

## СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТРЕУГОЛЬНЫХ КРЫЛЬЕВ С РЕБРАМИ НА ПОВЕРХНОСТИ

А. Л. Гонор (Москва)

В конструкциях несущих поверхностей широко используются различного рода перегородки. Это могут быть ребра жесткости, экраны для предотвращения вторичных потоков или отрыва и т. д. Наличие перегородок существенно изменяет характер течения и величины аэродинамических сил. Обтекание таких крыльев в общем случае не поддается расчету. Однако для крыльев частного вида удается найти простое решение, которое и обсуждается ниже. Отметим, что один случай взаимодействия перегородки с бесконечным крылом рассмотрен в [1].

1. Постановка задачи и построение решения. Рассмотрим треугольное коническое крыло со сверхзвуковыми передними кромками и предположим, что часть крыла, примыкающая к кромкам, — плоская. Решение будем искать в системе координат  $r, \theta, \varphi$ , показанной на фиг. 1. Связь между выбранными и декартовыми координатами, согласно [2], определяется из соотношений

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi \cos \theta$$

Конические течения в этих переменных описываются следующей системой:

$$\begin{aligned} v \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{\cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v^2 - w^2 &= 0, & v \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{\cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + uv + w^2 \operatorname{tg} \theta &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1) M_\infty^2} = \frac{c}{2} & (1.1) \\ v \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{p}{\rho^\gamma} + \frac{w}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{p}{\rho^\gamma} &= 0 \\ 2\rho u + v \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{w}{\cos \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{\rho}{\cos \theta} \left[ \frac{\partial (v \cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Первые два уравнения представляют проекции уравнения Эйлера на оси  $r$  и  $\theta$ . Три последних выражают условия сохранения энергии, энтропии и массы частицы. Все переменные в уравнениях безразмерные, причем  $u, v, w$  — компоненты скорости соответственно на оси  $r, \theta, \varphi$  — отнесены к скорости на бесконечности  $U$ ;  $\rho$  — плотность, отнесенная к плотности набегающего потока  $\rho^0$ ;  $p$  — давление, отнесенное к скоростному напору  $\rho^0 v^2$ ;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $M_\infty$  — число Маха невозмущенного потока. Решение будем искать при следующих граничных условиях.

1°. На ударной волне, уравнение поверхности которой обозначим через  $\theta^*(\varphi)$ , должны выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} U_n &= U_n^* \rho^*, & U_{\tau_1} &= U_{\tau_1}^*, & U_{\tau_2} &= U_{\tau_2}^*, & \varepsilon &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \\ \rho^* &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ 1 + \frac{2}{(\gamma-1) M_\infty^2 U_n^2} \right], & p^* &= \frac{2}{\gamma+1} U_n^2 - \frac{\varepsilon}{\gamma M_\infty^2} & (1.2) \end{aligned}$$

Величины с индексами  $n, \tau_1, \tau_2$  есть проекции скорости на нормаль и на две взаимно-перпендикулярные касательные к поверхности ударной волны.

2°. На поверхности тела, определяемой уравнением  $\theta_1(\varphi)$ , имеем  $U_n = 0$ . Отметим, что на плоской части крыла около кромок граничные условия на теле есть  $v = 0, \theta = 0$ . Выразим теперь при помощи (1.2) значения всех искомых функций на ударной волне через уравнение поверхности волны. Для этого введем три единичных вектора  $e_1, e_2, e_3$  соответственно вдоль осей  $r, \theta, \varphi$ . В декартовой системе координат, показанной на фиг. 1, они определяются следующими проекциями:

$$e_1 [\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta, \cos \theta \cos \varphi], \quad e_2 [-\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta, -\sin \theta \cos \varphi], \quad e_3 [\cos \varphi, 0, -\sin \varphi] \quad (1.3)$$

Новый базис позволяет легко определить проекции касательных и нормального единичных векторов к поверхности ударной волны.

Действительно, в левой системе

$$\begin{aligned} \tau_1 &= e_1(1, 0, 0), & \tau_1 \times n &= \tau_2 [0, -q(1+q^2)^{-1/2}, -(1+q^2)^{-1/2}] \\ n &[0, (1+q^2)^{-1/2}, -q(1+q^2)^{-1/2}], & q &= \theta_\varphi^* / \cos \theta^* \end{aligned} \quad (1.4)$$

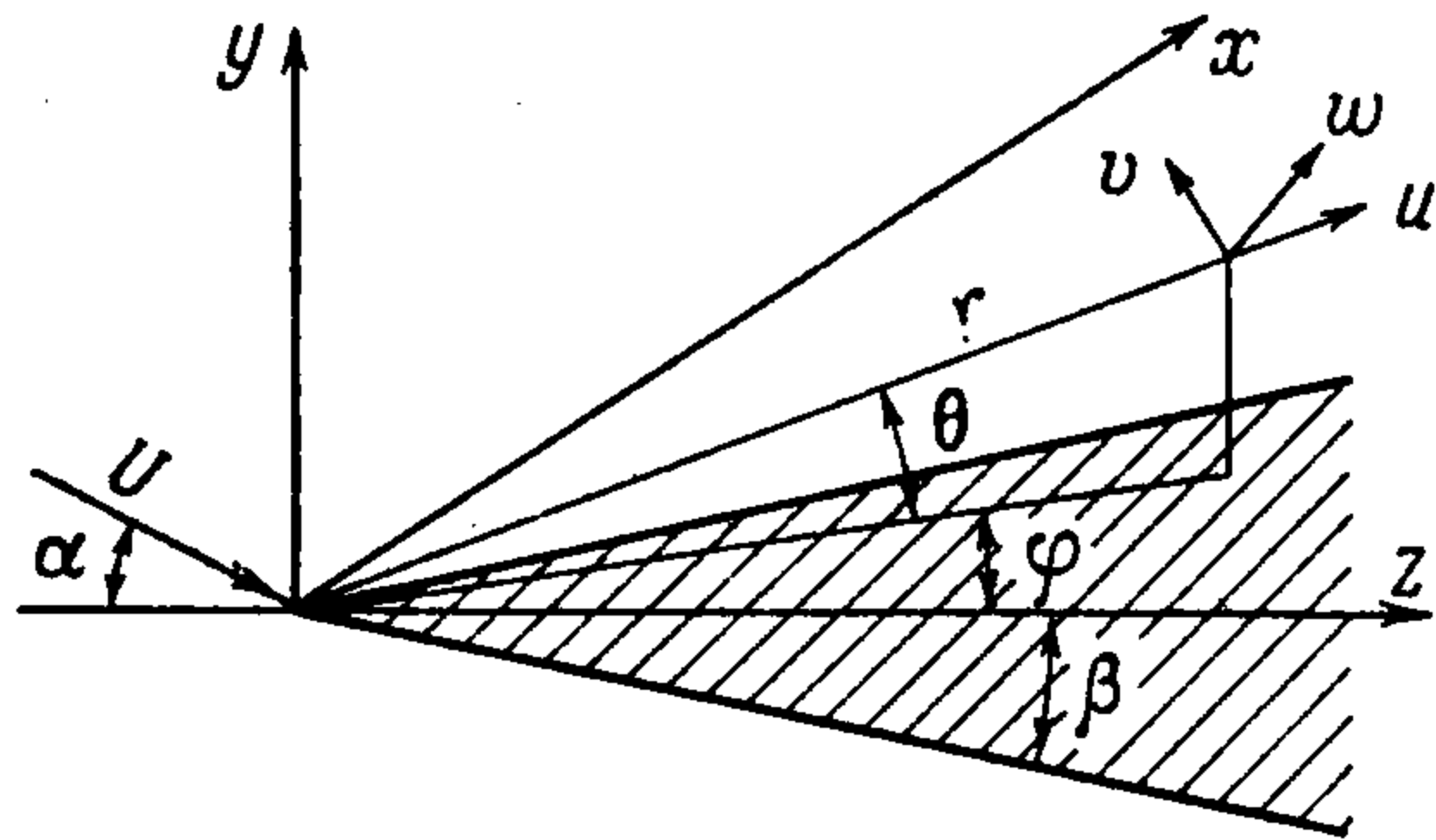
Соотношения (1.2) — (1.4) позволяют представить значения искомых функций на ударной волне в виде

$$\begin{aligned} u^* &= \cos \alpha \cos \theta^* \cos \varphi - \sin \alpha \sin \theta^*, & v^* &= \frac{Aq + B}{1 + q^2}, & w^* &= \frac{A - Bq}{1 + q^2} \\ U_n &= \frac{-1}{\sqrt{1 + q^2}} [(\sin \alpha \cos \theta^* + \cos \alpha \sin \theta^* \cos \varphi) - q \cos \alpha \sin \varphi] \end{aligned} \quad (1.5)$$

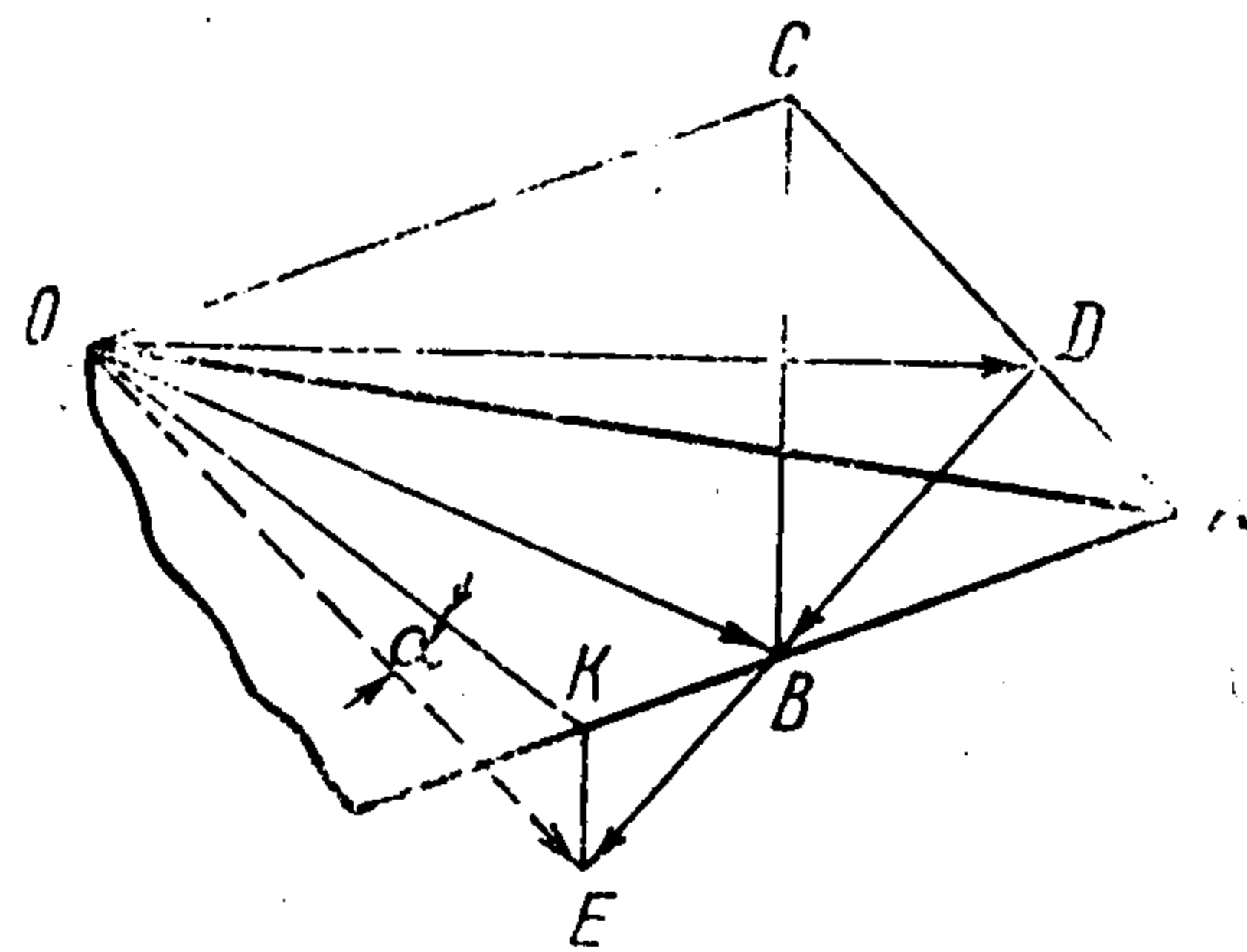
$$A = -q(\cos \theta^* \sin \alpha + \sin \theta^* \cos \alpha \cos \varphi) - \cos \alpha \sin \varphi$$

$$B = -\varepsilon \left[ 1 + \frac{2}{(\gamma - 1) M_\infty^2 U_n^2} \right] (\sin \alpha \cos \theta^* + \cos \alpha \sin \theta^* \cos \varphi - q \cos \alpha \sin \varphi)$$

Построение решения начнем с изучения обтекания плоской части крыла в окрестности передней кромки. На фиг. 2 изображена схема этого течения с плоским скачком  $OAC$ , присоединенным к кромке крыла  $OAB$ . Скорости набегающего потока и однородного потока за скачком представлены отрезками  $OE$  и  $OB$ , касательная к скачку



Фиг. 1



Фиг. 2

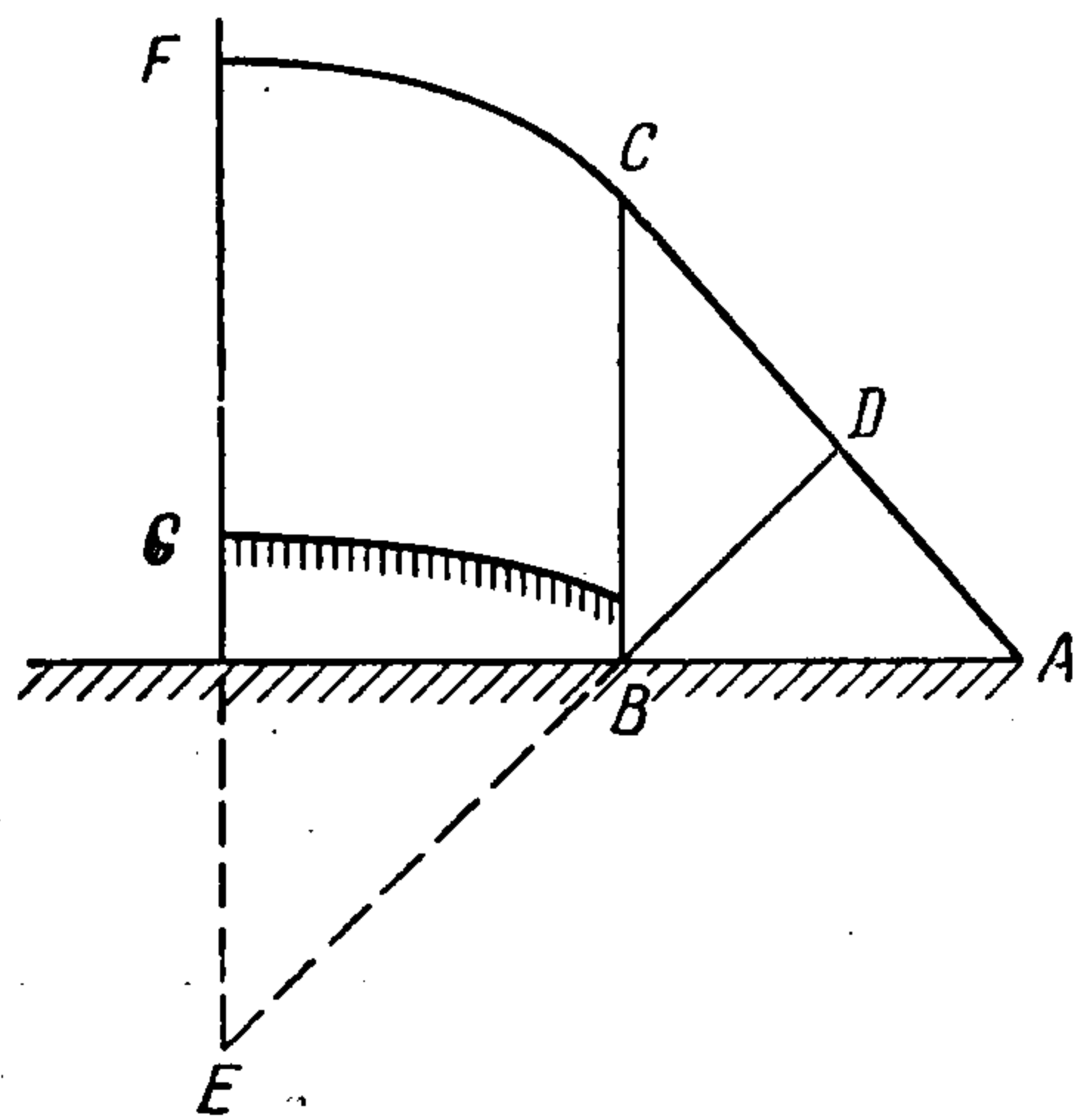
составляющая скорости — отрезком  $OD$ . Нетрудно заметить, что все плоскости, проходящие через линию  $OB$  и пересекающие скачок, являются поверхностями тока. Поэтому нормальную к крылу плоскость  $OBC$  можно принять за непроницаемую перегородку (на ней  $w = 0$ ) и получить, что течение во внешней области между крылом и перегородкой определяется равномерным потоком за плоским скачком. Хотя течение за плоским скачком хорошо изучено, применение его к обтеканию конического крыла позволяет сделать несколько замечаний, имеющих теоретический интерес. Рассмотрим на фиг. 2 треугольник скоростей  $OED$ . В него входит нормальная составляющая скорости за скачком  $DB$ , которая одновременно есть проекция скорости, нормальная к радиусу  $OD$ . Учитывая, что величина  $DB$  всегда меньше скорости звука, получим в точке  $D$  следующее неравенство:

$$v^2 + w^2 < a^2 \quad (1.6)$$

Здесь  $a$  — скорость звука в потоке за скачком. Проследим изменение скорости, нормальной к радиусу при переходе из точки  $D$  в точку  $B$ . Согласно фиг. 2 она монотонно уменьшается до нуля, следовательно, и неравенство (1.6) сохранится во всех точках отрезка  $BD$ . С другой стороны, по условию задачи кромка  $OA$  — сверхзвуковая и в точке  $A$  составляющая скорости, нормальная к радиусу, больше скорости звука. Это приводит в окрестности точки  $A$  к неравенству, обратному (1.6). Выпишем уравнения акустических характеристик системы (1.1). Имеем

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{-vw \pm a \sqrt{v^2 + w^2 - a^2}}{a^2 - w^2}$$

Изменение знака неравенства (1.6) приводит к изменению типа системы дифференциальных уравнений (1.1) (см., например, [3]). Таким образом, поступательный поток на внешней части крыла в конических переменных представляет трансзвуковое течение и может рассматриваться как частное аналитическое решение системы смешанного типа. В этом решении компоненты скорости  $u, v, w$  ( $p, \rho$  — постоянные) и звуковая линия непосредственно определяются из выражений



Фиг. 3

$$u = U_1 \cos \theta \cos (\varphi - \varphi_1)$$

$$v = -U_1 \sin \theta \sin (\varphi - \varphi_1), \quad w = -U_1 \sin (\varphi - \varphi_1)$$

$$\cos \theta = \frac{(1 - M_1^{-2})^{1/2}}{\cos (\varphi - \varphi_1)}$$

где  $U_1, M_1$  — скорость и число Маха однородного потока за скачком,  $\varphi_1$  — координата точки  $B$  (фиг. 2). Отметим, что при некоторых значениях геометрических параметров и числах Маха, помимо параболической линии, в окрестности точки  $A$  возникает вторая параболическая линия в окрестности точки  $C$ . Дело в том, что конус Маха для равномерного потока за скачком может пересекать область течения в двух местах. Характерно, что в этом примере на звуковой линии особенностей не имеется.

Приступим теперь к отысканию решения во внутренней области между перегородкой  $BC$  и плоскостью симметрии  $GF$  (фиг. 3). На линиях  $BC$  и  $GF$  имеем условие  $w = 0$ , на ударной волне  $FC$  — условия (1.2), (1.5), на стенке  $GH$  — условие обтекания. Предположим, что решение задачи можно получить в классе течений, имеющих  $w \sim \delta \sim 0$  во всей области  $CFGH$ . В этом случае неизвестные функции  $u, v, p, \rho$  будут удовлетворять, согласно (1.1), следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} - v = 0, \quad v \frac{\partial v}{\partial \theta} + uv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} = \frac{c}{2}$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \delta^\gamma (\varphi), \quad 2u + v \frac{\partial \ln p}{\partial \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial (v \cos \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (1.7)$$

Второе уравнение (1.1) опущено, так как является следствием уравнений (1.7),  $\delta(\varphi)$  — произвольная функция. Давление находится по формуле

$$p = \left[ \frac{1}{2} (c - u^2 - u_\theta^2) \frac{\gamma - 1}{\gamma \delta} \right]^{\gamma / (\gamma - 1)}, \quad \delta(\varphi) = \frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*} \quad (1.8)$$

Скорость  $u$  из системы (1.7) определяется квазилинейным уравнением второго порядка

$$u_{\theta\theta} (1 - M_n^2) - u_\theta \operatorname{tg} \theta + 2u (1 - 1/2 M_n^2) = 0$$

$$M_n^2 = \frac{2u_\theta^2}{(\gamma - 1)(c - u^2 - u_\theta^2)} = \frac{v^2}{a^2} \quad (1.9)$$

Коэффициент  $M_n$  представляет число Маха в поперечном течении на сфере  $r = \text{const}$ . Можно показать, что  $M_n^2 < 1$  для достаточно больших  $M_\infty$ . Действительно

$$M_n^2 \sim v^{*2} / a^{*2} \sim \varepsilon (k_1 + |q| k_2), \quad 0 < k_i < 1$$

Если  $|q|$  порядка единицы, то  $M_n < 1$ ; если  $|q|$  — велико, то  $M_n > 1$ .

Рассмотрим подробнее граничные условия. На ударной волне должно выполняться  $w^* = 0$ . В силу (1.5) это означает, что  $A - Bq = 0$  и поверхность ударной волны

определяется из решения дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} a_0 \theta_\varphi^{*3} + a_1 \theta_\varphi^{*2} + a_2 \theta_\varphi^* + a_3 &= 0, & a_0 &= \varepsilon b^2 + \varepsilon_1, & a_1 &= ab(1 - 2\varepsilon) \cos \theta^* \\ a_2 &= -[a^2(1 - \varepsilon) - b^2 - \varepsilon_1] \cos^2 \theta^* \\ a_3 &= -ab \cos^3 \theta^*, & a &= \cos \theta^* \sin \alpha + \sin \theta^* \cos \alpha \cos \varphi \\ b &= \cos \alpha \sin \varphi, & \varepsilon_1 &= 2/(\gamma + 1) M_\infty^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) решается при условии, что ударная волна проходит через точку  $C(\varphi_1, \theta_1^*)$ . Интересно, что при  $M_\infty = \infty$  уравнение (1.10) распадается на два более простые

$$(b\theta_\varphi^* - a \cos \theta^*) (\theta_\varphi^{*2} \varepsilon b + \theta_\varphi^* a (1 - \varepsilon) \cos \theta^* + b \cos^2 \theta^*) = 0 \quad (1.11)$$

Первый множитель не может быть решением, так как не удовлетворяется условие симметрии  $\theta_\varphi^*(0) = 0$ ; второй множитель дает оба корня отрицательных. Из них выбирается меньший по абсолютной величине, соответствующий числу  $M_n < 1$  (см. 1.9). Для второго корня  $M_n > 1$  и, как будет показано, решения не существует.

Если точка  $C$  задается из условия обтекания внешней части крыла поступательным потоком с присоединенным скачком  $AC$ , то при сопряжении скачка  $AC$  с криволинейным скачком  $CF$  непрерывность производной сохраняется автоматически. В остальных случаях в точке  $C$  происходит разрыв наклона ударной волны. Таким образом, по уравнению (1.10) или (1.11) и точке  $C$  ударная волна находится однозначно. В силу (1.5) и (1.7) это приводит к тому, что в точках ударной волны заданы функции

$$u(\theta^*, \varphi) = u^*, \quad u_\theta(\theta^*, \varphi) = v^* = B \quad (1.12)$$

Для уравнения (1.9) эти функции являются граничными условиями, определяющими единственное решение. Следовательно, условие обтекания  $v = u_\theta = 0$  является лишним и не может быть удовлетворено на произвольной поверхности  $\theta_1(\varphi)$ . Остается единственная возможность: построить решение уравнения (1.9) при условиях (1.12) и исследовать, нет ли в области его существования поверхности, в точках которой выполнено равенство  $u_\theta = 0$ . Если есть, то форма внутренней части крыла  $GH$  определена (фиг. 3) и решение становится замкнутым. Течение на внутренней части крыла может иметь самостоятельный интерес для крыльев с ребрами на кромках или для конических каналов с плоскими боковыми стенками. Последние встречаются при проектировании боковых воздухозаборников. Построенное решение для класса течений с  $w \equiv 0$  удовлетворяет системе (1.1) и всем граничным условиям. Однако на этом классе решений система (1.1) вырождается и первые три уравнения не являются эквивалентными трем уравнениям Эйлера. Сказанное означает, что система (1.1) в некоторых случаях не является полной.

2. Исследование решения и результаты счета. Коническое течение около рассмотренных выше крыльев будет существовать, если задача Коши с соответствующим условием обтекания разрешима для уравнений (1.9) — (1.11). Исследование уравнения (1.11) позволяет установить, что область существования решения определяется неравенством

$$(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta \cos \varphi)^2 - (\gamma^2 - 1) \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi \geq 0 \quad (2.1)$$

Если плоский скачок присоединен к кромке крыла, то на ребре в точке  $C(\varphi_1, \theta_1^*)$  неравенство заведомо выполняется и, как нетрудно показать, будет иметь место во всей области  $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ . Если же рассматривается внутреннее течение на крыле с произвольным углом раскрытия  $\varphi_1$  и ребром  $\theta_1^*$ , то выполнение неравенства в начальной точке  $(\theta_1^*, \varphi_1)$  снова обеспечивает существование решения для ударной волны. При этом допустимые значения начальных параметров  $(\theta_1^*, \varphi_1, \alpha)$  ограничены поверхностью, получаемой при знаке равенства в соотношении (2.1)

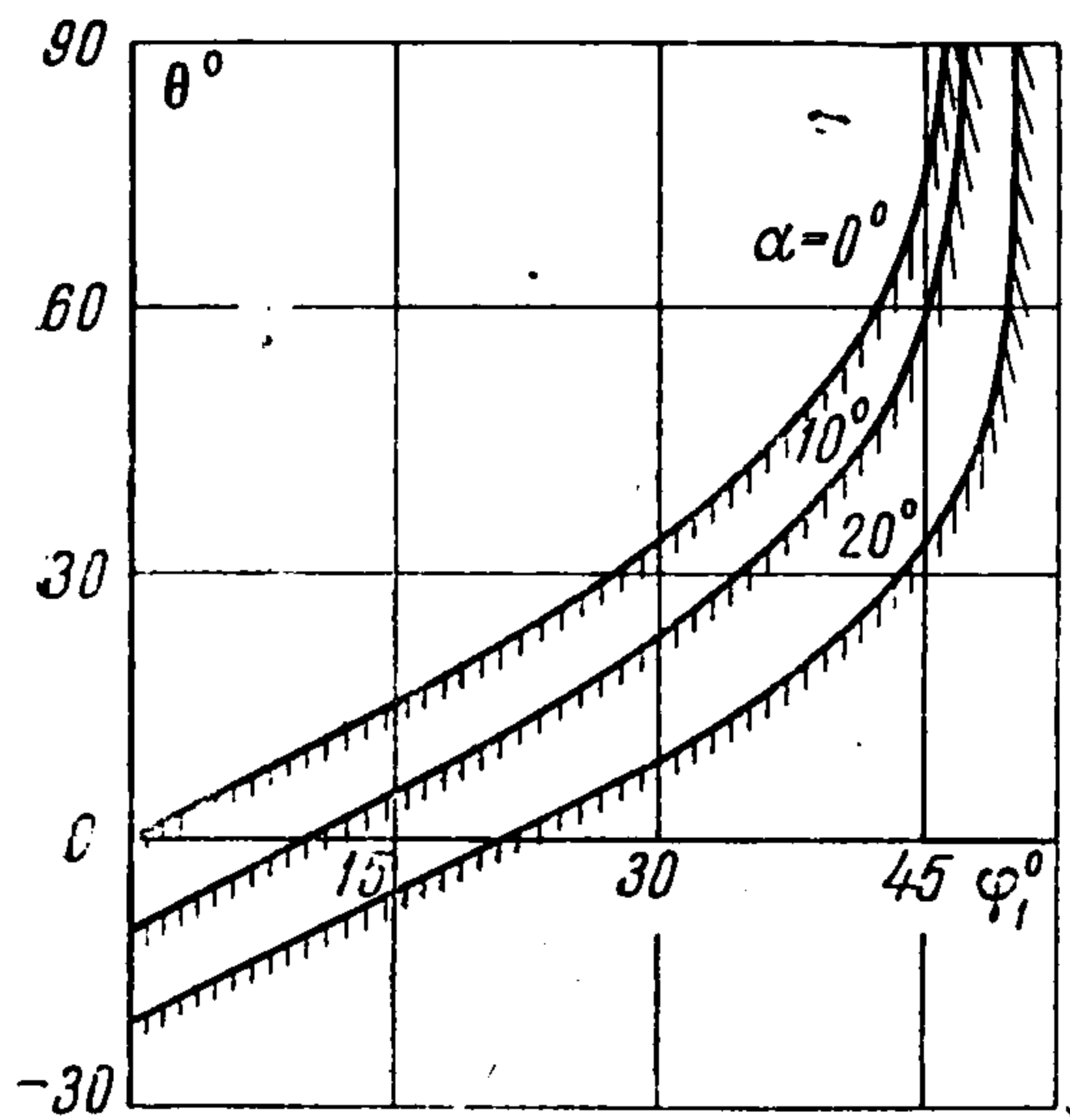
Примеры соответствующих областей для нескольких значений угла  $\alpha$  показаны на фиг. 4. В случае конечных чисел Маха определение области допустимых параметров проводится аналогично.

Приступим теперь к исследованию уравнения (1.9).

Начнем со случая  $M_n < 1$ , предварительно переписав уравнение в форме

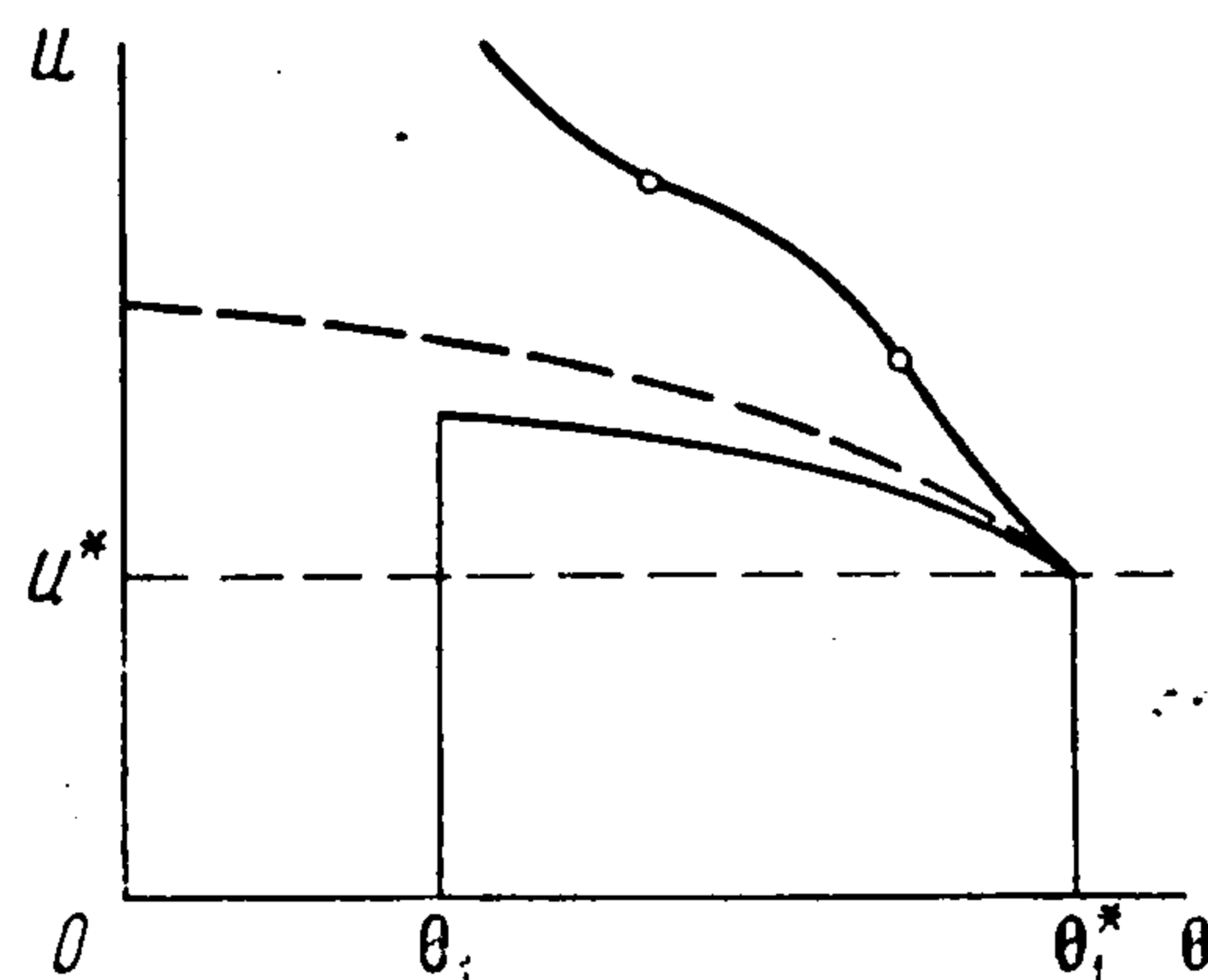
$$u_{\theta\theta} = \frac{-u(2 - M_n^2) + u_\theta \operatorname{tg} \theta}{1 - M_n^2} \quad (2.2)$$

Согласно (2.2) и учитывая, что в области течения  $u > 0$ ,  $u_\theta < 0$ , имеем  $u_{\theta\theta} < 0$ . Рассмотрим сперва поле потока в области, примыкающей к ребру  $\varphi = \varphi_1$ . В точке пересечения ребра с ударной волной заданы функции  $u^*(\theta_1^*, \varphi_1) > 0$  и  $u_{\theta}^*(\theta_1^*, \varphi_1) < 0$ . В силу неравенства для второй производной график радиальной скорости  $u(\theta, \varphi_1)$  — выпуклый и имеет вид, подобный нижней кривой на фиг. 5. Чтобы установить, обращается ли при некотором значении  $\theta$  производная  $u_\theta$  в нуль, проведем сравнение с распределением радиальной скорости в равномерном потоке, примыкающем к ребру  $\varphi = \varphi_1$



Фиг. 4

справа. Скорость однородного потока  $u^\circ$ , на основании (1.8), удовлетворяет уравнению  $u_{\theta\theta}^\circ = -u^\circ$ . Сравнивая последнее с (2.2), получим неравенство  $|u_{\theta\theta}| > |u_{\theta\theta}^\circ|$ .



Фиг. 5

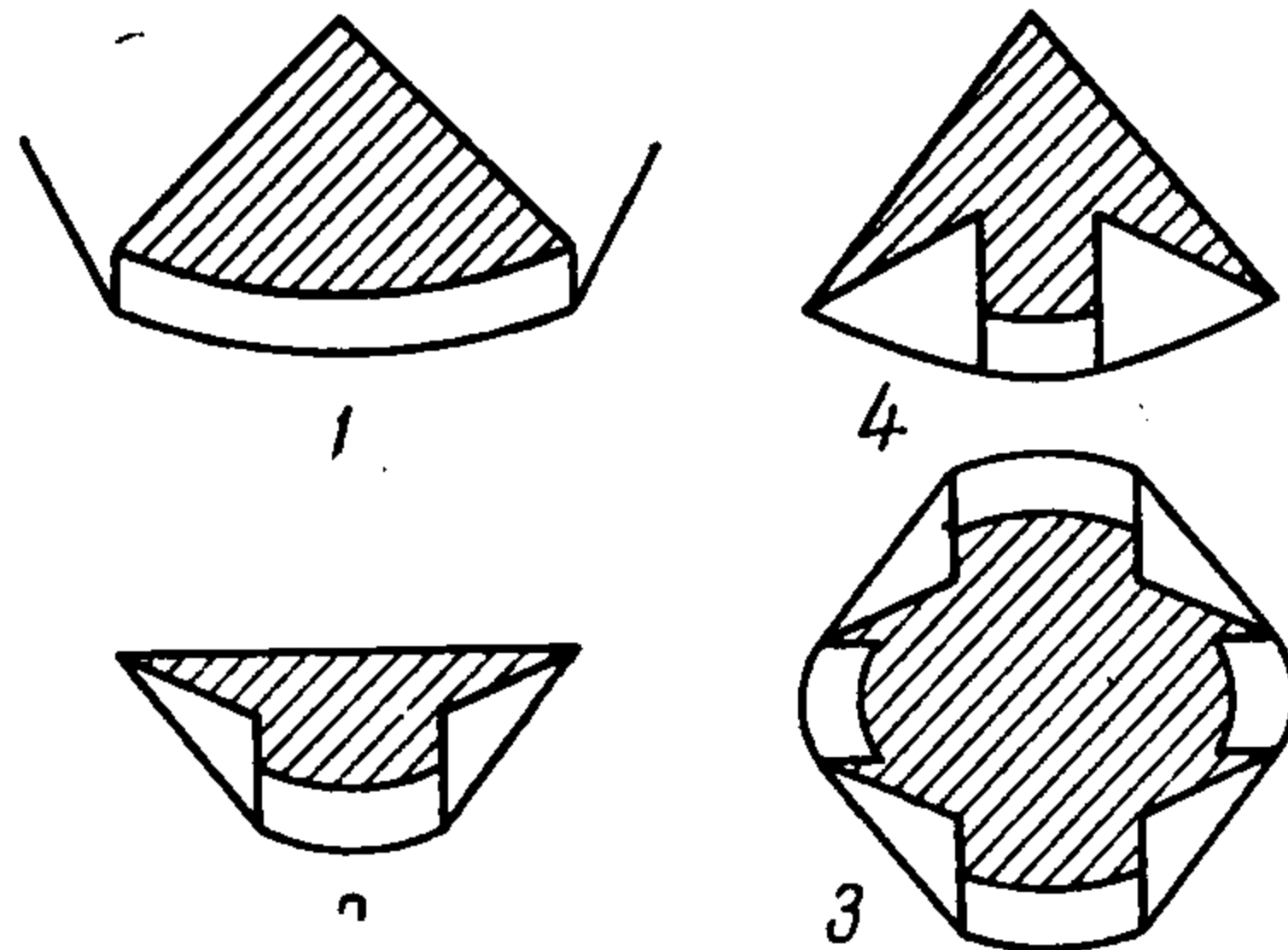
С другой стороны, в начальной точке  $(\theta_1^*, \varphi_1)$  имеем  $u = u^\circ$ ,  $u_\theta = u_\theta^\circ$  и известно, что  $u_\theta^\circ = 0$  при  $\theta = 0$ . Значит, производная  $u_\theta$  обращается в нуль при  $\theta > 0$ . График распределения скорости равномерного потока  $u^\circ$  в плоскости  $\varphi = \varphi_1$  нанесен на фиг. 5 пунктиром. Не останавливаясь на деталях, укажем, что во всей области  $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ , условие  $u_\theta = 0$  выполняется при положительных значениях  $\theta$ . Контур крыла  $GH$ , согласно расчетам, будет выпуклым, как показано на фиг. 3.

Переходим к случаю  $M_n > 1$  и предположим сначала, что  $1 < M_n < 2$ . Тогда из уравнения (2.2) имеем условие  $u_{\theta\theta} > 0$ , которое приводит к увеличению абсолютной величины  $u_\theta$  при уменьшении аргумента (см. верхнюю кривую на фиг. 5). Рост производной  $|u_\theta|$  может повлечь за собой такое возрастание коэффициента  $M_n$ , что с некоторого значения  $\theta$  величина  $M_n$  станет намного больше двух. В результате возможно изменение знака  $u_{\theta\theta}$  в формуле (2.2) и появление на кривой  $u(\theta)$  точки перегиба, после которой  $|u_\theta|$  начнет уменьшаться. Однако достигнуть нуля она не сможет, так как при  $M_n < 1$  возникает вторая точка перегиба и  $|u_\theta|$  снова будет возрастать и т. д. Следовательно, найденный класс конических течений соответствует обтеканию крыла только при  $M_n < 1$ .

Качественный анализ распределения скорости на ребре позволяет вывести одно полезное следствие. Именно, согласно фиг. 5, величины  $u$  и  $u_\theta$  с внутренней стороны ребра соответственно меньше их значений с внешней стороны. Тогда сила давления (см. (1.8)), действующая на внутреннюю часть ребра  $HC$  (фиг. 3), будет больше внешней. В результате полная сила, приложенная к ребрам, будет создавать тягу, уменьшающую общее сопротивление.

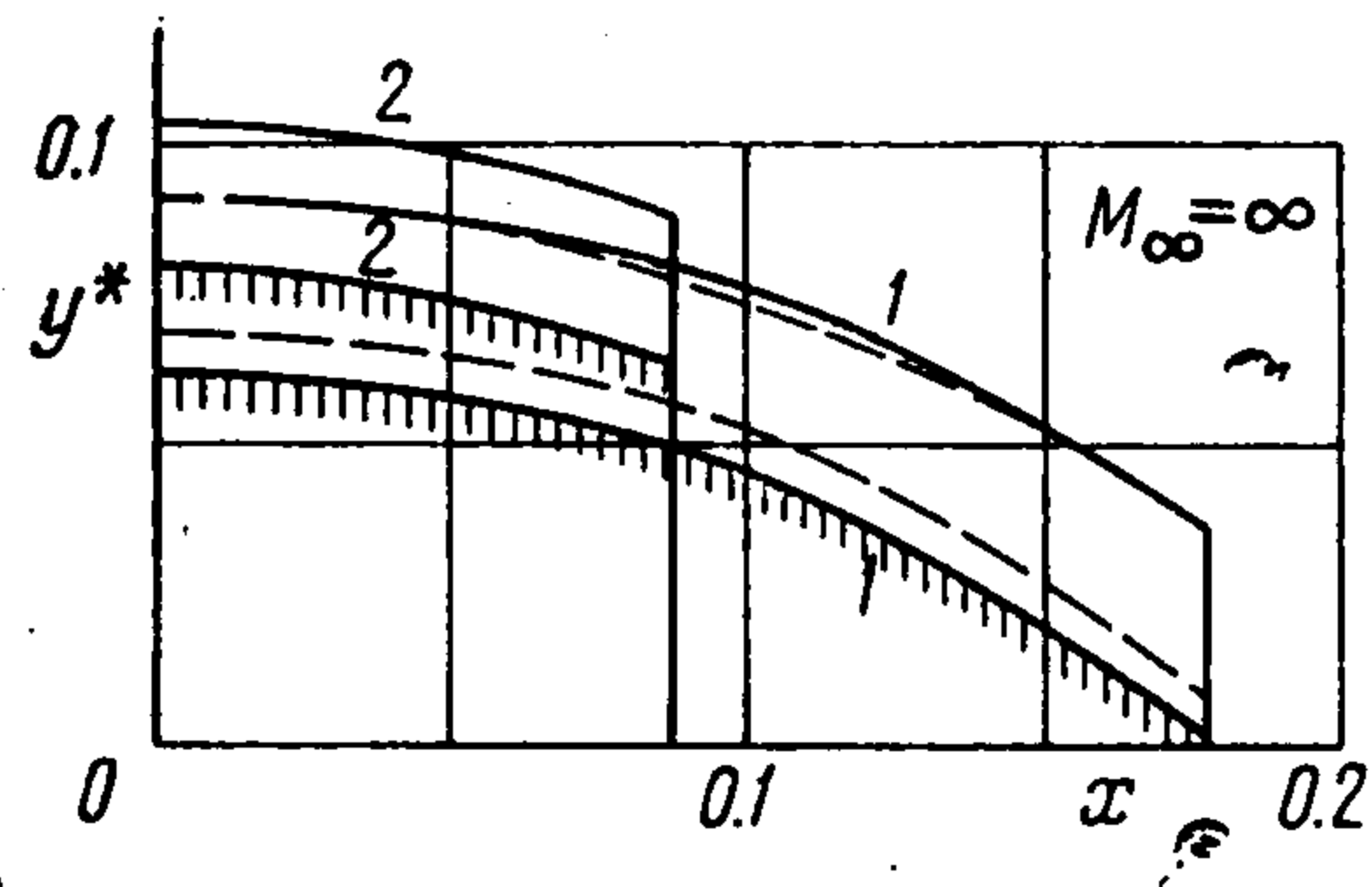
Наибольший интерес в этом отношении представляют узкие крылья с ребрами на передних кромках (см. первую схему на фиг. 6). Для такой компоновки давление на внешней стороне ребра много меньше, чем на внутренней. Область повышенного давления занимает все крыло, поэтому тяга и подъемная сила возрастают заметнее.

Переходим к описанию результатов счета. Уравнения интегрировались методом Рунге-Кутты с использованием стандартной программы для ЭВМ. Вначале решалась задача Коши для уравнения (1.10) с данными  $(\theta_1^*, \varphi_1)$ , взятыми либо из расчета обтекания внешней части крыла поступательным потоком, либо произвольными. В ходе счета в интервале  $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$  определялись форма ударной волны  $\theta^*(\varphi)$  и ее производная  $\theta_{\varphi}^*(\varphi)$ . Следующим этапом с помощью (1.12) и (1.5) находились начальные условия уравнения (1.9), содержащие переменную  $\varphi$  в качестве параметра. Интегрирование уравнения (1.9) производилось в пяти плоскостях  $\varphi = \varphi_i$ , которыми интервал от 0 до  $\varphi_1$  разбивался на равные части. Искомыми являлись функции  $u(\theta, \varphi_i)$ ,  $u_{\theta}(\theta, \varphi_i)$ . Счет обрывался при достижении второй функцией нуля с точностью до шести знаков. Описанная методика позволяла найти пять точек контура крыла. Коэффициент давления  $C_p = 2p$  вычислялся по формуле (1.8) на стенке и на ребре.



Фиг. 6

Результаты расчета контуров тела и ударной волны в поперечном сечении  $x = 1$  для числа  $M_{\infty} = \infty$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $\alpha = 10^\circ$  и двух начальных положений ребра  $(10^\circ, 5^\circ)$  и  $(5^\circ, 5^\circ)$  представлены на фиг. 7. Характерно, что при больших углах раскрытия  $\varphi$  контур тела становится сильно искривленным, тогда как при малых углах — почти прямым.

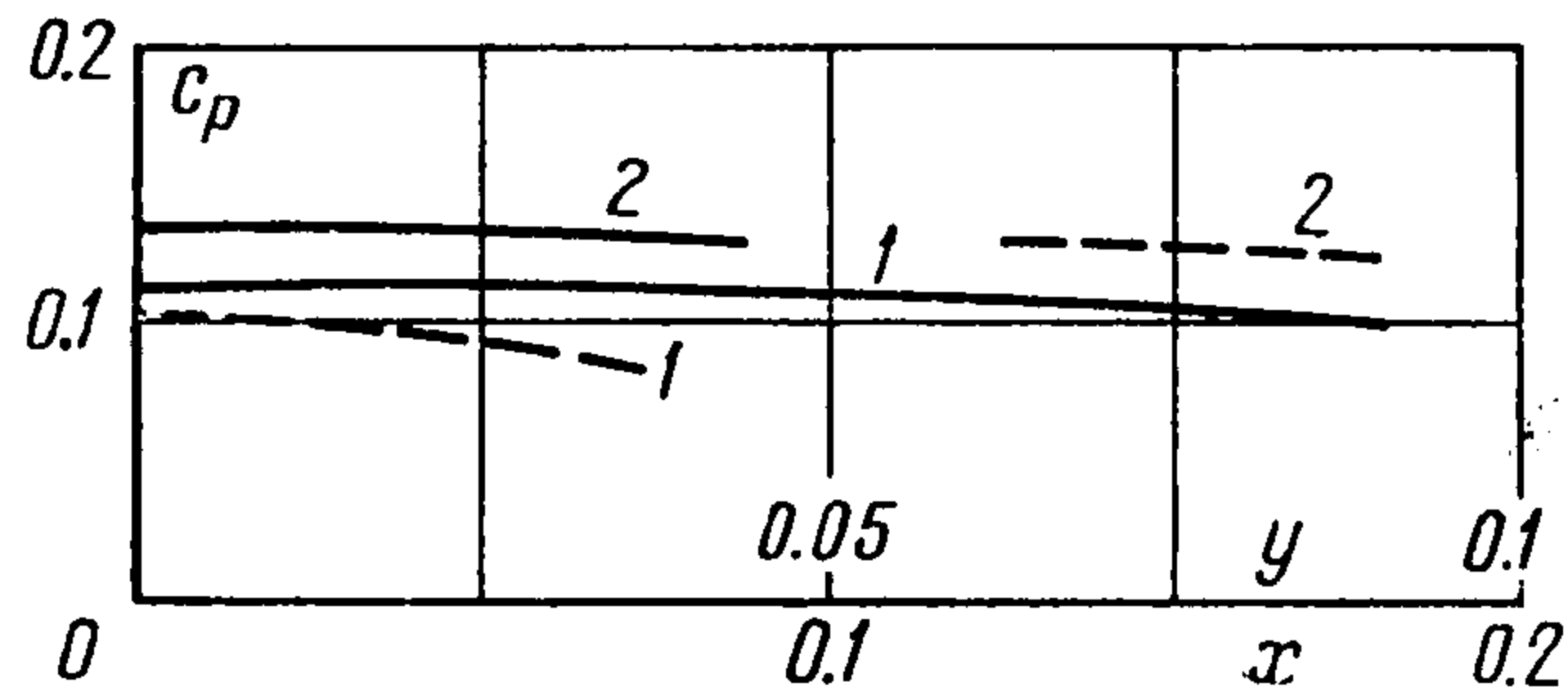


Фиг. 7

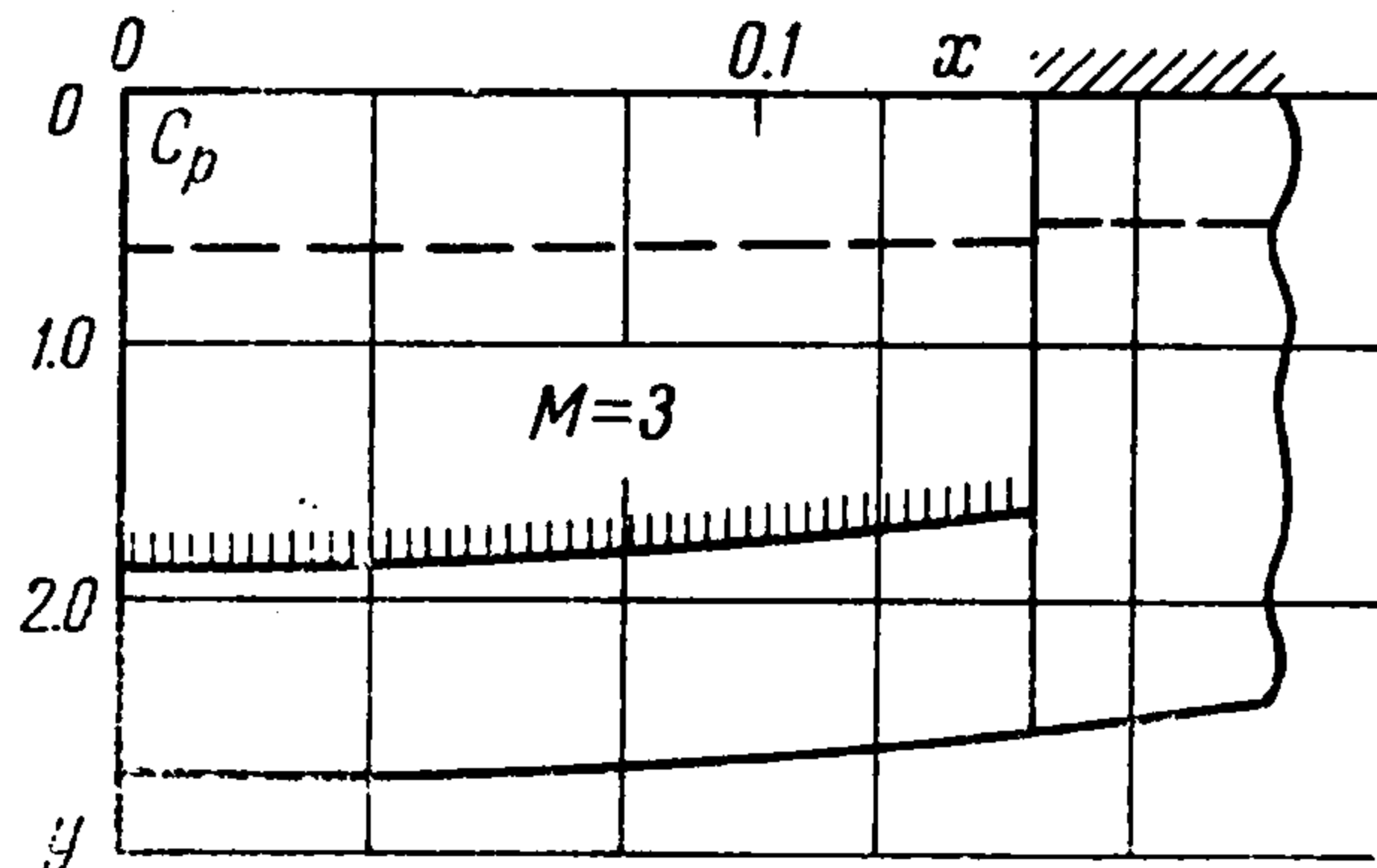
На фиг. 8 представлены графики распределения давления на стенке и на ребре пунктиром. На стенке независимо от кривизны контура давление почти постоянно и увеличивается к плоскости симметрии крыла. На ребре давление незначительно возрастает при подходе к месту сопряжения с поверхностью тела.

Для конечного числа Маха данные расчета при  $M_{\infty} = 3$ ,  $\alpha = 6^\circ 30'$  ( $8^\circ 10'$ ,  $26^\circ 36'$ ) представлены на фиг. 9. Пунктиром показано распределение давления на стенке. Качественное поведение кривых, описанное выше, сохраняется и в этом случае. Постоянное давление на крыле означает, что скорость  $w$  действительно мала и решение имеет высокую точность.

Класс течений, характеризуемый скоростью  $w \sim \delta$ , дает возможность изучить не только обтекание крыла с поперечным сечением, изображенным на фиг. 3. В комбинации с поступательным потоком его можно использовать для определения течения и около других крыльев и тел, например с поперечными сечениями, показанными на фиг. 6.



Фиг. 8



Фиг. 9

3. Обтекание крыла гиперзвуковым потоком. Пусть число Маха набегающего потока велико ( $M_{\infty} = \infty$ ) и отношение плотностей, определяемое параметром,  $\epsilon \ll 1$ . Систему координат  $r, \theta, \varphi$  (фиг. 1) в этом случае удобно связать с поверхностью тела, отсчитывая угол  $\theta$  от одной из образующих тела, например от значения  $\theta = \theta_1(\varphi_1)$ . Тогда вместо координаты  $\theta$  появится новый угол отсчета  $\vartheta$ , связанный с прежним соот-

ношением  $\theta = \vartheta + \theta_1(\varphi_1)$ . Если и угол атаки  $\alpha^\circ$  отсчитывать от плоскости  $\vartheta = 0$ , то необходимо заменить во всех выражениях  $\alpha$  на разность  $(\alpha^\circ - \theta_1)$ .

В гиперзвуковом приближении, полагая, что волна достаточно плавная (узкие крылья), имеем оценки

$$\vartheta \sim \varepsilon, \quad u \sim 1, \quad v \sim \varepsilon, \quad p \sim 1, \quad \rho \sim \varepsilon^{-1}$$

Отсюда, сохраняя в (1.10) только главные члены, получим уравнение для ударной волны в виде

$$\frac{d\vartheta^*}{d\varphi} + \frac{\operatorname{ctg}(\alpha^\circ - \theta_1) \sin \varphi}{1 + \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{ctg}(\alpha^\circ - \theta_1) \cos \varphi} = 0$$

Оба слагаемых в левой части должны быть одного порядка. Следовательно,  $\varphi \sim \varepsilon^{1/2}$ , и приближение справедливо только для достаточно узких крыльев.

Функция  $\vartheta^*$  ( $\varphi$ ) находится из соотношения

$$\vartheta^* = \vartheta_1^* + \operatorname{ctg} \theta_1 \ln \left[ \frac{1 + \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{ctg}(\alpha^\circ - \theta_1) \cos \varphi}{1 + \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{ctg}(\alpha^\circ - \theta_1) \cos \varphi_1} \right] \quad (3.1)$$

Упрощение уравнения (1.9) и граничных условий (1.12) проводится аналогично. Сохраняя главные члены, найдем, что

$$\begin{aligned} u_{\vartheta\vartheta} + 2u &= 0, & u^* &= \cos(\alpha^\circ - \theta_1) \cos \theta_1 \cos \varphi - \sin(\alpha^\circ - \theta_1) \sin \theta \\ u_a^* &= -\varepsilon [\sin(\alpha^\circ - \theta_1) \cos \theta_1 + \cos(\alpha^\circ - \theta_1) \sin \theta_1 \cos \varphi] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение запишем в виде

$$u = a \sin \sqrt{2} \vartheta + b \cos \sqrt{2} \vartheta, \quad a = u^* \sin \sqrt{2} \vartheta^* + u^* / \sqrt{2} \cos \sqrt{2} v^*, \quad b = u^* \cos \sqrt{2} v^*$$

Отсюда и из условия обтекания получим, что контур крыла определяется следующим выражением

$$\vartheta_1(\varphi) = \vartheta^*(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sin(\alpha^\circ - \theta_1) \cos \theta_1 + \cos(\alpha^\circ - \theta_1) \sin \theta_1 \cos \varphi}{\cos(\alpha^\circ - \theta_1) \cos \theta_1 \cos \varphi - \sin(\alpha^\circ - \theta_1) \sin \theta_1} \quad (3.3)$$

Входящий в формулы параметр  $\theta_1$  определяется условием  $\vartheta(\varphi_1) = 0$ .

Если дополнительно предположить, что крыло тонкое ( $\theta_1 \sim \varepsilon$ ) и отсчет угла  $\vartheta$  вести от плоскости  $\theta_1 = 0$ , то вместо (3.1) получим выражения

$$\vartheta^* = \vartheta_1^* + \operatorname{ctg} \alpha^\circ (\cos \varphi - \cos \varphi_1), \quad \vartheta_1 = \vartheta^* - 1/2 \varepsilon \operatorname{tg} \alpha^\circ / \cos \varphi \quad (3.4)$$

которые показывают, что контур крыла выпуклый.

Результаты расчета по формулам (3.4) нанесены пунктиром на фиг. 7. Как видно из сравнения, имеется хорошее совпадение с расчетом при  $M = \infty$ .

В заключение автор приносит благодарность Г. Г. Черному и Г. Н. Андрееву за ряд полезных замечаний, высказанных при обсуждении работы.

Поступила 20 VII 1967

НИИ механики Московского университета

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г о л у б и н с к и й А. И., И в а н о в А. Н. Некоторые точные решения задачи обтекания скользящего крыла с перегородкой сверхзвуковым и гиперзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
2. Г о н о р А. Л. Обтекание конических тел при движении газа с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 1.
3. Б у л а х Б. М. Некоторые вопросы теории конических течений. ПММ, 1961, т. 25 вып. 2.