько быстро, чтобы сходились интегралы вида

$$\int_0^\infty\int_{-1}^1 \Pi(w,\alpha)\,w^n\,d\alpha\,dw$$

Приведем теперь общее решение уравнения (5). Функция $f - F^2$ очевидно удовлетворяет уравнению (5). Преобразование Фурье от нее существует. Поэтому к уравнению (5), где неизвестная функция f заменена на $f - F^2$, можно применить преобразование Фурье. При этом (5) трансформируется в следующее уравнение

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \varkappa_k\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_k} + \frac{2}{3}\varepsilon\lambda_k^2\Phi$$

Здесь Φ — преобразование Фурье от функции $f - F^2$. Отсюда получаем

$$f = F^2 + \int\Phi\left[\sqrt{\overline{\varkappa_k^2}},\ \lambda_k^2(1-\beta^2),\ \sqrt{\overline{\varkappa_k^2}}\,t + \lambda\beta\right]\times$$

$$\times\exp\left[{}^2/_3\lambda_k^2(1-\beta^2)\int_0^t\varepsilon(s)\,ds - {}^2/_3\int_0^t\left(\sqrt{\overline{\varkappa_k^2}}\,t + \lambda\beta - \sqrt{\overline{\varkappa_k^2}}\,s\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\,\varepsilon(s)\,ds - i\sqrt{\overline{\varkappa_k^2}}\,r\gamma\right]\varkappa_k^2(1-\beta^2-\gamma^2-y^2+2\beta\gamma y)^{-1/2}\,d\left(\sqrt{\overline{\varkappa_k^2}}\right)d\beta\,d\gamma$$

$$\left(\beta = \lambda_j\varkappa_j/\sqrt{\lambda_k^2\varkappa_k^2}, \quad \gamma = r_j\varkappa_j/r\sqrt{\overline{\varkappa_k^2}}\right)$$

Полученное решение не дает, однако, много информации, так как обычно начальные условия неизвестны. Заметим, что эти условия нельзя задавать произвольно.

Те же самые идеи, которые были использованы выше при отыскании вероятности скорости, могут быть использованы при нахождении вероятности концентрации пассивной примеси, распределенной статистически однородно в однородном турбулентном потоке. Для этого достаточно предположить, что величины $e^{i\mu c}$ и $D\partial^2 c/\partial x_k^2 = \chi$ статистически независимы при условии, что числа Рейнольдса и Пекле достаточно велики. Здесь c — концентрация, D — коэффициент молекулярной диффузии. Аналогичные выкладки приводят к уравнению

$$\partial\langle e^{i\mu c}\rangle/\partial t = \langle\chi\rangle\mu^2\langle e^{i\mu c}\rangle \tag{10}$$

которое подобно уравнению (6). Величина $\langle\chi\rangle$, характеризующая скорость смешения вещества до молекулярных масштабов, аналогична величине ε.

Решение уравнения (10) с условием $\langle e^{i\mu c}\rangle \doteq e^{i\mu\langle c\rangle}$ при $\langle c^2\rangle = \langle c\rangle^2$ имеет вид

$$\langle e^{i\mu c}\rangle = \exp\left[-{}^1/_2(\langle c^2\rangle - \langle c\rangle^2)\mu^2 + i\mu\langle c\rangle\right]$$

т. е. вероятность концентрации примеси распределена по нормальному закону.

Поступила 9 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1941, т. 30, № 4, стр. 299—303.
2. Townsend A. A. The measurement of double and triple correlation derivatives in isotropic turbulence. Proc. Camb. Phil. Soc., 1947, vol. 43, pp. 560—567.