

**О ВОЗМУЩЕНИЯХ, КОТОРЫЕ СВЯЗАНЫ С СОЗДАНИЕМ
ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ТЕЛО
В ТРАНСЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ДИССИПИРУЮЩЕГО ГАЗА**

О. С. Рыжов, Е. Д. Терентьев

(Москва)

Асимптотическая картина пространственного обтекания конечного тела вязкой несжимаемой жидкостью хорошо известна; приближенное решение соответствующей задачи можно найти, например, в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1]. Строгое исследование плоскопараллельных течений с исчерпывающей полнотой было проведено Финном [2]. При переходе от движения несжимаемой жидкости к дозвуковому потоку сжимаемого газа принципиальных затруднений не возникает, но поле скоростей получается иным, когда величина скорости частиц на бесконечности становится критической.

Звуковой режим обтекания тела с круглым поперечным сечением был изучен в работе [3]. Ниже рассматриваются возмущения, связанные с созданием подъемной силы, которая действует на произвольное тело в пространственном течении. При решении этой задачи приходится рассматривать не только внешний поток, но и ламинарный вихревой след, так как поперечные составляющие вектора скорости во внешнем движении обращаются в бесконечность, если задающие их функции формально продолжить в область, занятую следом. Указанная трудность возникает только при изучении пространственных течений; в первом приближении решение, описывающее затухание возмущений в осесимметричном звуковом потоке диссипирующего газа, имеет единственную сингулярную точку и не содержит других особенностей на всей оси симметрии [3].

Структура внешнего потока в основном формируется под действием нормальных вязких напряжений и продольной составляющей вектора потока тепла, в то время как распределение параметров газа в ламинарном следе определяется тангенциальными напряжениями. Сопряжение решений, справедливых в каждой из указанных областей, позволяет замкнуть задачу и найти все необходимые параметры.

§ 1. Ламинарный след. В качестве исходных возьмем систему уравнений неразрывности, Навье-Стокса и переноса тепла. Пусть x , y и z обозначают оси декартовой системы координат, v_x , v_y и v_z — составляющие вектора скорости вдоль этих осей, ρ — плотность, p — давление, s — удельную энтропию, T — температуру, λ_1 — коэффициент вязкости, λ_2 — коэффициент второй вязкости, k — коэффициент теплопроводности. В принятых обозначениях уравнения движения газа имеют вид [1]

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\lambda_1 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left(\lambda_2 - \frac{2}{3} \lambda_1 \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] \quad (1.2)$$

(y, z)

$$\rho T \left(v_x \frac{\partial s}{\partial x} + v_y \frac{\partial s}{\partial y} + v_z \frac{\partial s}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) +$$

$$+ 2\lambda_1 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\lambda_2 - \frac{2}{3} \lambda_1 \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \quad (1.3)$$

Здесь и далее символ (y, z) означает, что опущенные уравнения дополняют приведенное до полной системы в проекциях на оси x, y, z .

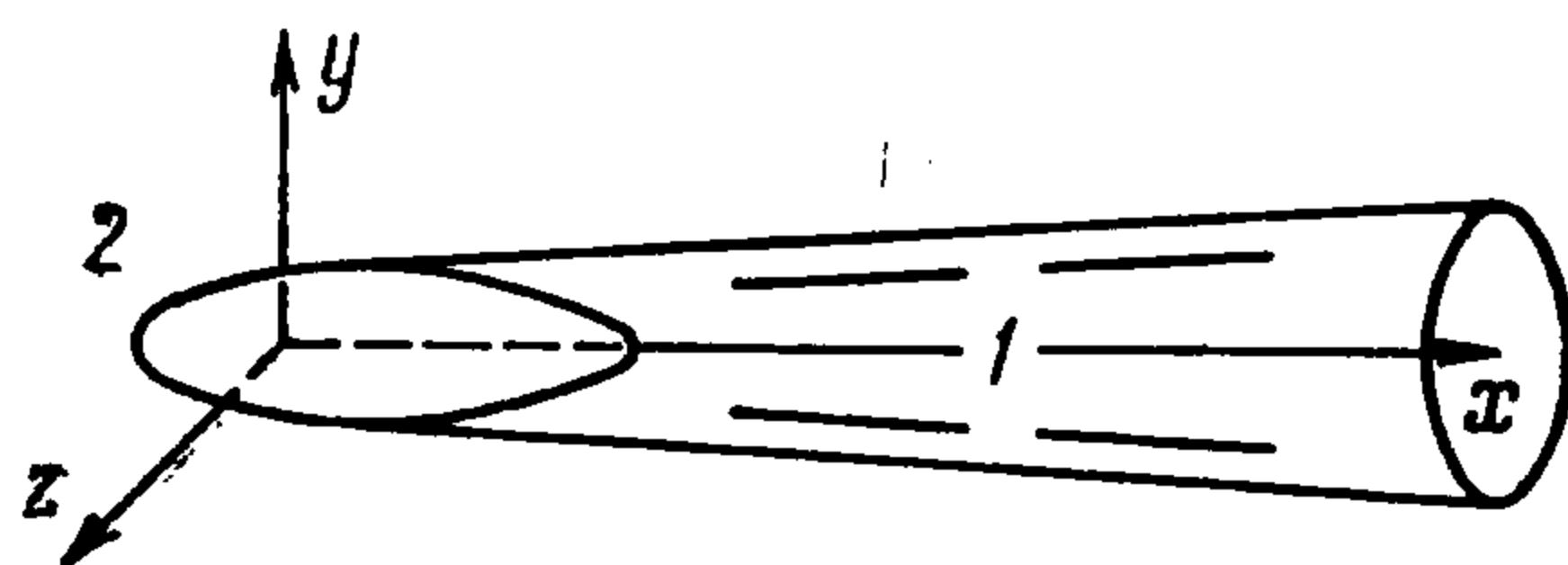
Замкнем написанную систему при помощи термодинамических соотношений [4]

$$ds = \frac{c_p}{\alpha \rho a^2 T} (dp - a^2 d\rho), \quad dT = \frac{1}{\alpha \rho a^2} (\kappa dp - a^2 d\rho)$$

$$\left(\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \quad V = \frac{1}{\rho}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} \right) \quad (1.4)$$

Здесь $V = 1/\rho$ означает удельный объем, α — коэффициент теплового расширения, a — адиабатическую скорость звука, c_p — удельную теплоемкость при постоянном давлении, c_v — удельную теплоемкость при постоянном объеме. Уравнения (1.4) позволяют исключить из рассмотрения энтропию и температуру.

В дальнейшем будет рассматриваться затухание возмущений вдали от обтекаемого тела. Все течение разобьем на две области, первая из которых занята ламинарным вихревым следом, простирающимся в виде узкого языка позади тела, а вторая —



Фиг. 1

основным (внешним) потоком. На фиг. 1 эти области помечены цифрами 1 и 2 соответственно. При исследовании малых возмущений можно предположить, что во всем рассматриваемом пространстве значения параметров газа мало

отклоняются от соответствующих значений в набегающем равномерном установившемся потоке. Будем считать скорость его частиц по величине совпадающей со скоростью звука и направленной вдоль оси x . Значения параметров среды в невозмущенном состоянии отметим звездочкой.

Поле скоростей в следе за телом формируется в основном под воздействием тангенциальных вязких напряжений. Явления в этой области пространства близки к тем, которые происходят в пограничном слое. Кроме того, как заметил впервые Толлмин при изучении движения несжимаемой жидкости [5], изменением давления можно пренебречь по сравнению с изменением остальных газодинамических функций. Поперечные размеры следа много меньше расстояния между выбранным сечением и обтекаемым телом, поэтому производные в направлении осей y и z должны значительно превосходить соответствующие производные по x .

Введем в области 1 безразмерные переменные

$$x = \frac{l}{\Delta'} x', \quad y = ly', \quad z = lz', \quad v_x = a_* (1 + \varepsilon' v_x') \quad (1.5)$$

$$v_y = a_* \varepsilon' v_y', \quad v_z = a_* \varepsilon' v_z', \quad \rho = \rho_* (1 + \varepsilon' \rho'), \quad p = p_* (1 + \varepsilon' p')$$

Здесь ε' , ε_p' и Δ' — малые числовые параметры, причем $\varepsilon_p' \ll \varepsilon'$ в силу предположения о характере изменения давления. В качестве характерной длины l взята величина, связанная с поперечными размерами следа. В области 2, занятой внешним потоком, формулы (1.5) уже не будут справедливыми, так как в ней решающее значение имеет правильный учет нормальных вязких напряжений и x -составляющей вектора потока тепла. Как показал впервые Тейлор [6], аналогичные факторы определяют структуру слабых ударных волн.

При подстановке соотношений (1.5) в систему уравнений (1.1) — (1.3) получаются три безразмерных коэффициента: два числа Рейнольдса и число Пекле

$$N_{Re1}' = \rho_* a_* l / \lambda_1, \quad N_{Re2}' = \rho_* a_* l / \lambda_2, \quad N_{Pe}' = \rho_* a_* c_p l / k \quad (1.6)$$

которые вычисляются по значениям газодинамических функций в набегающем звуковом потоке. Будем считать, что обратные величины этих чисел имеют одинаковый порядок и значительно меньше единицы. При выводе приближенных уравнений во всех соотношениях будем удерживать только главные члены, пренебрегая членами, имеющими более высокий порядок малости. Поэтому в уравнениях (1.1) — (1.3) коэффициенты вязкости λ_1 , λ_2 и теплопроводности K можно положить постоянными и равными их значениям в набегающем потоке. То же самое замечание относится к термодинамическим коэффициентам в формулах (1.4).

В результате линеаризации уравнения неразрывности получим, опуская штрихи над всеми безразмерными переменными

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) показывает, что в любом поперечном сечении вихревого следа газ ведет себя как несжимаемая жидкость. Аналогичный результат получается в так называемой «теории тонкого тела» при любых до-, транс- и сверхзвуковых скоростях потока, в котором отсутствуют вязкие напряжения и молекулярный перенос тепла [7].

При упрощении уравнений Навье-Стокса (1.2) можно отбросить нелинейные члены. Формально для выполнения такой операции необходимо наличие соотношения

$$[\varepsilon'] \ll \Delta' = 1 / N_{Re1}' \quad (1.8)$$

между малыми параметрами ε' , Δ' и $1 / N_{Re1}'$, которое будем считать выполненным. В итоге для составляющих v вектора скорости получим классические уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (y, z) \quad (1.9)$$

Обращаясь к уравнению притока тепла (1.3), находим, что оно также дает уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{N_{Pr}'} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) \quad (1.10)$$

которому удовлетворяет возмущенная плотность газа и коэффициентом которого служит число Прандтля $N_{Pr}' = N_{Pe}' / N_{Re1}'$, вычисленное по первому числу Рейнольдса. Таким образом, в рассматриваемом приближении изменение плотности целиком определяется тепловыми процессами.

Система трех уравнений (1.9) может быть записана в виде одного уравнения, которому удовлетворяет вектор $\mathbf{v} = \mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$ возмущенной скорости частиц газа. Решение последнего будем искать в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \text{grad } \Phi \quad (1.11)$$

Здесь скалярная функция $\Phi(x, y, z)$ определяется уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (1.12)$$

В дальнейшем полученные результаты будут применены к вычислению сил, действующих на тело. Подчиним поэтому функцию $\mathbf{u}(x, y, z)$ начальным значениям типа источника

$$\mathbf{u} = c\delta(y)\delta(z) \quad \text{при } x = 0 \quad (1.13)$$

с постоянным вектором $\mathbf{c} = \mathbf{c}(c_x, c_y, c_z)$. Как обычно, символ $\delta(\alpha)$ означает дельта-функцию Дирака. Решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее начальным значениям (1.13), хорошо известно, оно может быть представлено как [8]

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{c}}{4\pi x} \left[\exp \frac{-(y^2 + z^2)}{4x} \right] \quad (1.14)$$

Что касается скаляра $\Phi(x, y, z)$, то он был введен в представление (1.11), чтобы иметь возможность удовлетворить дополнительному условию (1.7), налагаемому на поперечные компоненты вектора скорости. Имеем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1.15)$$

Правая часть написанного уравнения должна быть равна производной $\partial \Phi / \partial x$, иначе неудовлетворенным останется уравнение теплопроводности (1.12). На первый взгляд поставленная задача неразрешима, так как одна и та же функция $\Phi(x, y, z)$ определяется как решение двух различных уравнений. Однако это не так. В самом деле, дифференцируя (1.15) по x , находим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

в силу уравнений (1.9). Интегрирование последнего соотношения дает

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1.16)$$

что и требовалось доказать.

Уравнение (1.16) является простейшим для определения потенциала $\Phi(x, y, z)$, который должен оставаться конечным на оси $y = z = 0$ и обращаться в нуль при $y \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow \infty$. Воспользовавшись формулой (1.14) для выражения производных $\partial u_y / \partial y$ и $\partial u_z / \partial z$ и удовлетворяя поставленным требованиям, легко находим

$$\Phi = \frac{c_y y + c_z z}{2\pi(y^2 + z^2)} \left[\exp \frac{-(y^2 + z^2)}{4x} - 1 \right] \quad (1.17)$$

Перейдем к цилиндрической системе координат $y = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$; при этом компоненты v_r и v_θ вектора скорости будут связаны с декартовыми составляющими v_y и v_z соотношениями

$$v_y = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta, \quad v_z = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta$$

Теперь в результате объединения формул (1.11), (1.14) и (1.17) получим продольную составляющую вектора скорости

$$v_x = \frac{1}{4\pi x} \left[c_x + \frac{r(c_y \cos \theta + c_z \sin \theta)}{2x} \right] \exp \frac{-r^2}{4x} \quad (1.18)$$

В равенстве (1.18) второе из заключенных в квадратные скобки слагаемых может быть отброшено, так как по порядку величины оно много меньше первого, если рассматриваемая область следа достаточно удалена от обтекаемого тела. Аналогично находим

$$v_r = - \frac{c_y \cos \theta + c_z \sin \theta}{2\pi r^2} \left(\exp \frac{-r^2}{4x} - 1 \right) \\ v_\theta = \frac{c_z \cos \theta - c_y \sin \theta}{2\pi} \left[\frac{1}{2x} \exp \frac{-r^2}{4x} + \frac{1}{r^2} \left(\exp \frac{-r^2}{4x} - 1 \right) \right] \quad (1.19)$$

Здесь, напротив, все члены имеют одинаковый порядок и должны быть сохранены. При $r \rightarrow \infty$, т. е. на внешней границе следа поперечные составляющие v_r и v_θ скорости частиц стремятся к нулю по степенному закону

$$v_r \rightarrow \frac{c_y \cos \theta + c_z \sin \theta}{2\pi r^2}, \quad v_\theta \rightarrow \frac{c_y \sin \theta - c_z \cos \theta}{2\pi r^2} \quad (1.20)$$

в то время как затухание v_x в силу равенства (1.18) совершается по экспоненциальному закону.

Изменение плотности в следе находится согласно уравнению (1.10). Его решение, удовлетворяющее начальным условиям $\rho = c_\rho \delta(y) \delta(z)$ при $x = 0$, можно представить как

$$\rho = \frac{c_\rho N_{Pr}'}{4\pi x} \exp \frac{-N_{Pr}' r^2}{4x} \quad (1.21)$$

На самом деле решением (1.21) нужно пользоваться лишь в том случае, если трение и тепловые процессы вблизи тела существенно влияют на изменение энтропии частиц, проходящих через пограничный слой у его поверхности. Тогда из спутного следа происходит вытеснение конечной массы газа. Аналогичное явление будет иметь место и при обтекании сильно нагретых тел, передающих значительное количество тепла внешнему течению.] В условиях, обычных для аэродинамических задач дозвуковых и трансзвуковых течений, энтропия частиц в следе, по-видимому, мало отличается от энтропии набегающего равномерного потока [9]. Поэтому можно считать, что $\rho = c_\rho = 0$.

Но при больших сверхзвуковых скоростях поверхность обтекаемого тела будет разогреваться до высоких температур.

§ 2. Внешний поток. Движение несжимаемой жидкости в области 2 находится при помощи решения уравнения Лапласа, которому удовлетворяет потенциал скорости [1]. При дозвуковых скоростях сжимаемый поток будет вести себя качественно так же, как и несжимаемая жидкость, но поле скоростей принципиально меняется, когда величина скорости частиц на бесконечности становится критической. В этом случае во внешнем течении уже нельзя считать равными нулю тензор вязких напряжений и вектор потока тепла. Наоборот, как показано в работе [3], на больших расстояниях от тела в области 2 движение газа в основном формируется под воздействием нормальных вязких напряжений и передачей тепла вдоль оси x . В этой работе содержится обобщение обычных

предположений теории трансзвуковых течений; исходя из них, пишем

$$\begin{aligned} x &= Lx'', & y &= \frac{L}{\Delta''} y'', & z &= \frac{L}{\Delta''} z'', & v_x &= a_* (1 + \varepsilon'' v_x'') \\ v_y &= \varepsilon'' \Delta'' a_* v_y'', & v_z &= \varepsilon'' \Delta'' a_* v_z'', & \rho &= \rho_* (1 + \varepsilon'' \rho''), & p &= p_* (1 + \varepsilon'' p'') \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь ε'' и Δ'' — числовые параметры, которые по величине значительно меньше единицы, а L — характерная длина вдоль оси x . Длина L отличается от принятой выше для области I , так как последняя связана с поперечными размерами следа. Как показал Тэйлор [6], формулы типа (2.1) определяют структуру слабых ударных волн.

При подстановке соотношений (2.1) в исходные уравнения движения (1.1) — (1.3) в коэффициентах последних вновь появляются числа Рейнольдса и число Пекле. Как и прежде, будем считать, что обратные величины этих чисел имеют одинаковый порядок и значительно меньше единицы, а при выводе приближенных уравнений во всех соотношениях сохраним только главные члены. Сам вывод приближенных уравнений совершенно аналогичен тому, который был указан в работе [3] при изучении потока с осевой симметрией, поэтому приведем только окончательные результаты.

После линеаризации уравнения неразрывности и проекции (1.2) уравнения Навье-Стокса на ось x получим, опуская, как и раньше, штрихи над безразмерными переменными

$$\rho = \frac{p_*}{\rho_* a_*^2} p = -v_x \quad (2.2)$$

С учетом формул (2.2) из проекций уравнения Навье-Стокса на оси y и z следуют соотношения

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (2.3)$$

Принимая во внимание, что при $x \rightarrow -\infty$ имеет место равенство

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

из уравнений (2.3) можно вывести полное условие безвихренности возмущенного внешнего течения $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, откуда $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$.

Что касается уравнения притока тепла (1.3), то его нужно предварительно преобразовать, комбинируя с уравнением неразрывности и уравнениями Навье-Стокса. Для вывода конечного соотношения весьма существенным, кроме того, является зависимость

$$\varepsilon'' \ll \Delta''^2 = \frac{1}{N_{\text{Re}}''} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{N_{\text{Pr}}''} \right) \quad \left(\frac{1}{N_{\text{Re}}''} = \frac{4}{3} \frac{1}{N_{\text{Re}1}''} + \frac{1}{N_{\text{Re}2}''}, \quad N_{\text{Pr}}'' = \frac{N_{\text{Pe}}''}{N_{\text{Re}}''} \right)$$

между малыми параметрами ε'' , Δ'' и $1/N_{\text{Re}}''$, которая была установлена в работе [3]. Здесь число Прандтля вычисляется не по первому, а по суммарному числу Рейнольдса, основанному на так называемой «продольной вязкости».

В результате имеем

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

Применявшиеся до сих пор декартовы координаты являются удобными для проведения качественных оценок и вывода асимптотических урав-

нений. Наоборот, более простой вид решение для области 2 приобретает в цилиндрических координатах. Для компонентов v_r и v_θ скорости частиц вместо уравнений (2.3) получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial x}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \quad (2.5)$$

а уравнение (2.4) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (2.6)$$

Уравнения (2.5) и (2.6) составляют замкнутую систему, инвариантную по отношению к непрерывной двухпараметрической группе преобразований подобия

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \alpha x, & r &\rightarrow \alpha^{3/2} r, & \theta &\rightarrow \theta \\ v_x &\rightarrow \alpha^{-3n/2} v_x, & v_r &\rightarrow \alpha^{-(3n+1)/2} v_r, & v_\theta &\rightarrow \alpha^{-(3n+1)/2} v_\theta \end{aligned}$$

Отсюда вытекает существование у нее автомодельных решений вида

$$v_x = r^{-n} w_x(\xi, \theta), \quad v_r = r^{-(3n+1)/3} w_r(\xi, \theta), \quad v_\theta = r^{-(3n+1)/3} w_\theta(\xi, \theta), \quad \xi = x r^{-2/3} \quad (2.7)$$

Такого рода решение с $n = 4/3$ и $v_\theta = \partial/\partial\theta = 0$ дает асимптотические законы затухания возмущений в области 2 на больших расстояниях от тела вращения, обтекаемого звуковым на бесконечности потоком вязкого и теплопроводящего газа [3]. Очевидно, при $n = 4/3$ формулы (2.7) будут описывать и компоненты вектора скорости частиц, которые связаны с силой сопротивления, действующей на конечное тело произвольной формы. Найдем, какие отклонения от своих равновесных значений испытывают параметры газа благодаря созданию подъемной силы, приложенной к телу в потоке с критической скоростью.

Для построения решения используем по-прежнему формулы (2.7), подстановка которых в систему уравнений (2.5) и (2.6) дает

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \xi \frac{\partial w_x}{\partial \xi} + \frac{\partial w_r}{\partial \xi} + n w_x &= 0, & \frac{\partial w_x}{\partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w_x}{\partial \xi^2} - \frac{2}{3} \xi \frac{\partial w_r}{\partial \xi} + \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} - \left(n - \frac{2}{3}\right) w_r &= 0 \end{aligned}$$

Показатель степени заранее неизвестен, однако очевидно, что $n \geq 4/3$.

В написанные уравнения входят функции двух независимых переменных ξ и θ . Чтобы еще более упростить вид искомого решения, разложим его в ряд Фурье и сохраним в нем только члены с первыми гармониками. Такая операция находится в полном согласии с формулами (1.18) и (1.19), которые фактически также представляют первые члены разложения в ряд Фурье решения для области спутного следа. Итак, имеем

$$\begin{aligned} w_x &= f(\xi) (c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta), & w_r &= g(\xi) (c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta) \\ w_\theta &= h(\xi) (c_2 \sin \theta - c_1 \cos \theta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

с произвольными постоянными c_1 и c_2 . Для функций $f(\xi)$, $g(\xi)$ и $h(\xi)$ справедлива система уравнений

$$\frac{2}{3} \xi \frac{df}{d\xi} + \frac{dg}{d\xi} = -nf, \quad \frac{dh}{d\xi} = -f, \quad \frac{d^2 f}{d\xi^2} = \frac{2}{3} \xi \frac{dg}{d\xi} + \left(n - \frac{2}{3}\right) g - h$$

Эта система эквивалентна одному уравнению

$$\frac{d^3 f}{d\xi^3} + \frac{4}{9} \xi^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{4}{3} \xi \left(n + \frac{1}{3} \right) \frac{df}{d\xi} + (n^2 - 1) f = 0 \quad (2.9)$$

После решения уравнения (2.9) функции $g(\xi)$ и $h(\xi)$ находятся при помощи равенств

$$g = \frac{3}{3n-2} \left(\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{4}{9} \xi^2 \frac{df}{d\xi} + \frac{2}{3} n \xi f + h \right), \quad h = - \int_{-\infty}^{\xi} f(\xi) d(\xi) \quad (2.10)$$

При $r \rightarrow 0$ значения автомодельной координаты неограниченно возрастают по абсолютной величине. Напишем асимптотические разложения для трех линейно независимых решений уравнения (2.9) при $|\xi| \rightarrow \infty$. Первое из них будет

$$f = a_1 |\xi|^{-3(n+1)/2} [1 + 27/64 (n+1)(n+5/3)(n+7/3) \xi^{-3} + \dots] \quad (2.11)$$

Второе из искомым решений возьмем в виде

$$f = a_2 |\xi|^{-3(n-1)/2} [1 - 81/32 (n-1)(n-1/3)(n+1/3) \xi^{-3} \ln |\xi| + \dots] \quad (2.12)$$

Третье линейно независимое решение уравнения (2.9) запишем так:

$$f = a_3 |\xi|^{3(n-1)} \exp(-4/27 \xi^3) + \dots \quad (2.13)$$

Используя равенства (2.7), (2.8) и (2.10), легко видеть, что соответствующие формуле (2.11) асимптотические разложения функций $v_x(x, r, \theta)$, $v_r(x, r, \theta)$ и $v_\theta(x, r, \theta)$ при $r \rightarrow 0$ и $x < 0$ начинаются с членов

$$\begin{aligned} v_x &= a_1 |x|^{-3(n+1)/2} r (c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta) + \dots \\ v_r &= -\frac{2a_1}{3n+1} |x|^{-(3n+1)/2} (c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta) + \dots \\ v_\theta &= \frac{2a_1}{3n+1} |x|^{-3(n+1)/2} (c_2 \sin \theta - c_1 \cos \theta) + \dots \end{aligned}$$

При $r \rightarrow 0$ и $x > 0$ формула для $v_x(x, r, \theta)$ остается прежней, в то время как выражения для $v_r(x, r, \theta)$ и $v_\theta(x, r, \theta)$ меняются за счет интегральных слагаемых из правых частей равенств (2.10). Имеем

$$\begin{aligned} v_r &= -\frac{3B_1}{3n-2} r^{-(3n+1)/3} (c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta) + \dots \\ v_\theta &= -B_1 r^{-(3n+1)/3} (c_2 \sin \theta - c_1 \cos \theta) + \dots \left(B_1 = + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Продольная составляющая возмущенной скорости потока, вычисленная по решению (2.12), обращается в бесконечность как $1/r$ вдоль всей оси x , а поперечные составляющие — как $1/r^2$ при $x < 0$ и $r^{-(3n+1)/3}$ при $x > 0$, причем для них остаются в силе формулы (2.14). Относительно решения (2.13) заметим, что оно дает выражения для всех трех составляющих скорости частиц газа, которые содержат общий множитель $\exp(-4x^3/27r^2)$. Поэтому использование решения (2.13) при отрицательных значениях x оказывается невозможным, наоборот, при положительных значениях x соответствующие ему возмущения чрезвычайно быстро затухают при $r \rightarrow 0$.

На бесконечности вверх по потоку возмущения, определяемые интегралами уравнения (2.9), должны затухать. Что касается области за телом, то она занята вихревым следом, поэтому при $r \rightarrow 0$ и $x > 0$ обе поперечные составляющие v_r и v_θ вектора скорости внешнего потока будут иметь особенности, которые задаются формулами (1.20). Продольная составляющая возмущенной скорости особенностью не обладает, так как на границе следа она экспоненциально мала согласно равенству (1.18). Заметим, что при решении осесимметричной задачи о возмущениях, обусловленных силой сопротивления, движение газа вне следа определяется независимо от движения в следе [3]. Решение пространственной задачи получается значительно сложнее.

Производя в диапазоне значений $1 \ll \xi \ll r^{4/3} (\Delta' \Delta''^{2/3} l L^{1/3})^{-1}$ (координата r размерна) сопряжение функций, задающих компоненты v_r и v_θ внутри и вневихревого следа, получим прежде всего $(3n + 1) / 3 = 2$, откуда $n = 5/3$. При этой величине показателя n уравнение (2.9) допускает однократное интегрирование

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{4}{9} \xi^2 \frac{df}{d\xi} + \frac{16}{9} \xi f = 0 \quad (2.15)$$

Произвольная постоянная здесь положена равной нулю, чтобы удовлетворить естественному условию затухания возмущений на бесконечности вверх по потоку. Асимптотическое разложение для первого линейно независимого решения написанного уравнения] при $|\xi| \rightarrow \infty$ дается формулой (2.11), для второго — формулой (2.13). Чтобы найти точное выражение функции $f(\xi)$, в уравнении (2.15) совершим замену независимой переменной $\eta = -4/27 \xi^3$, в результате чего имеем

$$\eta \frac{d^2 f}{d\eta^2} + (2/3 - \eta) \frac{df}{d\eta} - 4/3 f = 0$$

В стандартных обозначениях для конфлюентных гипергеометрических функций, общее решение полученного уравнения имеем в виде [10]

$$f = b_1 \Phi(4/3, 2/3; \eta) + b_2 \eta^{1/3} \Phi(5/3, 4/3; \eta) \quad (2.16)$$

Остается найти связь между постоянными b_1 и b_2 . Для этого воспользуемся асимптотическим представлением конфлюентных гипергеометрических функций при $\eta \rightarrow +\infty$. Имеем

$$f = \eta^{2/3} e^\eta G(-2/3, -1/3; \eta) \left[\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(4/3)} b_1 + \frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(5/3)} b_2 \right] + \dots$$

где $\Gamma(\alpha)$ означает гамма-функцию Эйлера, а $G(-2/3, -1/3; \eta)$ — ряд по обратным степеням η , причем $G(-2/3, -1/3; \eta) \rightarrow 1$ при $\eta \rightarrow +\infty$. Чтобы получить решение, обеспечивающее затухание возмущений во внешнем потоке на бесконечности впереди тела, необходимо положить

$$\frac{b_2}{b_1} = - \frac{6\Gamma^2(2/3)}{\Gamma^2(1/3)}$$

Теперь формула (2.16) преобразуется к виду

$$f = b_1 \left[\Phi\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \eta\right) - \frac{6\Gamma^2(2/3)}{\Gamma^2(1/3)} \eta^{1/3} \Phi\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}; \eta\right) \right] \quad (2.17)$$

откуда, переходя к Ψ -функции, впервые использованной в задачах математической физики Трикоми, находим [10]

$$f = \frac{2\Gamma(2/3)}{3\Gamma(1/3)} b_1 \Psi\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \eta\right) \quad (2.18)$$

Равенства (2.10) дают возможность написать выражения для $g(\xi)$ и $h(\xi)$ в форме

$$g = - \frac{4\Gamma(2/3)}{9\Gamma(1/3)} b_1 \xi \Psi\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \eta\right) - \frac{2\Gamma(2/3)}{3\Gamma(1/3)} b_1 \int_{-\infty}^{\xi} \Psi\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \eta\right) d\xi$$

$$h = - \frac{2\Gamma(2/3)}{3\Gamma(1/3)} b_1 \int_{-\infty}^{\xi} \Psi\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \eta\right) d\xi$$

Воспользовавшись асимптотическим разложением Ψ -функций при больших значениях аргумента, получим при $\eta \rightarrow +\infty$ и $\xi \rightarrow -\infty$ вид решения (2.18)

$$f = \frac{2\Gamma(2/3)}{3\Gamma(1/3)} b_1 \eta^{-4/3} + \dots = \frac{27 \cdot 2^{1/3} \Gamma(2/3)}{4\Gamma(1/3)} b_1 \xi^{-4} + \dots \quad (2.19)$$

и формулу, определяющую поведение функций $g(\xi)$ и $h(\xi)$:

$$g = -h = -\frac{9 \cdot 2^{1/3} \Gamma(2/3)}{4\Gamma(1/3)} b_1 \xi^{-3} + \dots \quad (2.20)$$

Чтобы изучить поведение функции $f(\xi)$ при $\eta \rightarrow -\infty$ и $\xi \rightarrow +\infty$, удобней обратиться к первоначальному представлению (2.17) и асимптотическим выражениям для конфлюентных гипергеометрических функций в отрицательной области изменения аргумента. Имеем

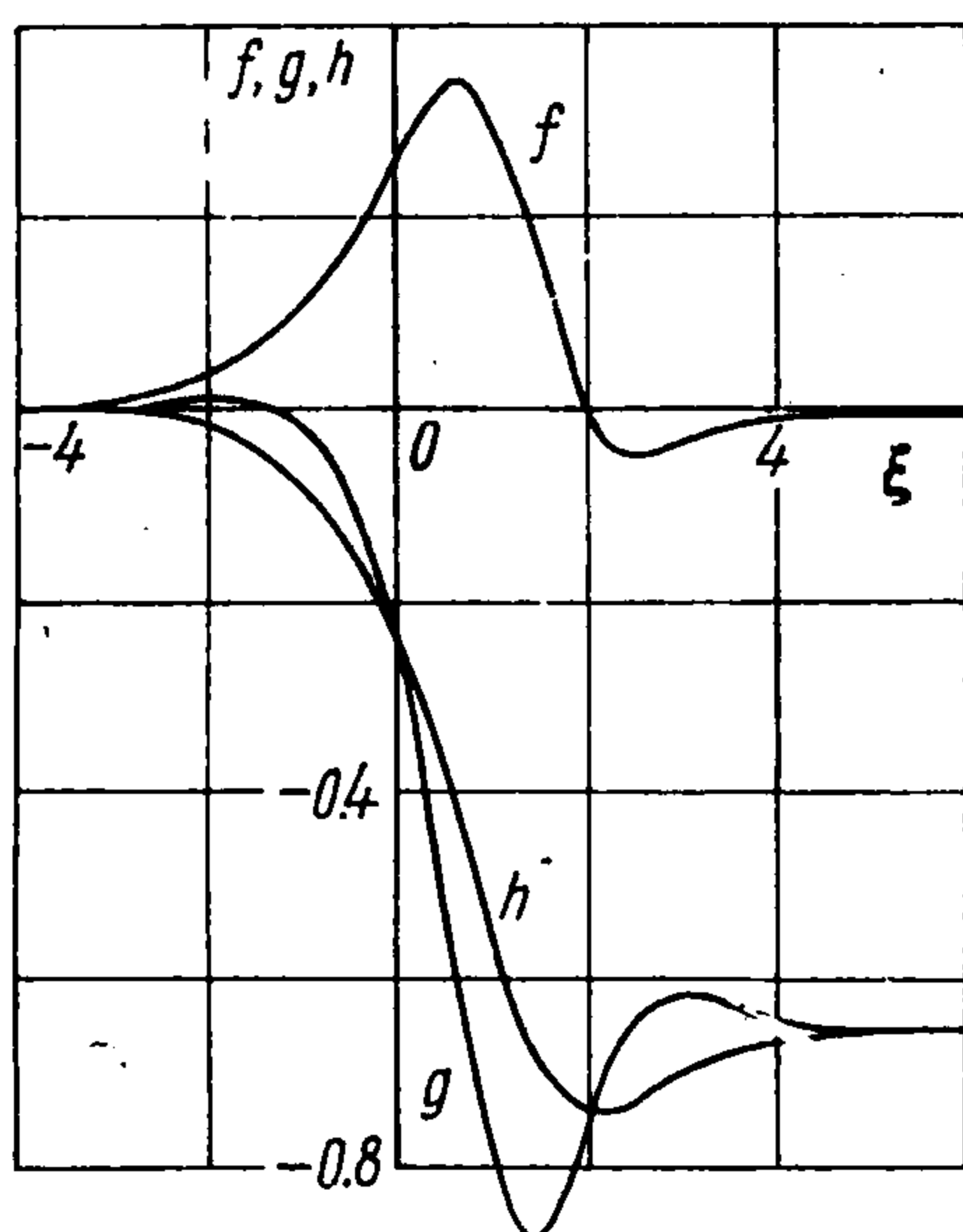
$$f = -\frac{4\Gamma(2/3)}{3\Gamma(1/3)} b_1 \eta^{-4/3} + \dots = -\frac{27 \cdot 2^{1/3} \Gamma(2/3)}{2\Gamma(1/3)} b_1 \xi^{-4} + \dots \quad (2.21)$$

При $\eta \rightarrow -\infty$ и $\xi \rightarrow +\infty$ функции $g(\xi)$ и $h(\xi)$ стремятся, очевидно, к постоянной величине

$$-B_1 = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi = \frac{2\Gamma(2/3)}{3\Gamma(1/3)} b_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \eta\right) d\xi \quad (2.22)$$

Графики функций $f(\xi)$, $g(\xi)$ и $h(\xi)$ приведены на фиг. 2, причем в вычислениях было принято $b_1 = 4\Gamma(1/3) [27 \cdot 2^{1/3} \Gamma(2/3)]^{-1}$, а постоянная B_1 получилась равной 0.667. В согласии с формулами (2.19) — (2.22) функции $f(\xi)$ и $g(\xi)$ проходят один раз через нуль и имеют разные знаки при $\xi \rightarrow -\infty$ и $\xi \rightarrow +\infty$. Что касается функции $h(\xi)$, то она знака не меняет и получается отрицательной на всем интервале изменения ξ .

Произведем полное сопряжение решений, которые относятся к вихре-



Фиг. 2

вому следу и расположенному за его границами внешнему течению. Как уже указывалось выше, компоненты v_r и v_θ вектора скорости основного потока должны иметь особенности вида (1.20). Вспоминая способы введения безразмерной координаты r в областях 1 и 2, на основании равенств (2.7), (2.8) и (2.22) имеем

$$c_1 = -\frac{\Delta''^2}{2\pi B_1} \left(\frac{l}{L}\right)^2 c_z, \quad c_2 = -\frac{\Delta''^2}{2\pi B_1} \left(\frac{l}{L}\right)^2 c_y \quad (2.23)$$

Отметим, что при любом $n \neq 5/3$ нельзя «склеить» решение, справедливое для следа, с решением, имеющим силу вне него, так как получаются четыре противоречивые равенства, связывающие постоянные c_1 и c_2 с постоянными c_y и c_z . Только при $n = 5/3$ обе пары указанных равенств совпадают между собой.

Если движение газа в следе за обтекаемым телом обладает осевой симметрией, то согласно (1.19) имеем $v_r = v_\theta = c_y = c_z = 0$. В этом случае поперечные составляющие вектора скорости по порядку величины значительно меньше продольной не только в области 2, но и в области 1. При упрощении уравнения неразрывности соотношение

(1.7) перестает выполняться, в нем нужно сохранить члены с производными по x . Точно такая же ситуация возникает и при изучении плоскопараллельных течений. Отсюда ясно, что при обтекании тел с круглым поперечным сечением под нулевым углом атаки внешний поток в рассматриваемом приближении не зависит от структуры поля скоростей спутного следа.

§ 3. Силы, действующие на тело. Применяя временно ради удобства для декартовых координат обозначения $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ и используя обычную запись сумм по повторяющимся индексам, дадим выражение для компонентов π_{ij} тензора плотности потока импульса [1]

$$\pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j - \lambda_1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) - \lambda_2 \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (3.1)$$

Здесь все величины берутся в исходной размерной системе единиц, δ_{ij} — единичный тензор, т. е. $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$; индексы i, j, k пробегает значения 1, 2, 3.

Окружим обтекаемое тело замкнутой поверхностью Σ . Полная сила F , действующая на тело, равна взятому по этой поверхности интегралу от тензора плотности потока импульса. Ее компоненты [1]

$$F_i = - \oint_{\Sigma} \pi_{ij} d\sigma_j \quad (3.2)$$

Вектор $d\sigma$ по абсолютной величине равен площади элемента поверхности и направлен по внешней нормали к ней. При вычислении интеграла (3.2) нужно учесть, что

$$\oint_{\Sigma} \rho v_j d\sigma_j = 0 \quad (3.3)$$

так как полное количество газа в рассматриваемом объеме остается неизменным. Условие (3.3) представляет собой интегральную форму уравнения неразрывности.

В качестве рассматриваемого объема газа выберем объем, ограниченный двумя плоскостями $x = \text{const}$, из которых одна Σ_1 взята достаточно далеко впереди, а другая Σ_2 — позади тела. С боковых сторон объем пусть охватывает цилиндрическая поверхность Σ_0 радиуса R , симметричная относительно оси x ; в дальнейшем устремим R к бесконечности. Площадь сечения вихревого следа плоскостью Σ_2 обозначим через S .

Основной целью настоящей работы является вычисление подъемной силы F_y и боковой силы F_z . Кроме того, получим выражение для силы сопротивления F_x , хотя законы затухания порождаемых ею возмущений уже известны¹. При определении сил разобьем интеграл (3.2) на два слагаемых: одно из них будет представлять ту часть F_i' сил, которую дает интегрирование тензора π_{ij} по площади следа, второе — вклад F_i'' от интегрирования функций, описывающих внешний поток. Очевидно, $F_i = F_i' + F_i''$.

¹ В работе [3] вывод формулы для F_x является ошибочным.

При вычислении F_i' в формуле (3.1) нужно учитывать только члены, связанные с механическим передвижением различных масс газа из одного места в другое и с действующими в нем силами давления. Подставим в правую часть равенства (3.2) безразмерные переменные (1.5), сохранив, чтобы избежать путаницы в дальнейшем, штрихи над ними. После простых выкладок находим величину

$$F_x' = -\rho_* a_*^2 l^2 \varepsilon' \iint_S v_x' dy' dz' \quad (3.4)$$

входящую в силу сопротивления. Принимая во внимание, что функция $v_x'(x', r')$ экспоненциально убывает при $r' \rightarrow \infty$ в рассматриваемом приближении интегрирование в (3.4) можно распространить на всю плоскость Σ_2 . Используя формулу (1.18), получим

$$F_x' = -\rho_* a_*^2 l^2 c_x \varepsilon' \quad (3.5)$$

Для величин F_y' и F_z' , входящих в подъемную и боковую силы, верны соотношения

$$F_y' = -\rho_* a_*^2 l^2 \varepsilon' \iint_S v_y' dy' dz', \quad F_z' = -\rho_* a_*^2 l^2 \varepsilon' \iint_S v_z' dy' dz'$$

Обращаясь к равенствам (1.19), видим, что интегрирование членов, обусловленных слагаемым $\text{grad } \Phi$ в представлении (1.11) для возмущенной скорости, дает в результате нуль. Только члены с $u(x', y', z')$ из (1.11) приводят к конечным вкладам в F_y' и F_z' . Переходя от интегралов по S к интегралам по Σ_2 и пренебрегая возникающей при этом ошибкой, имеем

$$F_y' = -\rho_* a_*^2 l^2 c_y \varepsilon', \quad F_z' = -\rho_* a_*^2 l^2 c_z \varepsilon' \quad (3.6)$$

В силу равенств (2.23) постоянная c_1 пропорциональна c_z , а постоянная c_2 пропорциональна c_y . При отсутствии подъемной и боковой сил все названные постоянные обращаются в нуль. В этом случае осевой симметрией обладает как движение газа в вихревом следе, так и течение во внешней по отношению к нему области пространства. Осесимметричная же часть возмущений связана только с силой сопротивления. Когда производится интегрирование функций внешнего потока по торцевым плоскостям $x = \text{const}$ при вычислении силы сопротивления в формуле (3.1) нужно учитывать не только «идеальную часть», но и слагаемые, возникающие из-за вязкого трения. Для определения этой силы теории первого приближения недостаточно, нужно знать поправки, которые дает теория второго приближения. Ее упрощение опирается на отмеченный выше факт, что параметры газа в области Z находятся по решению осесимметричной задачи и зависят только от координат x и r , а $\partial_\theta = \partial/\partial\theta = 0$.

Согласно указанной теории, развитой в работе [12], возмущения представляются в виде

$$\begin{aligned} v_x'' &= v_{x1}'' + \delta'' v_{x2}'' + \dots, & v_r'' &= v_{r1}'' + \delta'' v_{r2}'' + \dots \\ \rho'' &= \rho_1'' + \delta'' \rho_2'' + \dots, & p'' &= p_1'' + \delta'' p_2'' + \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

причем δ'' — дополнительный малый параметр, а функции $\rho_2''(x'', r'')$ и $p_2''(x'', r'')$ задаются через $v_{x1}''(x'', r'')$ и $v_{x2}''(x'', r'')$ посредством равенств

$$\rho'' = A^{-1} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{N_{Pr}''} \right)^2 \frac{\partial v_{x1}''}{\partial x''} - v_{x2}'', \quad p_2'' = \frac{\rho_* a_*^2}{p_*} \left[A^{-1} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{N_{Pr}''} \right) \frac{\partial v_{x1}''}{\partial x''} - v_{x2}'' \right]$$

$$A = \frac{\kappa}{N_{Pr}''} + \left(1 + \frac{\kappa - 2}{N_{Pr}''} \right) \left(1 + \frac{\kappa - 1}{N_{Pr}''} \right) \quad (3.8)$$

Функция $v_{x1}''(x'', r'')$ отличается, естественно, от рассматривавшейся в предыдущем параграфе и связанной с силами, которые действуют в плоскости yz ; эта функция была определена в работе [3]. Уточнение характеристик газа в области возмущенного движения позволяет установить зависимость между малыми параметрами [11]

$$\Delta'' = \varepsilon''^{1/4} (2m_*)^{1/4} A^{-1/4} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{N_{Pr}''} \right)^{1/2}, \quad \delta'' = \varepsilon''^{1/2} (2m_*)^{1/2} A^{1/2} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{N_{Pr}''} \right)^{-1}$$

$$\frac{1}{N_{Re}''} = \varepsilon''^{1/2} (2m_*)^{1/2} A^{-1/2}, \quad m_* = \frac{1}{2\rho_*^3 a_*^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_*^2} \right)_s \quad (3.9)$$

Несмотря на использование теории второго приближения, вкладом нелинейных членов в тензор π_{ij} можно пренебрегать.

Перейдем теперь в правой части равенства (3.2) к безразмерным переменным (2.1). Используя формулы (3.7) — (3.9), покажем прежде всего, что слагаемое F_x'' в силе сопротивления обращается в нуль. Как легко убедиться, входящий в F_x'' интеграл по цилиндрической поверхности Σ_0 стремится к нулю, когда ее радиус $R \rightarrow \infty$. Отметим сразу, что исчезающе малыми при $R \rightarrow \infty$ становятся и интегралы по Σ_0 , содержащиеся в формулах для подъемной и боковой сил. При суммировании членов с возмущениями давления и скорости в π_{xx} коэффициент перед функцией второго приближения $v_{x2}''(x'', r'')$ обращается в нуль, откуда

$$F_x'' = \rho_* a_*^2 L^2 \frac{\varepsilon''}{\Delta''^2} \left(\iint_{\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_2-S} \right) \left[\delta'' A^{-1} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{N_{Pr}''} \right) - \frac{1}{N_{Re}''} \right] \frac{\partial v_{x1}''}{\partial x''} dy'' dz''$$

Учитывая в последней формуле связь между малыми параметрами δ'' и $1/N_{Re}''$, видим, что заключенная в квадратные скобки разность двух членов тождественно равна нулю. Таким образом, справедливость равенства $F_x'' = 0$ доказана.

Та часть подъемной силы F_y'' , которая получается при интегрировании функций внешнего потока, может быть представлена как

$$F_y'' = \rho_* a_*^2 L^2 \frac{\varepsilon''}{\Delta''} \left(\iint_{\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_2-S} \right) v_y'' dy'' dz''$$

Чтобы упростить вычисления, заменим здесь интеграл по области $\Sigma_2 - S$ на интеграл по всей плоскости Σ_2 ; как легко показать, возникающая при этом ошибка не выходит за рамки рассматриваемого приближения. После несложных преобразований, основанных на равенстве

$$f(\xi) = -^{3/2} \xi^{-1} [g(\xi) - h(\xi)]$$

находим

$$F_y'' = -\pi \rho_* a_*^2 L^2 B_1 c_2 \frac{\varepsilon''}{\Delta''}, \quad F_z'' = -\pi \rho_* a_*^2 L^2 B_1 c_1 \frac{\varepsilon''}{\Delta''} \quad (3.10)$$

Здесь постоянная B_1 задается формулой (2.22).

По определению $F_i = F_i' + F_i''$. Так как $F_x'' = 0$, то равенство (3.5) дает полную силу сопротивления, действующую на тело в потоке дис-

сипирующего газа с критической скоростью на бесконечности. Происхождение этой силы объясняется той же причиной, что и в несжимаемой жидкости, а именно, оно связано с вытеснением x -компонента количества движения из следа за телом. Хотя во внешнем течении возмущения затухают достаточно медленно, их суммарный вклад в силу сопротивления равен нулю. При звуковой скорости обтекания волнового сопротивления не возникает, оно имеет место только при чисто сверхзвуковых скоростях полета [1,7]. Прямо противоположным образом тело обстоит с подъемной и боковой силами. Действительно, и F_y'' , и F_z'' отличны от нуля согласно (3.10). Поэтому образование подъемной и боковой сил обусловлено тем, что y - и z -компоненты количества движения уносятся на бесконечность не только через вихревой след, но и системой волн, которые расходятся от тела и распространяются во внешнем потоке. Часть этих сил имеет волновой характер уже при критической скорости набегающего потока.

При суммировании правых частей формул (3.6), (3.10) нужно учесть связь (2.23) между постоянными c_1 и c_z , c_2 и c_y . Выражая параметр Δ'' через ε'' при помощи первого соотношения (3.9), получим

$$F_y = -\rho_* a_*^2 l^2 c_y \varepsilon' \left[1 + \frac{1}{2} (2m_*)^{1/4} A^{-1/4} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{N_{Pr}''} \right)^{1/2} \frac{\varepsilon''^{5/4}}{\varepsilon'} \right] \quad (3.11)$$

$$F_z = -\rho_* a_*^2 l^2 c_z \varepsilon' \left[1 + \frac{1}{2} (2m_*)^{1/4} A^{-1/4} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{N_{Pr}''} \right)^{1/2} \frac{\varepsilon''^{5/4}}{\varepsilon'} \right]$$

Остается найти зависимость между параметрами ε' и ε'' , характеризующих величину возмущений внутри и вне спутного следа. Для этого проще всего воспользоваться уравнением неразрывности, записанном в интегральной форме (3.3). Оставим радиус R цилиндрической поверхности Σ_0 фиксированным, а плоскость Σ_1 отодвинем на бесконечность вверх по потоку. В согласии с (1.21) примем во внимание, что из следа может быть вытеснена конечная масса газа, которая задается постоянной c_p . Окончательно имеем.

$$c_x + c_p + 2\pi B_2 \left(\frac{L}{l} \right)^2 \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = 0, \quad B_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi) d\xi \quad (3.12)$$

с функцией [3]

$$g_1 = 2 \cdot 2^{1/3} b_3 \left[\eta^{1/3} \Phi \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}; \eta \right) - \frac{\Gamma^2(1/3)}{6\Gamma^2(2/3)} \Phi \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \eta \right) \right]$$

В расчетах принималось, что коэффициент $b_3 = -2 \cdot 2^{1/3} \Gamma(2/3) [3\Gamma(1/3)]^{-1}$, постоянная B_2 в них получилась равной 2,002.

Как показывает первая из формул (3.12), отношение $\varepsilon''/\varepsilon'$ малых параметров будет порядка единицы. Кроме того, эта формула позволяет заключить, что величина возмущений во внешнем потоке может меняться за счет обмена теплом между обтекаемым телом и окружающим газом. При $c_p < 0$ из следа происходит вытеснение конечной массы вещества, обусловленное молекулярной передачей тепла от тела к пограничному слою. Этот процесс никак не связан с диссипацией энергии вязкими

напряжениями. Наоборот, при $c_p > 0$ вслед за телом «засасывается» некоторое количество газа из внешнего потока. Что касается постоянной c_x , то она всегда отрицательна, так как в вихревом следе должна быть отрицательная скорость v_x' . При $c_p = -c_x$ воздействие сопротивления в рассматриваемом приближении вообще не приводит к возмущению внешнего течения. Такого явления не может существовать в несжимаемой жидкости, так как в ней «дефицит» расхода через сечение следа пропорционален величине x -компонента импульса, вытесненного из указанной области [1]. Если среда сжимаема, то рассмотренное явление имеет общий характер и будет проявляться при любых скоростях полета. Заметный эффект получится, однако, только тогда, когда теплообмен в пограничном слое совершается достаточно интенсивно.

Приведенные результаты можно вывести более коротким путем, если во всех вычислениях радиус R цилиндрической поверхности Σ_0 зафиксировать, а плоскость Σ_1 устремить к бесконечности, как это было сделано при рассмотрении уравнения неразрывности (3.3). Такой путь не нуждается, в частности, в привлечении теории второго приближения. Однако во всех экспериментальных работах по траверсированию следа, ведущих свое начало от Бетца [12], используются две контрольные плоскости $x = \text{const}$. Поэтому представлялось целесообразным показать в явном виде, что несмотря на относительно большую величину возмущений внешнего потока их вклад в сопротивление тела равен нулю и при критической скорости частиц на бесконечности.

Сравним в заключение полученные результаты с теми, которые были установлены в работе [3]. Если течение обладает осевой симметрией или на тело действует только сила сопротивления, то разность $M - 1$ (M — число Маха) убывает пропорционально $r^{-4/3}$, а угол наклона ω вектора скорости к оси x — пропорционально $r^{-5/3}$ при удалении на бесконечность вдоль линий $\xi = \text{const}$. Создание подъемной и боковой сил порождает дополнительные возмущения, для которых при тех же условиях $|M - 1| \sim r^{-5/3}$, а $\omega \sim r^{-2}$ во внешнем потоке. Таким образом, сопротивление тела приводит к большим возмущениям равномерного движения газа, чем силы, действующие в поперечной плоскости, если рассматриваемое движение происходит с критической скоростью.

Поступила 14 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1954.
2. Finn R. On the Stokes Paradox and related questions. Nonlinear Problems, edit. by R. E. Langer. Madison. Univ. Wisconsin Press, 1963.
3. Рыжов О. С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Изд. 2-е, М., «Наука», 1964.
5. Tollmien W. Grenzschnittheorie. Handbuch der Experimentalphysik. Bd. 4, Teil 1, Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft, 1931.
6. Taylor G. I. The Conditions Necessary for Discontinuous Motion in Gases. Proc. Roy. Soc., ser. A, 1910, vol. 84, No. 571, p. 371—377.
7. Хислет М. А., Ломакс Г. Теория малых возмущений при сверхзвуковых и транзвуковых скоростях потока. — В сб.: Общая теория аэродинамики больших скоростей. Под ред. У. Р. Сирса. М., Воениздат, 1962.
8. Карслоу Г. С. Теория теплопроводности. М. — Л., Гостехиздат, 1947.
9. Холдер Д. У., Мак-Фэйл Д. С., Томпсон Дж. С. Методы экспериментального исследования. — В сб.: Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Под ред. Л. Хоурта, т. 2, М., Изд-во иностр. лит., 1956.
10. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions, vol. 1, N.—Y.—Toronto — L., McGraw — Hill, 1953.
11. Десперов В. Н., Рыжов О. С. Второе приближение в асимптотической теории обтекания тел вращения звуковым потоком реального газа. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
12. Betz A. Ein Verfahren zur direkten Ermittlung des Profilwiderstandes. Z. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Jg, 1925, 16, Ht 3.