# УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ

**А. С. Монин**

(Москва)

Турбулентность — это явление, наблюдаемое в очень многих течениях жидкостей и газов в природе и технических устройствах и заключающееся в наличии беспорядочных пульсаций (крайне нерегулярных изменений в пространстве и времени) скорости, давления, температуры и других гидродинамических характеристик этих течений.

Подчеркнем с самого начала, что масштабы пространственных неоднородностей гидродинамических полей турбулентного течения не могут быть очень малыми: неоднородностям очень малых размеров отвечали бы очень большие градиенты скорости, и вследствие очень больших затрат энергии на преодоление сил вязкого трения такие движения практически не могли бы происходить. В результате минимальные пространственные масштабы $\lambda$ и периоды $\tau$ турбулентных пульсаций (согласно А. Н. Колмогорову [1], определяемые формулами $\lambda \sim (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$, $\tau \sim (\nu / \varepsilon)^{1/2}$, где $\nu$ — кинематический коэффициент молекулярной вязкости, а $\varepsilon$ — скорость вязкой диссипации кинетической энергии в единице массы) в обычных условиях превосходят на несколько порядков масштабы и периоды молекулярных движений. Так, например, в воздухе при нормальном давлении $\lambda \approx 0.1$ *см*, а длина свободного пробега молекул имеет порядок $10^{-5}$ *см*; кроме того, поскольку турбулентные пульсации скорости по порядку величины не превосходят средней скорости теплового движения молекул (близкой к $5 \times 10^4$ *см/сек*), значения $\tau$ ($\approx 0$ 1 *сек*) превосходят среднее время между молекулярными столкновениями ($10^{-9}$ *сек*) на много порядков.

На расстояниях, сравнимых с $\lambda$, и в течение промежутков времени, сравнимых с $\tau$, все гидродинамические поля изменяются плавно и могут быть описаны дифференцируемыми функциями. Поэтому турбулентные течения вполне можно описывать с помощью обычных дифференциальных уравнений гидромеханики (скажем, уравнений Навье — Стокса). Таким образом, возвращаться для описания турбулентности к уравнениям кинетической теории газов, как это иногда предлагается, нет необходимости (за исключением таких специальных случаев, как очень разреженные газы, в которых внутренний масштаб турбулентности $\lambda$ становится сравнимым или даже превосходит среднюю длину свободного пробега молекул — например, в верхней атмосфере, где $\lambda$ достигает десятков метров на высотах более 100 *км*, сотен метров выше 120 *км* и тысяч метров выше 140 *км*.).

Более того, возвращение к уравнениям кинетической теории газов лишь добавляет к трудностям, связанным с проблемой замыкания в теории турбулентности (на которых остановимся ниже), дополнительные осложнения, связанные с неизбежно остающейся необходимостью перехода от понятий и уравнений кинетической теории газов к понятиям и уравнениям макроскопической гидромеханики (а этот переход не так уж прост — ср., например, вывод уравнений гидромеханики из уравнений кинетической теории газов по методу Энскога — Чепмена). Не будем более задерживаться на этом вопросе и будем исходить из того, что турбулентные течения описываются обычными дифференциальными уравнениями гидромеханики.

Однако непосредственное использование уравнений гидромеханики для точного описания всех деталей индивидуального турбулентного течения возможно лишь в принципе. Практически же оно оказывается невозможным из-за крайней нерегулярности гидродинамических полей турбулентных течений: если характеризовать течение жидкости или газа как нелинейную механическую систему с очень большим числом степеней свободы (или обобщенных координат, в качестве которых можно принять, например, коэффициенты разложения поля скорости по какой-либо полной системе функций от пространственных координат), то в случае турбулентного течения возбужденным всегда оказывается огромное число $N$ степеней свободы (согласно Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицу [2] в случае течения в ограниченном объеме $N \approx (N_{\mathrm{Re}}/N_{\mathrm{Re}^*})^{9/4}$, где Re — число Рейнольдса, а Re* — его критическое значение), так что изменения в пространстве и времени любой гидродинамической характеристики описываются функциями, содержащими громадное число $N$ компонент Фурье. Более того, гидродинамические поля турбулентного течения сильно зависят от мельчайших деталей начальных условий, которые никогда не бывают известными с достаточной полнотой, так что точные решения уравнений гидромеханики вследствие их неустойчивости относительно малых возмущений начальных данных были бы крайне громоздкими и практически бесполезными. Целесообразным и практически возможным представляется лишь статистическое описание турбулентных течений, опирающееся на изучение статистических свойств ансамбля турбулентных течений, находящихся в макроскопически одинаковых внешних условиях.

**§ 1. Функциональная формулировка проблемы турбулентности.** Сформулируем проблему полного статистического описания турбулентных течений (называемую иногда «проблемой турбулентности») на математическом языке, ограничившись для простоты случаем несжимаемой жидкости, течения которой полностью характеризуются своими соленоидальными (т. е. бездивергентными) полями скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$; давление $p$ может быть выражено через поле скорости в тот же момент времени при помощи формулы

$$p(\mathbf{x}, t) = -\rho\Delta^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial^2 u_\alpha(\mathbf{x}', t)\, u_\beta(\mathbf{x}', t)}{\partial x_\alpha' \partial x_\beta'} = \frac{\rho}{4\pi}\int \frac{\partial^2 u_\alpha(\mathbf{x}', t)\, u_\beta(\mathbf{x}', t)}{\partial x_\alpha' \partial x_\beta'} \frac{\partial x'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \quad (1.1)$$

где $\rho$ — постоянная плотность жидкости; $\Delta^{-1}$ — интегральный оператор, обратный оператору Лапласа (по повторяющимся греческим индексам здесь и далее подразумевается суммирование). Итак, пусть $\Omega = \{\omega\}$ есть фазовое пространство турбулентного течения несжимаемой жидкости, т. е. множество, точками $\omega$ которого являются всевозможные соленоидальные векторные поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющие уравнениям гидромеханики и надлежащим краевым условиям на границах потока; будем считать, что на этом множестве задана некоторая топология, так что $\Omega$ есть линейное топологическое функциональное пространство. Тогда проблема турбулентности заключается в нахождении распределения вероятности на фазовом пространстве, т. е. вероятностной меры $P(d\Omega)$ на $\Omega$. Предположение о существовании такого распределения вероятности эквивалентно тому, что поле скорости турбулентного течения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ трактуется как случайное поле.

С чисто математической точки зрения фазовое пространство $\Omega$ бесконечномерно. Определение такой меры $P(d\Omega)$ на бесконечномерном пространстве, которая обладала бы достаточно удобными для анализа свойствами, в частности, была бы счетно-аддитивной (что обеспечило бы, например, перестановочность операции интегрирования по этой мере функций от $\omega$, т. е. оператора математического ожидания функционалов от $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, с операциями предельного перехода, в том числе дифференцирования и интегрирования этих функционалов по параметру), является далеко не простым делом (см., например, книгу И. М. Гельфанда и Н. Я. Виленкина [3]). Кроме того, поскольку в бесконечномерных пространствах не определен элемент объема, распределение вероятности $P(d\Omega)$ не имеет плотности вероятности, и, чтобы избежать операций с относительно неудобными для анализа функциями от множеств $P(S)$, $S \subset \Omega$, можно рассматривать вместо распределения вероятности $P(d\Omega)$ его «преобразование Фурье» — характеристический функционал

$$\Phi[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t)] = \langle \exp\{i(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{u})\}\rangle = \int e^{i(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{u})} P(d\Omega) \quad (1.2)$$

где $(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{u})$ обозначает интеграл по $d\mathbf{x}\, dt$ по всему занятому жидкостью объему от скалярного произведения случайной функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ на неслучайную функцию $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t)$; угловые скобки здесь и далее обозначают математическое ожидание этого выражения (т. е. интеграл от него по мере $P(d\Omega)$). Понятие о характеристическом функционале впервые было введено еще в 1935 г. А. Н. Колмогоровым [4] (для распределений вероятности в банаховых пространствах). Необходимые и достаточные условия для того, чтобы функционал $\Phi\,[\theta(\mathbf{x}, t)]$ был характеристическим функционалом некоторой счетно-аддитивной вероятностной меры (включающие его неотрицательную определенность, обращение в единицу в нуле и непрерывность в некоторой топологии), а также условия единственности определения меры ее характеристическим функционалом изучены Ю. В. Прохоровым [5]. Заметим, впрочем, что перечисленные математические трудности, связанные с бесконечномерностью фазового пространства $\Omega$, не имеют реального физического содержания, так как число степеней свободы $N$ турбулентного течения, а потому и равное $N$ количество измерений фазового пространства на самом деле хоть и очень велико, но конечно, как это отмечалось выше.

Таким образом, можно считать, что нахождение характеристического функционала есть решение проблемы турбулентности. Для нахождения характеристического функционала можно воспользоваться тем, что он должен удовлетворять некоторым динамическим уравнениям, вытекающим из уравнений гидромеханики. Чтобы их сформулировать, введем понятие о вариационной производной функционала $\Phi\,[\theta(\mathbf{x}, t)]$ по функциональному аргументу $\theta_j(\mathbf{x}, t)$, полагая

$$D_i(\mathbf{x}', t')\,\Phi\,[\theta(\mathbf{x}, t)] = \lim_{\substack{|\delta_j\theta(\mathbf{x}, t)|\to 0\\ V\to 0}} \frac{\Phi\,[\theta(\mathbf{x}, t) + \delta_j\theta(\mathbf{x}, t)] - \Phi\,[\theta(\mathbf{x}, t)]}{\int\limits_V \delta_j\theta(\mathbf{x}, t)\,d\mathbf{x}\,dt} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\partial}{\partial h}\,\Phi\,[\theta(\mathbf{x}, t) + h\mathbf{e}_j\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\delta(t-t')] \tag{1.3}$$

где $\delta_j\,\theta(\mathbf{x}, t)$ — векторная функция, у которой отлична от нуля только $j$-я компонента, и притом только в малой окрестности $V$ точки $(\mathbf{x}', t')$, а $\mathbf{e}_j$ — единичный вектор оси $x_j$. В случае характеристического функционала (1.2) вариационная производная (1.3) оказывается равной

$$D_j(\mathbf{x}', t')\;\Phi\;[\theta(\mathbf{x}, t)] = i\,\langle u_j(\mathbf{x}', t')\,\exp\{i\,(\theta\cdot u)\}\rangle \tag{1.4}$$

Учитывая, что величина $\exp\{i(\theta\cdot\mathbf{u})\}$ постоянна в пространстве и времени, дифференцируя обе части равенства (1.4) по $x_j'$, суммируя по $j$ и пользуясь уравнением неразрывности $\partial u_\alpha(\mathbf{x}', t')\,/\,\partial x_\alpha' = 0$, получим для функционала (1.2) уравнение в вариационных производных первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\{D_\alpha(\mathbf{x}, t)\,\Phi\} = 0 \tag{1.5}$$

эквивалентное условию соленоидальности поля скорости (оно эквивалентно также требованию, чтобы значения функционала $\Phi[\theta(\mathbf{x}, t)]$ не менялись от прибавления к его функциональному аргументу $\theta(\mathbf{x}, t)$ произвольного потенциального слагаемого $\nabla\varphi(\mathbf{x}, t)$, или требованию, чтобы функционал $\Phi$ зависел лишь от соленоидальной компоненты $\theta^{\circ}(\mathbf{x}, t)$ своего аргумента). Далее, дифференцируя обе части равенства (1.4) по $t'$, выражая $\partial u_j\,/\,\partial t'$ при помощи уравнений Навье — Стокса через пространственные производные от поля скорости и вновь пользуясь равенством (1.4), получим для характеристического функционала $\Phi$ следующее динамическое уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right) D_j\Phi = i\left(\delta_{j\beta} - \frac{\partial}{\partial x_j}\,\Delta^{-1}\,\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right)\frac{\partial D_\alpha D_\beta\Phi}{\partial x_\alpha} \tag{1.6}$$

Решать это уравнение следует при статистически заданном начальном поле скорости $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$, т. е. при условии, что на функциях $\theta(\mathbf{x}, t) = \theta(\mathbf{x})\,\delta(t)$ функционал $\Phi\,[\theta(\mathbf{x}, t)]$ обращается в заданный характеристический функционал $\Phi_0\,[\theta(\mathbf{x})]$ начального поля скорости. Динамическое уравнение типа (1.6) для характеристического функционала поля скорости турбулентного течения несжимаемой жидкости впервые было получено Э. Хопфом [6] (правда, для менее полной статистической характеристики поля скорости — его пространственного характеристического функционала, который рассмотрим чуть ниже). Уравнение (1.6) является наиболее полной и наиболее компактной формой уравнений турбулентного движения.

Замечательной особенностью уравнения (1.6) является его линейность. Таким образом, хотя динамика жидкости нелинейна (эволюция индивидуального поля скорости $\mathbf{u}$ $(\mathbf{x}, t)$ описывается нелинейными уравнениями), основная проблема статистической динамики турбулентных течений — проблема турбулентности оказывается линейной задачей. Вследствие этого для характеристического функционала $\Phi$ имеет место принцип суперпозиции: если начальный функционал $\Phi_0$ есть линейная комбинация функционалов $\Phi_0^{(\gamma)}$, то $\Phi$ есть такая же линейная комбинация функционалов $\Phi^{(\gamma)}$, являющихся решениями уравнения (1.6) при начальных данных $\Phi_0^{(\gamma)}$.

Несколько более общей, чем (1.6), формулировкой проблемы турбулентности будет описание турбулентных течений жидкости в поле заданных случайных сил $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ при помощи совместного характеристического функционала полей $\mathbf{u}$ $(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{X}$ $(\mathbf{x}, t)$, определяемого формулой

$$\Phi[\theta(\mathbf{x}, t), \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)] = \langle \exp\{i(\theta\cdot\mathbf{u}) + i(\mathbf{f}\cdot\mathbf{X})\}\rangle \qquad (1.7)$$

динамическое уравнение для которого получается добавлением в правую часть (1.6) слагаемого

$$\left(\delta_{j\beta} - \frac{\partial}{\partial x_j}\Delta^{-1}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right) D_{f_\beta}\Phi$$

где $D_{f_\beta}$ — вариационная производная по $f_\beta$ $(\mathbf{x}, t)$. Конкретные задачи для такого уравнения формулируются, например, в работе [7]. Наоборот, более узкой, чем (1.6), но все же достаточной для многих целей формулировкой проблемы турбулентности будет описание турбулентного поля скорости $\mathbf{u}$ $(\mathbf{x}, t)$ в фиксированный момент времени $t$ при помощи характеристического функционала $\Phi$ $[\theta(\mathbf{x}); t]$, определяемого той же формулой (1.2),в которой теперь $(\theta\cdot\mathbf{u})$ обозначает интеграл от скалярного произведения $\theta(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ только по $d\mathbf{x}$; такой функционал можно назвать пространственным, тогда как функционал $\Phi$ $[\theta$ $(\mathbf{x},t)]$ был пространственно-временным. Динамическое уравнение для пространственного характеристического функционала поля скорости имеет вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left(\theta^\circ\cdot\left\{i\frac{\partial}{\partial x_\alpha}D_\alpha + \nu\Delta\right\}\mathbf{D}\Phi\right) \qquad (1.8)$$

где $\theta^\circ$ — соленоидальная компонента векторного поля $\theta(\mathbf{x})$, от которой только и зависит функционал $\Phi$ вследствие (1.5), а $\mathbf{D}$ — векторный оператор с компонентами $D_j(\mathbf{x})$. Решение уравнения (1.8) при заданном начальном условии $\Phi$ $[\theta(\mathbf{x}); 0] = \Phi_0[\theta(\mathbf{x})]$ даст полное статистическое описание поля скорости $\mathbf{u}$ $(\mathbf{x}, t)$ в каждый фиксированный момент времени $t$.

Уравнения турбулентного движения (1.6) или (1.8) иногда удобно записывать в спектральной форме, принимая за аргумент характеристического функционала не функцию $\theta$, а ее преобразование Фурье ([8] § 28).

**§ 2. Уравнения для конечномерных распределений вероятности.** Пусть $d\Omega$ — цилиндрическое множество элементов фазового пространства $\Omega$ турбулентного течения, состоящее из всех тех функций $\mathbf{u}$ $(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих уравнениям гидромеханики и краевым условиям, которые в фиксированных $n$ точках пространства-времени $M_m = (\mathbf{x}_m, t_m)$, $(m = 1, \ldots, n)$ принимают значения $\mathbf{u}$ $(M_m)$, удовлетворяющие условиям $u_{mj} < u_j(M_m) \leqslant u_{mj} + du_{mj}$ $(j = 1, 2, 3)$. Вероятностную меру $P$ $(d\Omega)$ такого цилиндрического множества можно записать в виде

$$P(d\Omega) = p_{M_1,\ldots,M_n}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)\, d\mathbf{u}_1, \ldots, d\mathbf{u}_n \qquad (2.1)$$

где $p_{M_1,\ldots,M_n}(\mathbf{u}_1,\ldots, \mathbf{u}_n)$ — $3n$-мерная плотность вероятности случайных величин $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(M_1),\ldots, \mathbf{u}_n = \mathbf{u}(M_n)$. При некоторых общих условиях знание всех плотностей вероятности $p_{M_1,\ldots,M_n}(\mathbf{u}_1,\ldots, \mathbf{u}_n)$ для значений поля $\mathbf{u}$ $(\mathbf{x}, t)$ на всевозможных конечных наборах точек пространства-времени позволяет полностью построить меру $P$ $(d\Omega)$, т. е. является эквивалентным полным статистическим описанием случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Таким образом, проблема турбулентности сводится к определению всех конечномерных распределений вероятности $P_{M_1,\ldots,M_n}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)$. Обратно, если характеристический функционал (1.2) известен, то конечномерные распределения вероятности можно найти по его значениям на линейных комбинациях дельта-функций, так как эти значения имеют вид (2.2)

$$\Phi\left[\sum_{m=1}^{n}\theta_m\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_m)\,\delta(t-t_m)\right]=\left\langle\exp\left\{i\sum_{m=1}^{n}\theta_m\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x}_m,t_m)\right\}\right\rangle=\varphi_{M_1,\ldots,M_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n)$$

т. е. являются характеристическими функциями конечномерных распределений вероятности, и последние могут быть определены по формулам

$$p_{M_1,\ldots,M_n}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{3n}}\int\exp\left[-i\sum_{m=1}^{n}\theta_m\cdot\mathbf{u}_m\right]\varphi_{M_1,\ldots,M_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n)\,d\theta_1,\ldots,d\theta_n \tag{2.3}$$

Характеристические функции для значений $\mathbf{u}$ в точках $M_1,\ldots, M_n$ с одним и тем же $t$ можно получить также из пространственного функционала $\Phi\,[\theta(\mathbf{x});\, t]$:

$$\Phi\left[\sum_{m=1}^{n}\theta_m\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_m);\ t\right]=\varphi_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n;\ t) \tag{2.4}$$

Условие соленоидальности поля скорости в терминах характеристических функций конечномерных распределений вероятности записывается в виде

$$[\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\nabla_\theta\varphi_{\mathbf{x}}(\theta,\ t)]_{\theta=0}=0 \tag{2.5}$$

независимо от того, зависит ли функция $\varphi$ еще от каких-нибудь аргументов $M_1,\ldots, M_n$ и $\theta_1,\ldots, \theta_n$.

Замкнутых динамических уравнений для характеристических функций (2.2) или (2.4) получить нельзя. Действительно, даже при полном пренебрежении всеми нелинейными членами уравнений Навье — Стокса (т. е. когда последние берутся просто в виде $\partial\mathbf{u}/\partial t=\nu\,\Delta\mathbf{u}$) пространственный характеристический функционал поля скорости оказывается имеющим вид

$$\Phi\,[\theta(\mathbf{x});\ t]=\Phi_0\left[\int\exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4\nu t}\right)\frac{\theta(\mathbf{x}')}{(4\pi\nu t)^{3/2}}\,d\mathbf{x}'\right] \tag{2.6}$$

и при $\theta(\mathbf{x})=\sum_{m=1}^{n}\theta_m\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_m)$ получается

$$\varphi_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n;\ t)=\Phi_0\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{\theta_m}{(4\pi\nu t)^{3/2}}\exp\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_m|^2}{4\nu t}\right)\right]=$$

$$=\left\langle\exp\left\{i\sum_{m=1}^{n}\left[\theta_m\cdot\int\exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_m|^2}{4\nu t}\right)\frac{\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}}{(4\pi\nu t)^{3/2}}\right]\right\}\right\rangle \tag{2.7}$$

т. е. эта величина зависит от значений начального поля скорости $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ не только в точках $\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_n$, но и во всем непрерывном пространстве и, следовательно, она не может быть выражена через одни только значения $\varphi_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(\theta_1,\ldots, \theta_n;\ 0)$. Удается получить лишь уравнения, выражающие производные по времени от $n$-точечных характеристических функций через значения как самих этих функций, так и $(n+1)$-точечных характеристических функций. Для функций (2.2) с различными $t_1,\ldots, t_n$ и различными $\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_n$ такие уравнения имеют вид (2.8)

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_m}-i\,(\nabla_{\mathbf{x}_m}\cdot\nabla_{\theta_m})\right]\varphi_{M_1,\ldots,M_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n)=$$

$$=-i\,[(\theta_m\cdot\nabla_{\mathbf{x}'})\,\Delta^{-1}(\mathbf{x}',\ \mathbf{x})\,(\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\nabla_\theta)^2\varphi_{M_1,\ldots,M_nM}(\theta_1,\ldots,\theta_n,\theta)]_{\theta=0,\,\mathbf{x}'=\mathbf{x}_m}+$$

$$+\nu\,[\Delta_{\mathbf{x}}(\theta_m\cdot\nabla_\theta)\,\varphi_{M_1,\ldots,M_nM}(\theta_1,\ldots,\theta_n,\theta)]_{\theta=0,\,\mathbf{x}=\mathbf{x}_m}\qquad (M=(x,\ t_m))$$

Для плотности вероятности (2.3) при помощи (2.8) получаются следующие динамические уравнения:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_m} + (\mathbf{u}_m \cdot \nabla_{\mathbf{x}_m})\right] p_{M_1,\ldots,M_n}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n) = \tag{2.9}$$
$$= -\int [(\nabla_{\mathbf{u}_m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'}) \Delta^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})^2 p_{M_1,\ldots,M_n M}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n, \mathbf{u})]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}_m} d\mathbf{u} -$$
$$-\nu \int (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}_m}) [\Delta_{\mathbf{x}} p_{M_1,\ldots,M_n M}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n, \mathbf{u})]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_m} d\mathbf{u}$$

Для функций (2.4), получающихся из (2.2) при $t_1 = \ldots = t_n = t$, динамические уравнения выводятся суммированием уравнений (2.8) по всем $m$ с учетом справедливого в этом случае равенства $\Sigma \partial\varphi / \partial t_m = \partial\varphi / \partial t$. Аналогично из (2.9) выводится уравнение для плотности вероятности $P_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n; t)$. Уравнения (2.8), (2.9) выглядят несколько проще в спектральной форме. А именно, допустим, что можно придать смысл спектральным представлениям

$$\varphi_{M_1,\ldots,M_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n) = \int \exp\left[i \sum_{m=1}^{n} \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{x}_m\right] \psi_{Q_1,\ldots,Q_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n) d\mathbf{k}_1,\ldots, d\mathbf{k}_n \tag{2.10}$$
$$p_{M_1,\ldots,M_n}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n) = \int \exp\left[i \sum_{m=1}^{n} \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{x}_m\right] \pi_{Q_1,\ldots,Q_n}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n) d\mathbf{k}_1,\ldots, d\mathbf{k}_n$$

где $Q_m = (\mathbf{k}_m, t_m)$ при этом, конечно, обобщенные функции $\pi_{Q_1,\ldots,Q_n}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)$ и $\psi_{Q_1,\ldots,Q_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ будут связаны таким же преобразованием Фурье (2.3), каким связаны функции $P_{M_1,\ldots,M_n}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)$ и $\varphi_{M_1,\ldots,M_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n)$. Тогда для функций $\psi_{Q_1,\ldots,Q_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ из (2.8) получаются уравнения

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_m} + (\mathbf{k}_m \cdot \nabla_{\theta_m})\right] \psi_{Q_1,\ldots,Q_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n) = \int d\mathbf{k} \left\{\left[\frac{(\mathbf{k}\cdot\theta_m)(\mathbf{k}\cdot\nabla_\theta)^2}{k^2} - \right.\right. \tag{2.11}$$
$$\left.\left. -\nu k^2 (\theta_m \cdot \nabla_\theta)\right] \psi_{Q_1,\ldots,Q_{m-1}Q_m' Q_{m+1}\ldots Q_n Q}(\theta_1,\ldots,\theta_n, \theta)\right\}_{\theta=0}$$
$$(Q_m' = (\mathbf{k}_m - \mathbf{k}, t_m), \quad Q = (\mathbf{k}, t_m))$$

Аналогично для функций $\pi_{Q_1,\ldots,Q_n}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)$ из (2.9) получаются следующие уравнения:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_m} + i(\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{u}_m)\right] \pi_{Q_1,\ldots,Q_n}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n) = \int d\mathbf{k} d\mathbf{u} \left[\nu k^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}_m}) - \right. \tag{2.12}$$
$$\left. -i \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u})^2 (\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{u}_m})}{k^2}\right] \pi_{Q_1,\ldots,Q_{m-1} Q_m' Q_{m+1},\ldots,Q_n Q}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n, \mathbf{u})$$

Выпишем, в частности, уравнение для одноточечного распределения вероятности поля скорости, скажем, в форме (2.9). После очевидного изменения обозначений такое уравнение можно записать в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\right] p(\mathbf{u} \mid \mathbf{x}, t) = \tag{2.13}$$
$$= -\int [(\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'}) \Delta^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1)(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1})^2 p(\mathbf{u} \mid \mathbf{x}, t; \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{x}_1, t)]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} d\mathbf{u}_1 -$$
$$-\nu \int (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{u}}) [\Delta_{\mathbf{x}_1} p(\mathbf{u} \mid \mathbf{x}, t; \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{x}_1, t)]_{\mathbf{x}_1=\mathbf{x}} d\mathbf{u}_1$$

Любая из эквивалентных систем уравнений (2.8), (2.9), (2.11) или (2.12) может рассматриваться как новая форма уравнений турбулентного движения (такие уравнения, по-видимому, ранее не публиковались)[1]. Аналитически эти уравнения, конечно, проще, чем уравнения (1.6) или (1.8) для характеристических функционалов, так как последние вместо частных производных $\nabla_{\theta_m}$ или $\nabla_{u_m}$ содержат вариационные производные. Но зато новые уравнения не замкнуты: число неизвестных функций здесь всегда больше числа уравнений. Поэтому при их использовании возникает проблема замыкания.

**§ 3. Уравнения для моментов.** Простейшими статистическими характеристиками турбулентного поля скорости являются его моменты, определяемые любой из формул

$$\begin{aligned} B_{j_1,\ldots,j_n}(M_1,\ldots,M_n) &= \langle u_{j_1}(M_1)\ldots u_{j_n}(M_n)\rangle = \\ &= \int u_{1j_1},\ldots u_{nj_n} p_{M_1,\ldots,M_n}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)\,d\mathbf{u}_1\ldots d\mathbf{u}_n = \\ &= (-i)^n \left[\frac{\partial^n \varphi_{M_1,\ldots,M_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n)}{\partial\theta_{1j_1}\ldots\partial\theta_{nj_n}}\right]_{\theta_1=\ldots=\theta_n=0} = \\ &= (-i)^n \{D_{j_1}(M_1)\ldots D_{j_n}(M_n)\,\Phi[\theta(M)]\}_{\theta(M)\equiv 0} \end{aligned} \tag{3.1}$$

где какие-то из индексов $j_1,\ldots, j_n$ и какие-то из точек $M_1,\ldots, M_n$ могут совпадать. При некоторых общих условиях знание всех моментов позволяет восстановить конечномерные распределения вероятности путем использования рядов Тейлора для их характеристических функций

$$\varphi_{M_1,\ldots,M_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n) = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \sum_{m_1,\ldots,m_N=1}^{n} B_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}(M_{m_1},\ldots,M_{m_N})\theta_{m_1\alpha_1}\ldots\theta_{m_N\alpha_N} \tag{3.2}$$

Аналогично этому при некоторых общих условиях значение всех моментов поля скорости позволяет восстановить его характеристический функционал с помощью функционального ряда Тейлора

$$\Phi[\theta(M)] = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \int B_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}(M_1,\ldots,M_N)\,\theta_{\alpha_1}(M_1)\ldots\theta_{\alpha_N}(M_N)\,dM_1\ldots dM_N \tag{3.3}$$

Таким образом, проблема турбулентности может быть сведена к определению всех моментов поля скорости. Для определения моментов можно использовать динамические уравнения, получаемые, например, вычислением вариационных производных в нуле от правой и левой частей уравнения (1.6) или (1.8) для характеристического функционала или производных по аргументам $\theta_{mj}$ в нуле от правой и левой частей уравнения (2.8) для характеристической функции конечномерного распределения вероятности. Такие динамические уравнения можно вывести также, вычисляя производные по времени от моментов непосредственно при помощи уравнений Навье — Стокса; этот метод был использован А. А. Фридманом и Л. В. Келлером [9], впервые давшими полную формулировку проблемы турбулентности (в терминах моментов). Для моментов $B_{j_1,\ldots,j_n}(M_1,\ldots, M_n)$ при различных $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ и различных $t_1,\ldots,t_n$ уравнения Фридмана — Келлера имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_m} - \nu\Delta_{\mathbf{x}_m}\right) B_{j_1,\ldots,j_n}(M_1,\ldots,M_n) &= \\ = -\frac{\partial}{\partial x_{m\alpha}} B_{j_1,\ldots,j_{m-1}j_m\alpha j_{m+1},\ldots,j_n}(M_1,\ldots,M_{m-1},M_m,M_m,M_{m+1},\ldots,M_n) &+ \\ + \frac{\partial}{\partial x_{mj_m}} \Delta^{-1}(\mathbf{x}_m,\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} B_{j_1,\ldots,j_{m-1}\alpha\beta j_{m+1},\ldots,j_n}(M_1,\ldots,M_{m-1},M,M,M_{m+1},\ldots,M_n) \end{aligned} \tag{3.4}$$

[1] *Примечание при корректуре.* После сдачи статьи в печать появилась работа Лундгрена [24], в которой получены уравнения для одноточечных и двуточечных функций распределения вероятности поля скоростей в форме аналогичной, например, (2.9), (2.13).

где, как и выше, $M = (\mathbf{x}, t_m)$. Для таких же моментов, но с одинаковыми временными аргументами $t_1 = \ldots = t_n = t$ динамические уравнения получаются суммированием уравнений (3.4) по всем $m$ с учетом справедливого в этом случае равенства $\Sigma \partial B / \partial t_m = \partial B / \partial t$. Уравнения для моментов являются еще одной формой уравнений турбулентного движения. Их аналитический вид наиболее прост, но они всегда незамкнуты: в уравнениях для моментов $n$-го порядка обязательно возникают моменты $(n + 1)$-го порядка. Выпишем для наглядности простейшие из уравнений Фридмана — Келлера. В случае $n = 1$ уравнения (3.4) принимают вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \triangle_{\mathbf{x}}\right) \langle u_j(\mathbf{x}, t)\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \langle u_j(\mathbf{x}, t) u_\alpha(\mathbf{x}, t)\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \triangle^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha' \partial x_\beta'} \langle u_\alpha(\mathbf{x}', t) u_\beta(\mathbf{x}', t)\rangle \tag{3.5}$$

Эти уравнения, выводимые просто осреднением уравнений Навье — Стокса, были впервые получены еще Рейнольдсом (1894 г.) и поэтому часто именуются уравнениями Рейнольдса. Принимая для пульсаций (отклонений от среднего) обозначения $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}\rangle$ и пользуясь формулой $\langle u_\alpha u_\beta\rangle = \langle u_\alpha\rangle \langle u_\beta\rangle + \langle u_\alpha' u_\beta'\rangle$, замечаем, что в уравнениях (3.5), кроме осредненной скорости $\langle \mathbf{u}\rangle$, фигурируют еще новые неизвестные $\langle u_\alpha' u_\beta'\rangle$ (величины $\tau_{\alpha\beta} = -\rho\langle u_\alpha' u_\beta'\rangle$ называются напряжениями Рейнольдса). Далее, при $n = 2$ и $t_1 = t_2 = t$ из (3.4) получаем

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu(\triangle_{\mathbf{x}_1} + \triangle_{\mathbf{x}_2})\right] B_{ij}(M_1, M_2) = \\ = -\frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}} B_{i\alpha j}(M_1, M_1, M_2) - \frac{\partial}{\partial x_{2\alpha}} B_{ij\alpha}(M_1, M_2, M_2) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_{1i}} \triangle^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} B_{\alpha\beta j}(M, M, M_2) + \frac{\partial}{\partial x_{2j}} \triangle^{-1}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} B_{i\alpha\beta}(M_1, M, M)\end{aligned} \tag{3.6}$$

Эти уравнения радикально упрощаются в случае изотропной турбулентности слагаемые в третьей строчке формулы (3.6) обращаются в нуль, вторые и третьи моменты в первых двух строчках зависят лишь от $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, и единственное независимое из уравнений (3.6) имеет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - 2\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right] B_{LL}(r, t) = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r}\right) B_{LL, L}(r, t) \tag{3.7}$$

где индекс $L$ отвечает направлению вдоль вектора $r$. Уравнение (3.7) называют уравнением Кармана — Хоуарта (1938 г.). Выпишем, наконец, уравнения Фридмана — Келлера для одноточечных вторых моментов $B_{ij}(M, M)$; они оказываются сложнее, чем (3,6), и нам будет здесь удобно записать их в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle u_i' u_j'\rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [\langle u_i' u_j'\rangle \langle u_\alpha\rangle + \langle u_i' u_j' u_\alpha'\rangle + \frac{1}{\rho}(\langle p' u_i'\rangle \delta_{j\alpha} + \langle p' u_j'\rangle \delta_{i\alpha}) - \\ - (\langle u_i' \sigma_{j\alpha}'\rangle + \langle u_j' \sigma_{i\alpha}'\rangle)] = \langle u_i' f_j'\rangle + \langle u_j' f_i'\rangle + \left\langle \frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)\right\rangle - \\ - \left(\left\langle \sigma_{i\alpha}' \frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}\right\rangle + \left\langle \sigma_{j\alpha}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}\right\rangle\right) - \left(\langle u_i' u_\alpha'\rangle \frac{\partial \langle u_j\rangle}{\partial x_\alpha} + \langle u_j' u_\alpha'\rangle \frac{\partial \langle u_i\rangle}{\partial x_\alpha}\right)\end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь $f_i$ — введенные в целях большей общности компоненты ускорения за счет внешних сил, а $\sigma_{ij} = \nu(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ — тензор вязких напряжений. Слагаемые, содержащие $p'$, $f_i'$ и $\sigma_{ij}'$, а также третьи моменты $\langle u_i' u_j' u_\alpha'\rangle$ непосредственно не выражаются через $\langle u_i' u_j'\rangle$ и потому являются в уравнениях (3.8) «лишними» неизвестными.

§ 4. **Приближенное замыкание уравнений для моментов.** Простейший способ приближенного замыкания уравнений для моментов — это пренебрежение моментами $(n+1)$-го порядка в уравнениях для моментов $n$-го порядка. Первым приближением $(n=1)$ здесь было бы пренебрежение вторыми моментами $\langle u_\alpha' u_\beta' \rangle$ (напряжениями Рейнольдса) в уравнениях для первых моментов (3.5). Но это означало бы использование для поля осредненной скорости $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle$ обычных уравнений Навье — Стокса, т. е. полное пренебрежение турбулентностью, что, очевидно, неприемлемо. Вторым приближением ( $n=2$) будет пренебрежение третьими моментами в уравнениях для вторых моментов (3.6). Такое приближение может быть оправдано лишь для очень слабой турбулентности, например, для последней стадии вырождения изотропной турбулентности за решеткой в аэродинамической трубе. При этом для вторых моментов получаются уравнения, которые вытекали бы из уравнений Навье — Стокса при полном пренебрежении в них всеми нелинейными членами. Поскольку нелинейные члены определяют распределение энергии турбулентности по спектру ее масштабов, в рассматриваемом втором приближении определить форму спектра турбулентности невозможно — ее надо задать в начальных условиях (отвечающих началу последней стадии вырождения турбулентности). В случае изотропной турбулентности это приближение получается при замене правой части уравнения (3.7) нулем. Наиболее общие решения получающегося уравнения для $B_{LL}(r, t)$ были изучены Л. И. Седовым [10,11].

Второй способ приближенного замыкания — это предположение об обращении в нуль семиинвариантов $(n+1)$-го порядка, что позволяет выразить моменты $(n+1)$-го порядка через младшие моменты и тем самым замкнуть систему уравнений Фридмана — Келлера для моментов до $n$-го порядка включительно (этот метод родственен методу Кирквуда в статистической механике и методу Тамма — Данкова в квантовой теории поля). Первое нетривиальное применение этого метода получается при $n=3$ и сводится к использованию гипотезы М. Д. Миллионщикова [12] о равенстве нулю семиинвариантов четвертого порядка поля скорости; при этом четвертые моменты выражаются через вторые по формулам, справедливым для многомерного нормального распределения

$$\langle w_1' w_2' w_3' w_4' \rangle = \langle w_1' w_2' \rangle \langle w_3' w_4' \rangle + \langle w_1' w_3' \rangle \langle w_2' w_4' \rangle + \langle w_1' w_4' \rangle \langle w_2' w_3' \rangle \qquad (4.1)$$

Эта гипотеза уже никак не предполагает слабости турбулентности. Она неплохо подтверждается эмпирическими данными для крупномасштабных компонент турбулентности (но, по-видимому, вряд ли пригодна для описания мелкомасштабных компонент).

Третий способ — это использование гипотез об автомодельности (или самоподобии) статистических характеристик турбулентного течения. Наиболее широко употребляемая гипотеза автомодельности (впервые предложенная, в несколько иной формулировке, Т. Карманом [13]) заключается в предположении о возможности ввести в окрестности каждой точки $M_0$ турбулентного течения такие масштабы длины $l(M_0)$ и скорости $b(M_0)$, что введенные с помощью этих масштабов безразмерные статистические характеристики турбулентности (точнее, те из них, на которых непосредственно не сказывается действие молекулярной вязкости) будут хотя бы приблизительно универсальными (т. е. одинаковыми для всех точек $M_0$) функциями от безразмерных галилеевских координат $\xi = [\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \langle \mathbf{u}(M_0) \rangle (t - t_0)] / l(M_0)$. Масштаб турбулентности $l$ здесь можно определить, например, как среднюю длину «пути перемешивания» или как «радиус корреляции» поля скорости. За масштаб скорости $b$ можно принять например, «интенсивность турбулентности», т. е. среднеквадратичную величину пульсаций скорости $[\langle |\mathbf{u}'|^2 \rangle]^{1/2}$.

Применяя такую гипотезу к профилю $\langle \mathbf{u}(z) \rangle$ осредненной скорости стационарного плоскопараллельного турбулентного течения, потребуем, следуя Л. Г. Лойцянскому [14], чтобы выполнялось условие

$$\frac{\langle u(z) \rangle - \langle u(z_0) \rangle}{\langle u(z_0 + l) \rangle - \langle u(z_0) \rangle} = f\left(\frac{z - z_0}{l}\right)$$

скажем, с точностью до малых третьего порядка относительно $(z - z_0) / l$. Из этого требования для $l$ получается формула Кармана

$$l = -\varkappa \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \Big/ \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial z^2}$$

Для температурно-стратифицированного течения С. С. Зилитинкевич и Д. Л. Лайхтман [15] предложили следующее обобщение формулы Кармана:

$$l = -\frac{\varkappa \psi}{\partial \psi / \partial z}, \qquad \psi = \sqrt{\left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial z}\right)^2 - \alpha \frac{g}{\langle \theta \rangle} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial z}} \tag{4.2}$$

Здесь $g$ — ускорение силы тяжести, $\langle \theta \rangle$ — потенциальная температура, $\alpha$ — постоянная.

В применении к двухточечным моментам изотропной турбулентности, фигурирующим в уравнении Кармана — Хоуарта (3.7) гипотеза автомодельности Кармана записывается следующим образом:

$$B_{LL}(r, t) = b^2 f_1 \left(\frac{r}{l}\right), \qquad B_{LL, L}(r, t) = b^3 f_2 \left(\frac{r}{l}\right) \tag{4.3}$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ — некоторые универсальные функции. Здесь $b$ и $l$ оказываются некоторыми функциями от времени $t$. Решения вида (4.3) уравнения (3.7) наиболее широко изучены Л. И. Седовым [10,11].

Специальные гипотезы подобия были предложены А. Н. Колмогоровым [1] для статистических характеристик мелкомасштабных компонент развитой турбулентности, режим которых характеризуется статистическим равновесием между силами инерции и силами вязкости («равновесный интервал» масштабов, малых по сравнению с масштабами течения в целом). А именно, А. Н. Колмогоров предположил, что этот режим может зависеть лишь от двух постоянных параметров — скорости диссипации турбулентной энергии $\varepsilon$ и коэффициента вязкости $\nu$, так что $l = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$ и $b = (\nu\varepsilon)^{1/4}$. При очень больших числах Рейнольдса «равновесный интервал» масштабов будет столь длинным, что в его крупномасштабной части масштабы будут во много раз превосходить минимальный масштаб турбулентных неоднородностей $(\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$. В этой крупномасштабной части «равновесного интервала» (называемой «инерционным интервалом») силы вязкости уже не будут существенными для турбулентных движений, и их режим будет зависеть лишь от единственного параметра $\varepsilon$. Это позволяет определить функциональную форму статистических характеристик компонент турбулентности с масштабами из «инерционного интервала». Так, например, при расстояниях $r$ из «инерционного интервала» структурный тензор поля скорости будет иметь вид

$$\langle [u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_i(\mathbf{x})] [u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_j(\mathbf{x})] \rangle = C (\varepsilon r)^{2/3} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{4} \frac{r_i r_j}{r^2}\right) \tag{4.4}$$

где $C$ — числовая постоянная.

Упомянем еще гипотезы подобия А. С. Монина и А. М. Обухова [16,17] для турбулентности в температурно-стратифицированном пограничном слое с постоянными напряжением трения $-\rho \langle u'w' \rangle = \rho u_*^2$ и потоком тепла $c_p \rho \langle T'w' \rangle = q$, согласно которым статистический режим компонент турбулентности с масштабами от максимальных (сравнимых с расстоянием до стенки) до масштабов из инерционного интервала включительно зависит лишь от трех постоянных параметров $u_*$, $q / c_p \rho$ и $g / \langle T_0 \rangle$ (последний из них, именуемый параметром плавучести, характеризует архимедовы ускорения $gT' / \langle T_0 \rangle$, где $T$ — температура). Отсюда получается $l \sim c_p \rho T_0 u_*^3 / (gq)$ и $b \sim u_*$, а для температуры получается масштаб $T_* \sim q / (c_p \rho u_*)$. В случае температурной однородности остается единственный параметр $u_*$, так что, например, $\partial \langle u \rangle / \partial z \sim u_* / z$, откуда получается известный логарифмический закон для профиля скорости в пограничном слое. В случае термической конвекции (большие $q > 0$) параметр $u_*$ перестает быть существенным, и, например, для профиля потенциальной температуры получается

$$\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial z} \sim \left(\frac{q}{c\rho}\right)^{2/3} \left(\frac{g}{T_0}\right)^{-1/3} z^{-4/3} \tag{4.5}$$

§ 5. **Полуэмпирические теории турбулентности.** Имеется очень большое количество работ, в которых для замыкания уравнений для моментов применялись более специальные гипотезы о виде «лишних» неизвестных величин, чем те, которые были перечислены в предыдущем параграфе. Такие гипотезы обычно подсказываются более или менее правдоподобными физическими соображениями и приводят к формулам с параметрами, подлежащими эмпирическому определению. Упомянем здесь лишь немногие из таких полуэмпирических гипотез.

Простейшие из этих гипотез касаются вида напряжений Рейнольдса $\tau_{ij} = -\rho\langle u_i' u_j'\rangle$, являющихся «лишними» неизвестными в уравнениях Рейнольдса (3.5) (а также турбулентного потока тепла $q_i = c_p\rho\langle T'u_i'\rangle$, возникающего при осреднении уравнения переноса тепла). По аналогии с описанием молекулярного переноса в полуэмпирических теориях обычно принимается, что $\tau_{ij}$ есть линейная функция от тензора осредненных скоростей деформации $\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ (а $q_i$ — линейная функция от градиента осредненной температуры $\partial\langle T\rangle / \partial x_i$). Простейшее предположение такого рода, восходящее к Ж. Буссинеску (1897 г.), имеет вид $\tau = -\rho\langle u'w'\rangle = \rho K\partial\langle u\rangle / \partial z$, где $K$ — коэффициент турбулентной вязкости (аналогично этому, согласно Дж. Тейлору (1915 г.) и В. Шмидту (1925 г.), $q = c_p\rho\langle T'w'\rangle = -c_p\rho\alpha K\partial\theta / \partial z$). В теории Л. Прандтля (1925 г.) полагается $K = l^2\, \partial\langle u\rangle / \partial z$, а в теории Дж. Тэйлора (1932 г.) при таком же выражении для $K$ полагается $\partial\tau / \partial z = \rho K\partial^2\langle u\rangle / \partial z^2$.

Более сложные гипотезы касаются вида «лишних» неизвестных в уравнениях (3.8) для одноточечных вторых моментов. А. Н. Колмогоров [18] предложил использовать для определения $K$ уравнение турбулентной энергии, получаемое из (3.8) суммированием по $i = j$, которое, например, для атмосферного пограничного слоя приводится к виду

$$-\langle u'w'\rangle\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial z} - \langle v'w'\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial z} - \varepsilon + \frac{g}{T_0}\langle\theta'w'\rangle - \frac{\partial}{\partial z}\left\langle\left(\frac{1}{2}u_\alpha' u_\alpha' + \frac{p'}{\rho}\right)w'\right\rangle = 0 \quad (5.1)$$

где опущено только одно слагаемое, описывающее молекулярную диффузию турбулентной энергии. После использования гипотез типа Буссинеска это уравнение принимает вид

$$K\left[\left(\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial z}\right)^2\right] - \varepsilon - \frac{g}{T_0}\alpha K\frac{\partial\langle\theta\rangle}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\alpha_1 K\frac{\partial b^2}{\partial z} = 0 \quad (5.2)$$

и, если здесь положить, в духе гипотезы автомодельности Кармана, $K \sim lb$ и $\varepsilon \sim b^3 / l$, и как-то задать масштаб турбулентности $l$, то уравнения Рейнольдса вместе с уравнением (5.2) для $b$ образуют замкнутую систему. Такая система была использована в работе А. С. Монина [19] для описания термически однородного пограничного слоя атмосферы $\partial\langle\theta\rangle / \partial z = 0$ при $l = \varkappa z$ (в последние годы эта работа была повторена рядом авторов при использовании более детальных предположений о зависимости $l$ от $z$ (см., например, обзор [20]).

Более детальному использованию уравнений (3.8) посвящены, например, работы И. Ротта [21] и Б. И. Давыдова [22]. Применяя уравнения (3.8) к атмосферному пограничному слою и используя методы [21,22], А. С. Монин [23] полагал

$$\left\langle\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)\right\rangle = -C_1\frac{b}{l}\left(\langle u_i'u_j'\rangle - \frac{b^2}{3}\delta_{ij}\right) - C_2\frac{b^3}{l}\left(\lambda_i\lambda_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)$$
$$\nu\langle\nabla u_i'\cdot\nabla u_j'\rangle = [(C_3 - 3C_4)\lambda_i\lambda_j + C_4\delta_{ij}]\frac{b^3}{l} \quad (5.3)$$

и использовал аналогичные формулы для величин $\langle p'_1/\rho\ \partial T' / \partial x_i\rangle$, $\langle\nabla u_i'\cdot\nabla T'\rangle$ и $\chi\langle(\nabla T')^2\rangle$, возникающие в уравнениях типа (3.8) для $\langle u_i'T'\rangle$ и $\langle T'^2\rangle$ (здесь $\lambda_i$ — единичный вектор вертикального направления). При дополнительном пренебрежении некоторыми малыми слагаемыми в левых частях уравнений единственной «лишней» неизвестной в них оставался масштаб турбулентности $l$, и, считая его заданным, в [23] удалось определить профили скорости $\langle u(z)\rangle$, $\langle v(z)\rangle$, температуры $\langle\theta(z)\rangle$ и все вторые моменты пульсаций скорости и температуры (включая компоненты горизонтального турбулентного потока тепла $q_x = c_p\rho \langle T'u' \rangle$, $q_y = c_p\rho \langle T'v' \rangle$, которые в температурно-стратифицированной среде, вообще говоря, отличны от нуля, что кстати подтверждается данными прямых измерений этих величин).

Поступила 17 VIII 1967

Институт океанологии АН СССР

## ЛИТЕРАТУРА


1. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1941, т. 30, № 4, стр. 299—303.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е, § 32, М., ГИТТЛ, 1953.
3. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. (Обобщенные функции, 4), М., Физматгиз, 1961.
4. Kolmogorov A. La transformation de Laplace dans les espaces linèaires. — C. R. Acad. Sci. 1935, vol. 200, pp. 1717—1718.
5. Prohorov Yu. V. The method of characteristic functionals, Proc. 4-th Berkeley Sympos. Math. Statist. Probability, vol. 2; Univ. Calif. Press, 1961, pp. 403—419.
6. Hopf E. Statistical hydromechanics and functional calculus. — J. Rat. Mech. Anal., 1952, vol. 1, No. 1, pp. 87—123.
7. Монин А. С. О решении проблемы турбулентности методом теории возмущений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2, стр. 319—325.
8. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 2. М., «Наука», 1967.
9. Friedmann A.A., Keller L. V. Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer kompressibelen Flüssigkeit. — Proc. 1-st Intern. Congr. Appl. Mech., 1924; Delft, 1925, ss. 395—405.
10. Седов Л. И. Вырождение изотропных турбулентных движений несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1944, т. 42, № 3, стр. 121—124.
11. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 5-е, М., Наука, 1965.
12. Миллионщиков М. Д. К теории однородной изотропной турбулентности. Докл. АН СССР, 1941, т. 32, № 9, стр. 611—614; Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., 1941, т. 7, № 4—5, стр. 433—446.
13. Karman Th. Mechanische Ahnlichkeit und Turbulenz, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math. — phys. Kl. 1930, ss. 58—76.
14. Лойцянский Л. Г. О некоторых приложениях метода подобия в теории турбулентности. ПММ, 1935, т. 2, № 2, стр. 180—206.
15. Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л. О замыкании системы уравнений турбулентного движения для пограничного слоя атмосферы. — Тр. гл. Геофиз. обсер., 1965, вып. 167, стр. 44—48.
16. Монин А. С., Обухов А. М. Безразмерные характеристики турбулентности в приземном слое атмосферы. Докл. АН СССР, 1953, т. 93, № 2, стр. 257—260.
17. Монин А. С., Обухов А. М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы. Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, 1954, № 24 (151), стр. 163—187.
18. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, сер. физ., 1942, т. 6, № 1—2, стр. 56—58.
19. Монин А. С. Динамическая турбулентность в атмосфере. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1950, т. 14, № 3, стр. 232—254.
20. Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л., Монин А. С. Динамика пограничного слоя атмосферы. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана. 1967, т. 3, № 3, стр. 297—333.
21. Rotta J. C. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. — Z. Phys. 1951, Band. 129, No. 6, ss. 547—572; Band. 131, No. 1, ss. 51—77.
22. Давыдов Б. И. К статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости. Докл. АН СССР, 1959, т. 127, № 4, стр. 768—771.
23. Монин А. С. О температурно-неоднородном пограничном слое атмосферы. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана. 1965, т. I, № 5, стр. 490—500.
24. Lundgren T. S. Distribution functions in the statistical theory of turbulence. The Physics of Fluids, 1967, vol. 10, No. 5, pp. 969—975.