

## ПЛОСКИЕ ТРАНСЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С ПРЯМЫМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

Г. Д. Севостьянов

(Саратов)

В работе рассматриваются два трансзвуковых течения газа: обтекание профиля звуковой свободной струей и течение в симметричном сопле Лавалья, в которых имеется слабый скачок уплотнения. Исследование этих течений проводится на плоскости  $\varphi\psi$ , при этом вблизи границы звуковой струи и около оси сопла скачок приближенно считается прямым; строятся точные неавтомодельные решения  $\theta$ ,  $\eta$  нелинейных околосвуковых уравнений С. В. Фальковича, соответствующие указанным течениям с прямым скачком уплотнения.

1. Рассмотрим плоские трансзвуковые течения идеального газа, содержащие скачок уплотнения. Если скачок слабый, скорости в потоке мало отличаются от критической скорости звука, то, пренебрегая завихренностью потока, получим, что переменные Ф. И. Франкля [1]  $\theta$ ,  $\eta$  будут удовлетворять системе [2]

$$\frac{\partial \eta}{\partial \psi} = -B_0 \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = B_0 \eta \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \quad B_0 = (k+1)^{1/2} \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad k = \frac{c_p}{c_v} \quad (1.1)$$

Здесь  $\varphi$  — потенциал скорости,  $\psi$  — функция тока. Скачок будем считать прямым, т. е. все линии тока пересекают его под прямым углом. Выбрав начало системы координат  $xu$  в некоторой характерной точке  $A$  скачка и направив ось  $x$  по направлению скорости, будем иметь [3] на прямом скачке  $\theta \equiv 0$ ,  $\varphi \equiv 0$ .

Пусть перед скачком  $\varphi > 0$ , за ним  $\varphi < 0$ ,  $\psi = 0$  на линии тока, проходящей через характерную точку  $A$  ( $x = y = 0$ ).

Для слабого околосвукового прямого скачка должны выполняться условия [3]

$$\theta(0, \psi) = 0, \quad \eta(+0, \psi) = -\eta(-0, \psi) \quad (1.2)$$

Решение системы (1.1), удовлетворяющее первому условию (1.2), можно искать в виде степенных рядов [4]

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} z_n'(\psi) \frac{\varphi^{2n+1}}{2n+1}, \quad \eta = -B_0 \sum_{n=0}^{\infty} z_n(\psi) \varphi^{2n} \quad (1.3)$$

$$z_n''(\psi) = (2n+1) B_0^3 \sum_{k=0}^{[n]} (2n-2k+2) z_k(\psi) z_{n-k+1}(\psi) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

Из второго условия (1.2) следует:  $z_0(\psi) \neq 0$ . Построим точное решение системы (1.1), оставив в рядах (1.3) два первых члена (если сохранить только первый член, то получим простое автомодельное решение системы (1.1)).

Тогда перед скачком уплотнения решение имеет вид

$$\theta = [z'_0(\psi) + \frac{1}{3} z'_1(\psi)\varphi^2]\varphi, \quad \eta = -B_0[z_0(\psi) + z_1(\psi)\varphi^2] \quad (\varphi \geq 0) \quad (1.4)$$

при этом функции  $z_0(\psi)$  и  $z_1(\psi)$  удовлетворяют уравнениям

$$z_1'' = 6B_0^3 z_1^2, \quad z_0'' = 2B_0^3 z_1 z_0 \quad (1.5)$$

За скачком уплотнения решение (1.1) имеет вид (1.6)

$$\theta = [z'_0(\psi) - \frac{1}{3} z'_1(\psi)\varphi^2](-\varphi), \quad \eta = B_0[z_0(\psi) - z_1(\psi)\varphi^2] \quad (\varphi \leq 0)$$

В (1.4) и (1.6) функции  $z_0$  и  $z_1$  одни и те же, что следует из (1.2) и (1.5), при этом  $z_0(\psi) \geq 0$ .

Решение системы (1.1) вида (1.4) построено в работе Томотика и Тамады [5] и применено для исследования безударного трансзвукового течения в симметричном сопле Лавала с двумя сужениями. Здесь это решение применяется к течениям со скачком уплотнения. Заметим, что если в (1.4) положить  $z_0 \equiv 0$  (скачка нет), то получим решение Л. В. Овсянникова [4], описывающее течение газа с прямой звуковой линией.

После построения решения  $\theta, \eta$  системы (1.1) переход с плоскости  $\varphi, \psi$  на плоскость течения  $x, y$  совершается при помощи формул

$$dx = \frac{\cos \theta}{v} d\varphi - \frac{\rho_0 \sin \theta}{\rho v} d\psi, \quad dy = \frac{\sin \theta}{v} d\varphi + \frac{\rho_0 \cos \theta}{\rho v} d\psi \quad (1.7)$$

при этом для газа Трикоми, движение которого подчиняется системе (1.1), имеют место соотношения [6]

$$\frac{\rho_0}{\rho v} = B_0 \frac{d}{d\eta} \frac{1}{v}, \quad \frac{d}{d\eta} \frac{\rho_0}{\rho v} = B_0 \frac{\eta}{v}$$

Отсюда следует, что функция  $1/v = f(\eta)$  удовлетворяет уравнению Эйри [6,7]

$$f'' - \eta f = 0$$

$$a_* f(0) = 1, \quad a_* f'(0) = (k+1)^{-1/2}$$

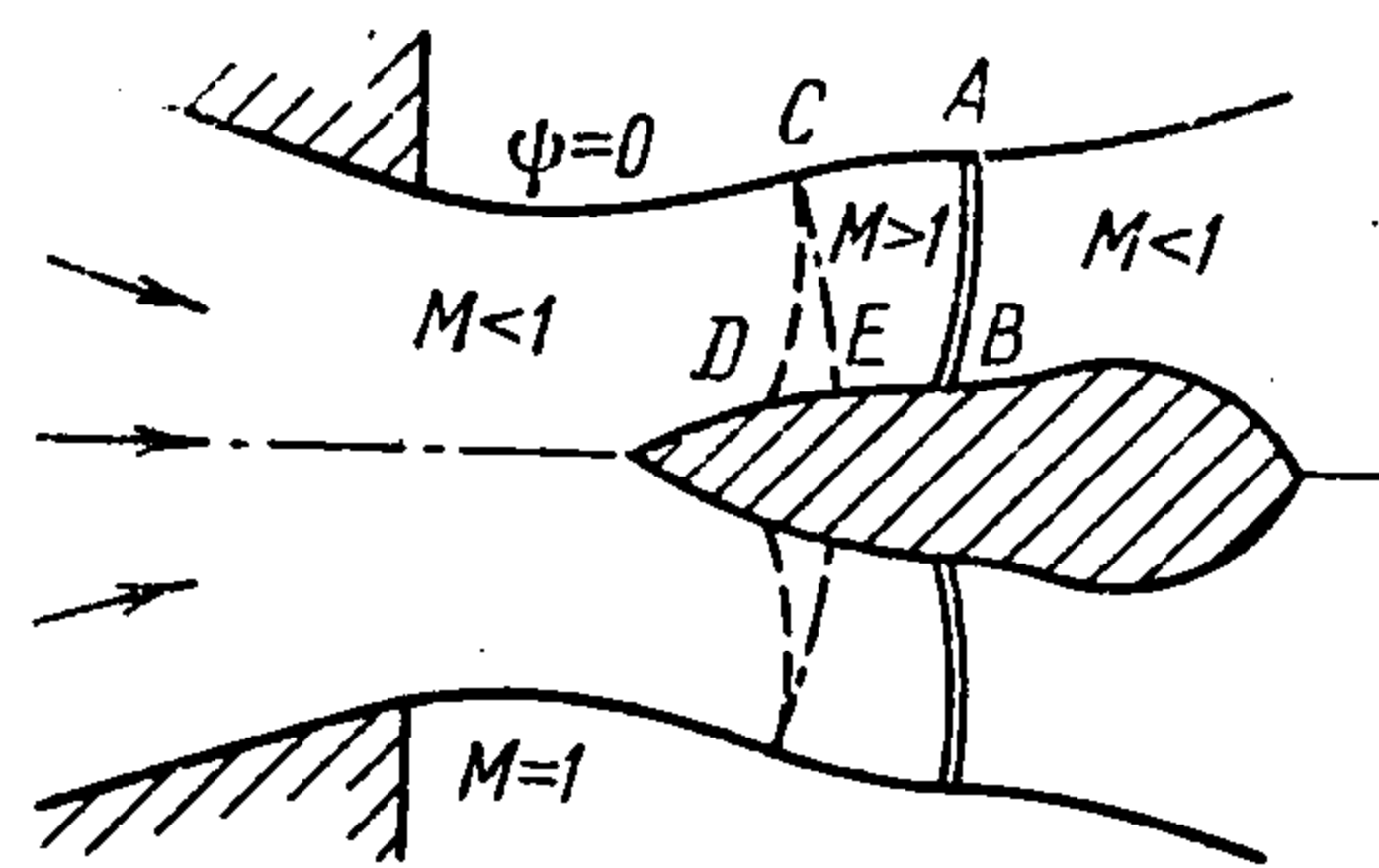
Здесь в начальных условиях  $a_*$  — критическая скорость звука.

Следовательно,  $v$  и  $\rho/\rho_0$  можно выразить [6,7] через функции Эйри  $Ai(\eta)$  и  $Bi(\eta)$ .

2. Рассмотрим ударное обтекание профиля звуковой струей газа. Пусть профиль обтекается плоской звуковой струей идеального газа, вытекающей из щели в сосуде (фиг. 1).

На свободной границе струи скорость звуковая ( $M = 1, \eta = 0$ ), перед звуковой линией  $CD$  в струе течение дозвуковое, за ней струя становится сверхзвуковой.

Безвихревое симметричное течение газа вдали от профиля, помещенного в достаточно широкую звуковую струю, исследовано в [8] до предельной характеристики  $CE$ , где показано, что вблизи точки  $C$  течение



Фиг. 1

описывается решением Р. Г. Баранцева ([<sup>9</sup>], гл. IV), поэтому  $C$  является точкой перегиба границы струи. За точкой  $C$  угол наклона границы струи к ее оси монотонно уменьшается; торможение сверхзвуковой струи происходит при помощи скачков уплотнения (на фиг. 1 изображен первый из них —  $AB$ ).

Исследуем течение вблизи границы струи  $CA$ , считая там скачок прямым. Пусть  $\psi = 0$  на  $CA$ , а внутри струи  $\psi > 0$ .

К условиям (1.2) надо добавить условие звуковой свободной границы

$$\eta(\varphi, 0) = 0 \quad (2.1)$$

Поэтому из (1.4) и (1.6) получим

$$z_0(0) = 0, \quad z_1(0) = 0, \quad z_0(\psi) > 0 \quad (\psi > 0) \quad (2.2)$$

Из (1.5) и (2.2) следует

$$(z_1')^2 = 4B_0^3 z_1^3 + [z_1'(0)]^2$$

и  $z_1(\psi)$  можно выразить [<sup>10</sup>] через эллиптическую функцию Вейерштрасса  $\wp(u; g_2, g_3)$  с параметрами  $g_2 = 0$ ,  $g_3 = -4$ ,  $e_2 = -1$

$$z_1(\psi) = N^2 B_0^{-3} \wp(u), \quad \wp(u) = \wp(u; 0, -4)$$

$$z_1'(\psi) = (N/B_0)^3 \wp'(u), \quad u = N\psi + \alpha \quad (0 < u < 2\omega, N > 0) \quad (2.3)$$

Функция  $\wp(u)$  удовлетворяет уравнению  $(\wp')^2 = 4\wp^3 + 4$ . Из (2.2) следует, что  $\alpha$  — нуль функции  $\wp(u)$ .

Так как  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 < 0$ ,  $e_2 < 0$ , то в основном параллелограмме  $\wp(u; 0, -4)$  имеет нули (два) только при действительных значениях  $u$ , при которых сама функция также действительная ([<sup>11</sup>], § 86). Поэтому в (2.3)  $N$  и  $\alpha$  — действительные постоянные (в силу четности  $\wp(u)$  считаем  $N > 0$ ),  $0 < u < 2\omega$ , где  $\omega$  — действительный полупериод  $\wp(u)$  (см. [<sup>11</sup>]):

$$\omega = \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{1+x^3}} = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}} \frac{\Gamma^3(1/3)}{4\pi} \approx 2.1033 \quad (2.4)$$

В основном промежутке  $(0, 2\omega)$  функция  $\wp(u)$  симметрична относительно точки  $u = \omega$ , где  $\wp(\omega) = -1$ . Так как  $\wp(u) = 2^{2/3} \wp(x; 0, -1)$ ,  $x = 2^{1/3} u$ , то можно использовать график функции  $\wp(x; 0, -1)$  из [<sup>5</sup>]. Обозначим нули  $\alpha$  функции  $\wp(u)$  через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  ( $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 2\omega$ ).

Имеем

$$\alpha_1 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{1+x^3}} \quad (2.5)$$

Выразив интегралы в (2.4) и (2.5) через гамма-функцию ([<sup>10</sup>], стр. 423, 424), получим

$$\alpha_1 = 2/3 \omega, \quad \alpha_2 = 4/3 \omega \quad (2.6)$$

т. е. нули  $\wp(u)$  делят интервал  $(0, 2\omega)$  на три равные части [<sup>4,5,9</sup>], при этом  $\wp'(\alpha_1) = -2$ ,  $\wp'(\alpha_2) = 2$ .

Приведем несколько частных значений этой функции

$$\wp\left(\frac{\omega}{3}\right) = 2, \quad \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{3} - 1, \quad \wp\left(\frac{2\omega}{3}\right) = 0, \quad \wp(\omega) = -1$$

Перейдем к определению функции  $z_0(\psi)$ . Из (1.5), (2.2), (2.3) следует, что  $z_0(\psi) = R(u)$  ( $u = N\psi + \alpha$ ) удовлетворяет линейному уравнению

$$R''(u) = 2\wp(u)R(u) \quad (\alpha \leq u < 2\omega) \quad (2.7)$$

с начальными условиями

$$R(\alpha) = 0, \quad R'(\alpha) > 0 \quad (2.8)$$

Легко проверить, что общее решение (2.7) равно [5]

$$R(u) = A_1[\wp'(u) + 2]^{1/2} + A_2[\wp'(u) - 2]^{1/2} \quad (2.9)$$

Отсюда можно получить два решения, соответствующие нулям  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  функции  $\wp(u)$  и удовлетворяющие условиям (2.2), (2.8):

первое ( $\alpha = \alpha_1$ )

$$z_0(\psi) = R(u) = N^2 B_0^{-3} \varphi_c^2 [\wp'(u) + 2]^{1/2} \quad (\alpha_1 \leq u < 2\omega) \quad (2.10)$$

$$z_0'(\psi) = NR'(u) = 2^{-1/2} (N/B_0)^3 |2 - \wp'(u)|^{1/2} \varphi_c^2 \quad (u = N\psi + \alpha_1)$$

второе ( $\alpha = \alpha_2$ )

$$z_0(\psi) = N^2 B_0^{-3} \varphi_c^2 [\wp'(u) - 2]^{1/2} \quad (\alpha_2 \leq u < 2\omega) \quad (2.11)$$

$$z_0'(\psi) = 2^{-1/2} (N/B_0)^3 \varphi_c^2 [\wp'(u) + 2]^{1/2} \quad (u = N\psi + \alpha_2)$$

Здесь  $\varphi_c$  — некоторая постоянная.

Построим решение (1.1), соответствующее течению на фиг. 1 вблизи границы  $CA$ . Чтобы все линии тока пересекали перед скачком звуковую линию  $\eta = 0$ , надо в (1.4), где  $z_0(\psi) \geq 0$ , положить  $z_1(\psi) \leq 0$ , поэтому из (2.3) следует:

$$\wp(u) \leq 0, \quad \alpha = \alpha_1 \quad (\alpha_1 \leq u < \alpha_2)$$

Решение системы для такого течения имеет вид

$$\theta = (N/B_0)^3 [2^{-1/2} \varphi_c^2 |2 - \wp'(u)|^{1/2} |\varphi| + 1/3 \varphi^3 \wp'(u)], \quad (u = N\psi + \alpha_1) \quad (2.12)$$

$$\eta = - (N/B_0)^2 \{ \varphi_c^2 [\wp'(u) + 2]^{1/2} \operatorname{sgn} \varphi + \varphi^2 \wp(u) \} \quad (0 \leq N\psi < 2/3\omega)$$

Звуковая линия перед скачком имеет уравнение

$$\varphi = 2^{1/2} \varphi_c [2 - \wp'(u)]^{-1/2} \quad (\alpha_1 \leq u < \alpha_2, \varphi_c > 0) \quad (2.13)$$

и пересекает звуковую границу в точке  $C$  (где  $\varphi = \varphi_c > 0$ ). За скачком течение, соответствующее решению (2.12), всюду дозвуковое. В потоке имеются две линии  $\theta = 0$ , одна перед скачком

$$\varphi = 2^{-1/2} \sqrt{3} \varphi_c |2 - \wp'(u)|^{1/2} (-\wp')^{-1/2} \quad (\alpha_1 \leq u < \omega, 0 \leq N\psi < 1/3\omega)$$

другая за скачком

$$\varphi = -2^{-1/2} \sqrt{3} \varphi_c |2 - \wp'(u)|^{1/2} (\wp')^{-1/2} \quad (\omega < u < \alpha_2, 1/3\omega < N\psi < 2/3\omega)$$

Поведение решения (2.12) на плоскости  $\varphi\psi$  показано на фиг. 2. Переход на плоскость потока совершается при помощи формул (1.7), течение газа показано на фиг. 3, где за твердую стенку принята линия тока  $N\psi = c$ ,  $1/3 \omega < c < 2/3 \omega$ . Вблизи точки  $A$  граница струи имеет уравнение

$$y = (N/B_0)^3 a_* \varphi_c^2 x^2 \operatorname{sgn} x$$

Появление скачка  $AB$  в струе на фиг. 3 вызвано отсутствием выпуклости поверхности профиля в сверхзвуковой области (см. например, [12, 13], где изучаются течения в местной сверхзвуковой зоне на профиле).

Исследуем решение (2.12) вблизи  $C$  — точки пересечения звуковой линии  $CD$  с звуковой границей  $FA$ . Для этого разложим (2.12) в ряды по степеням  $u - \alpha_1 = N\psi$  и  $\varphi - \varphi_c = \bar{\varphi}$ , учитывая, что в точке  $C$

$$\psi = 0, \quad \bar{\theta} = 0 \quad (\bar{\theta} = \theta - \theta_c, \quad \theta_c = 4/3 (N/B_0)^3 \varphi_c^3)$$

Так как при  $u \approx \alpha_1$

$$\wp(u) = -2(u - \alpha_1) + 2(u - \alpha_1)^4 - 8/7 (u - \alpha_1)^7 + \dots$$

то, оставляя в разложении (2.12) главные члены, получим решение системы (1.1) вблизи точки пересечения звуковых линий [9], опуская черту над  $\bar{\varphi}$  и  $\bar{\theta}$ :

$$\theta = -a\varphi^2 + 4/3 B_0^3 a^2 \varphi \psi^3 - 1/9 B_0^6 a^3 \psi^6$$

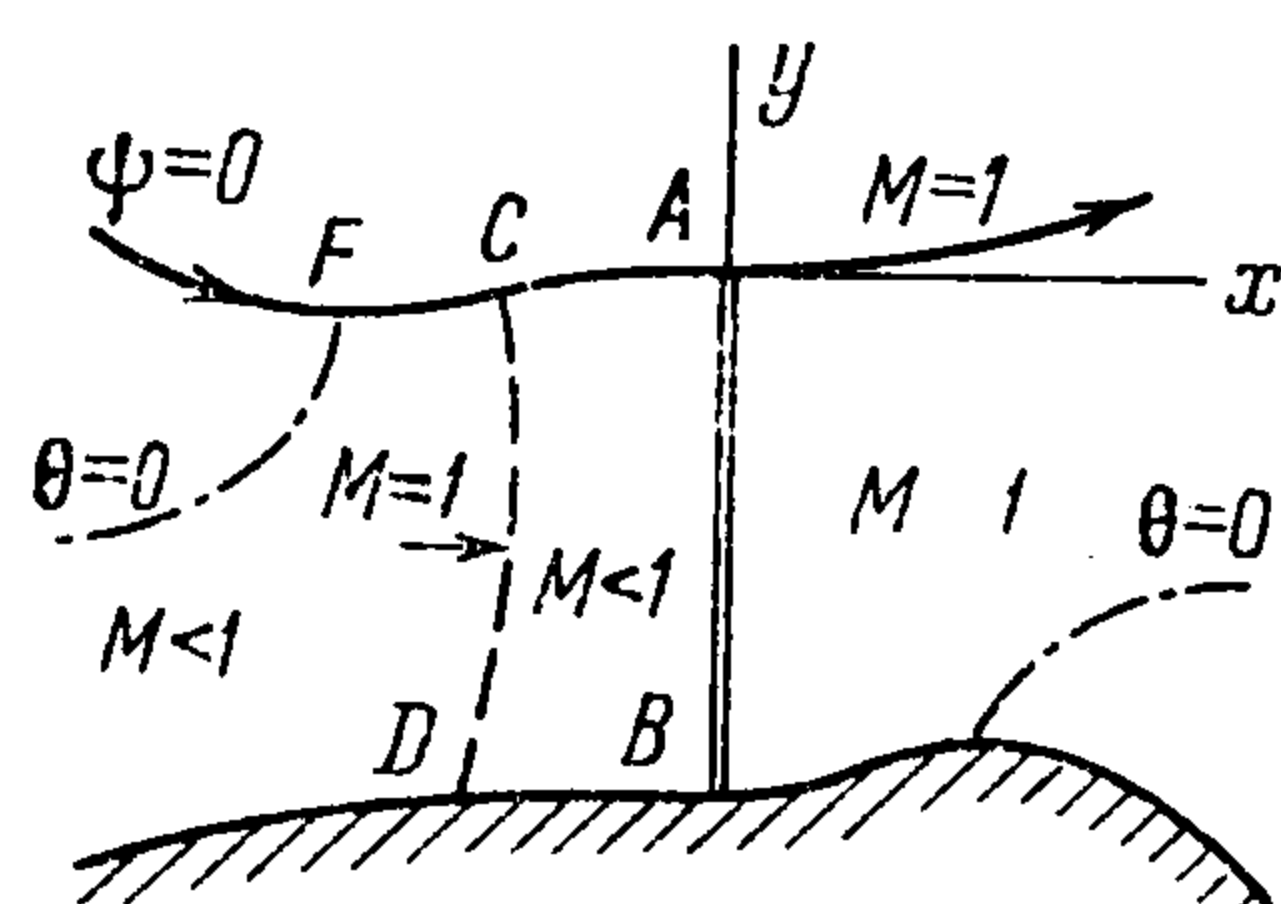
$$\eta = 2B_0 a \varphi \psi - 1/3 B_0^4 a^2 \psi^4$$

$$a = 2(N/B_0)^3 \varphi_c \quad (2.14)$$

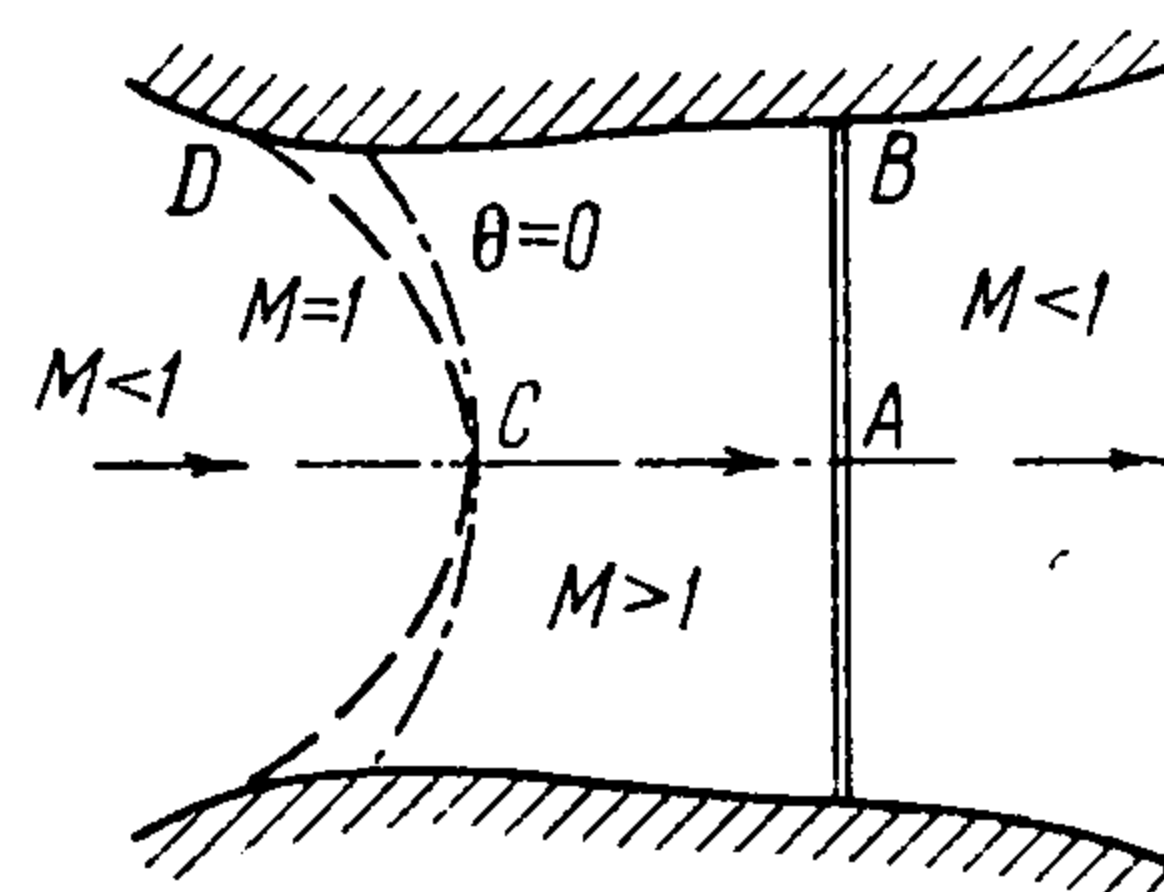
Таким образом, неавтономное решение (2.12) системы (1.1) описывает трансзвуковое течение идеального газа вблизи границы  $CA$  звуковой струи, обтекающей профиль (фиг. 1), включая скачок уплотнения.

Если в (2.12) величина  $\varphi_c \rightarrow 0$ , то звуковая линия  $CD$  (фиг. 3) приближается к скачку  $AB$ , интенсивность которого уменьшается, и в пределе при  $\varphi_c = 0$  решение (2.12) переходит в решение Л. В. Овсянникова [4], описывающее дозвуковое течение с прямой звуковой линией.

**3. Движение газа в сопле Лавала со скачком уплотнения в выхлопной части.** Аналогично можно построить неавтономное решение системы (1.1), описывающее трансзвуковое течение газа в симметричном сопле



Фиг. 3



Фиг. 4

Лавала, содержащем слабый скачок уплотнения  $AB$  в выхлопной части (фиг. 4). Скачок вблизи оси сопла можно считать прямым.

Пусть на оси сопла  $\psi = 0$ , ниже оси  $\psi > 0$ . Из (1.4) и (1.6) следует:

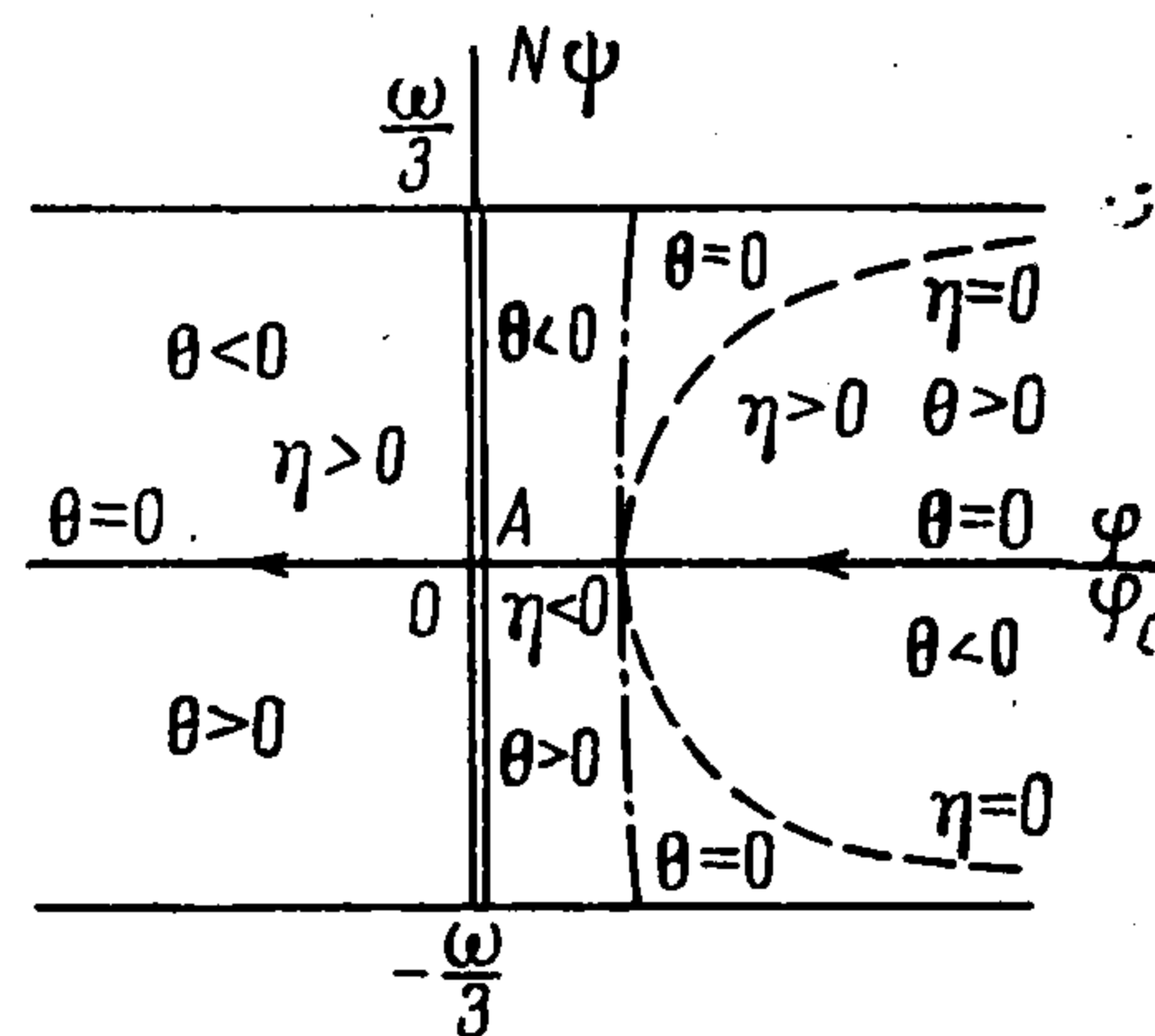
$$z'_0(0) = 0, \quad z'_1(0) = 0 \quad (3.1)$$

в силу четности функций  $z_0(\psi) \geq 0$  и  $z_1(\psi)$ , описывающих симметричное течение газа. Из условия, что все линии тока пересекают перед скачком звуковую линию, получим  $z_1(\psi) < 0$  в (1.4). Интегрируя (1.5) при условиях (3.1), найдем, что

$$[(z'_1)^2 = 4 B_0^3 z_1^3 - 4 B_0^3 [z_1(0)]^3$$

Поэтому  $z_1(\psi)$  можно выразить через функцию  $\mathcal{G}(u) = \mathcal{G}(u; 0, -4)$ , которая принимает отрицательные значения при  $\alpha_1 < u < \alpha_2$  (см. п. 2)

$$z_1(\psi) = (N^2/B_0^3) \mathcal{G}(u), \quad z_1'(\psi) = (N/B_0)^3 \mathcal{G}'(u) \\ (u = N\psi + \omega, N > 0, \alpha_1 < u < \alpha_2) \quad (3.2)$$



Фиг. 5

Четное решение  $z_0(\psi) = R_0(u) \geq 0$  ( $u = N\psi + \omega$ ), удовлетворяющее уравнению (2.7), равно [5]

$$z_0(\psi) = R_0(u) = 2^{-1/3} (N^2/B_0^3) \varphi_c^2 \{[\mathcal{G}'(u) + 2]^{1/3} + [2 - \mathcal{G}'(u)]^{1/3}\} \\ z_0'(\psi) = NR_0'(u) = 2^{-5/3} (N/B_0)^3 \varphi_c^2 \{[2 - \mathcal{G}'(u)]^{2/3} - [2 + \mathcal{G}'(u)]^{2/3}\} \quad (3.3) \\ (\alpha_1 < u < \alpha_2) \quad (u = N\psi + \omega)$$

Постоянную  $\varphi_c$  в (3.3) определим ниже.

Решение системы (1.1), соответствующее ударному трансзвуковому течению в сопле Лавалья, имеет вид

$$\theta = (N/B_0)^3 \{2^{-2/3} \varphi_c^2 [(2 - \mathcal{G}')^{2/3} - (2 + \mathcal{G}')^{2/3}] |\varphi| + 1/3 \varphi^3 \mathcal{G}'\} \\ \eta = -(N/B_0)^2 \{2^{-1/3} \varphi_c^2 [(2 + \mathcal{G}')^{1/3} + (2 - \mathcal{G}')^{1/3}] \operatorname{sgn} \varphi + \varphi^2 \mathcal{G}'\} \quad (3.4) \\ (u = N\psi + \omega) \quad (|N\psi| < 1/3 \omega)$$

Это решение (до прямой  $AB$  на фиг. 4) построено в [5], однако за прямую  $AB$  решение в этой работе продолжается как непрерывное, симметричное относительно  $AB$ , при этом физически нереально непрерывное сжатие сверхзвукового потока во втором сужении сопла.

Если считать  $AB$  скачком уплотнения и продолжить решение за него, то приходим к течению в сопле с одним горлом (фиг. 4) и выхлопной частью, стенки которой имеют точки перегиба.

Поведение решения (3.4) на плоскости  $\varphi\psi$  показано на фиг. 5.

Звуковая линия перед скачком имеет уравнение

$$\varphi = 2^{-2/3} \varphi_c [(2 + \mathcal{G}')^{1/3} + (2 - \mathcal{G}')^{1/3}]^{1/2} (-\mathcal{G}')^{-1/2} \quad (3.5) \\ (\alpha_1 < u < \alpha_2, u = N\psi + \omega)$$

и пересекает ось сопла в центре  $C$  (где  $\varphi = \varphi_c > 0$ ). Перед скачком имеется также линия  $\theta = 0$ , проходящая через  $C$ .

При  $\varphi_c = 0$  решение (3.4) переходит в решение, описывающее дозвуковое симметричное течение с прямой звуковой линией [4].

Если разложить решение (3.4) вблизи точки  $C$  (где  $\psi = 0$ ,  $\varphi = \varphi_c > 0$ ,  $\eta = \theta = 0$ ) по степеням  $u - \omega = N\psi$  и  $\bar{\varphi} = \varphi - \varphi_c$  и оставить в разло-

жении главные члены, то учитывая, что

$$\wp(u) = -1 + 3(u - \omega)^2 - 3(u - \omega)^4 + \dots \quad \text{при } u \approx \omega$$

и опуская черту над  $\bar{\varphi}$ , получим решение (1.1), найденное С. В. Фальковичем [2] и описывающее трансзвуковое течение вблизи центра сопла  $C$ :

$$\begin{aligned} \theta &= B_0 a^2 \varphi \psi - 1/6 B_0^3 a^3 \psi^3, & \eta &= a\varphi - 1/2 B_0^2 a^2 \psi^2 \\ a &= 2(N/B_0)^2 \varphi_c \end{aligned} \quad (3.6)$$

Решение (3.4) описывает трансзвуковое течение вблизи оси сопла Лавая, в выходной части которого имеется скачок уплотнения. Аналогичное вязкое течение в сопле Лавая со скачком исследовано недавно в [14]. Если интенсивность кривого скачка на оси сопла равна нулю, то скачок возникает в центре сопла, вблизи которого течение можно исследовать при помощи автомодельных решений околозвуковых уравнений [15].

Если исключить в (2.12) и (3.4) потенциал  $\varphi$ , то можно построить соответствующие течениям решения уравнения Трикоми  $\eta\psi_{\theta\theta} + \psi_{\eta\eta} = 0$  на плоскости  $\theta\eta$ .

Можно рассмотреть и другие трансзвуковые течения со скачком уплотнения. Например, используя решение (2.11), можно исследовать ударное обтекание твердой стенки сверхзвуковой струей со звуковой свободной границей.

Поступила 30 IV 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавая. Изв. АН СССР, сер. матем., 1945, т. 9, № 5.
2. Фалькович С. В. К теории сопла Лавая. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
3. Франкль Ф. И. Пример околозвукового течения газа с областью сверхзвуковых скоростей, ограниченной вниз по течению скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения. ПММ, 1955, т. 19, вып. 4.
4. Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluids. Part 1. Quart. Appl. Math., 1950, vol. 7, No. 4. (Русск. перев.: Механика, Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1951, № 4).
5. Фалькович С. В. Об одном классе сопел Лавая. ПММ, 1947, т. 11, вып. 2.
6. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.
7. Севостьянов Г. Д. Обтекание профиля звуковой свободной струей газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
8. Баранцев Р. Г. Лекции по трансзвуковой газодинамике. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1965.
9. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Изд. 2, ч. 2. Физматгиз, 1963.
10. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М. — Л., Гостехиздат и номогр., 1936.
11. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
12. Mises R. von. Discussion on transonic flow. Communs Pure and Appl. Math., 1954, vol. 7, N. 1.
13. Sichel M. The effect of longitudinal viscosity on the flow at a nozzle throat. J. Fluid Mech, 1966, vol. 25, pt. 4.
14. Рыжов О. С. Образование ударных волн в соплах Лавая. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.