Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р. З. Хасьминский

(Москва)

Проблема распространения теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению на стохастические системы впервые рассматривалась в работе [1]. При некоторых специальных предположениях о характере случайного воздействия в этой работе доказано, что полная система устойчива в некотором вероятностном смысле, если линеаризованная система экспоненциально устойчива в среднеквадратическом. Аналогичный результат был установлен в [2,3] для процессов, описываемых системой стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито. В [4] было показано, что для справедливости теоремы об устойчивости по первому приближению достаточно, чтобы у линеаризованной системы были экспоненциально устойчивы моменты некоторой положительной степени p. В настоящей работе показано, что моменты достаточно малой положительной степени устойчивы всегда, когда линейная система асимптотически устойчива по вероятности равномерно относительно t. Приведены также достаточные условия справедливости теоремы о неустойчивости по первому приближению.

1. Как и в [2-4], в настоящей работе будет изучаться система стохастических уравнений Ито (см., например, [5])

$$dX(t) = b(t, X)\,dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, X)\,d\xi_r(t) \tag{1.1}$$

Здесь $X(t)$, $b(t, x)$, $\sigma_r(t, x)$ — векторы из l-мерного эвклидова пространства E_l, $\xi_r(t)$ — независимые винеровские процессы. Будем обозначать $X^{s,x}(t)$ решение этой системы, удовлетворяющее начальному условию $X^{s,x}(s) = x$.

Наряду с (1.1), будет рассматриваться линейная стохастическая система

$$dX(t) = BX\,dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r X\,d\xi_r(t) \tag{1.2}$$

причем сначала будет предполагаться, что квадратные матрицы l-го порядка B, $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ постоянны.

Теорема 1.1. Если для решения линейной стохастической системы с постоянными коэффициентами (1.2) справедливо соотношение

$$P\{|X^{s,x}(t)| \to 0\,(t \to \infty)\} = 1 \tag{1.3}$$

то эта система экспоненциально p-устойчива при всех достаточно малых положительных p.

Доказательство теоремы будет выведено из трех лемм.

Лемма 1.1. Если выполнено условие (1.3), то найдется положительное число p такое, что

$$\sup_{|x|=1} M\{\sup_{t>s} |X^{s,x}(t)|^p\} < \infty \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть $Xi(t)$ — решение системы (1.2), определяемое начальным условием $X_i^{(j)}(s) = \delta_i^j$, где δ_i^j — символ Кронекера. Тогда, в силу линейности уравнения (1.2) и единственности его решения, получим соотношение

$$X^{s,x}(t) = \sum_{i=1}^{l} x_i X_i(t)$$

где $x_1, \ldots, x_l$ — координаты вектора x.

Из условия (1.3) вытекает, что $P\{\max_i \sup_{t>s} |X_i(t)| < \infty\} = 1$. Поэтому для некоторой постоянной $k > 0$

$$P\{\max_i \sup_{t>s} |X_i(t)| < k\} \geqslant 1/2 \tag{1.5}$$

Отсюда и из очевидного неравенства

$$\sup_{t>s} |X^{s,x}(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{l} |x_i| \sup_{t>s} |X_i(t)| \leqslant l\,|x| \max_i \sup_{t>s} |X_i(t)|$$

следует, что

$$\sup_{|x|<(kl)^{-1}} P\{\sup_{t>s} |X^{s,x}(t)| > 1\} \leqslant 1/2$$

Далее, в силу линейности системы (1.2)

$$X^{s,\gamma x}(t) = \gamma X^{s,x}(t) \tag{1.6}$$

и потому при любом k для $\alpha = \log_2(kl)$ получим соотношение

$$\sup_{|x|<2^{k\alpha}} P\{\sup_{t>s} |X^{s,x}(t)| > 2^{\alpha(k+1)}\} \leqslant 1/2 \tag{1.7}$$

Так как марковский процесс, определяемый системой (1.2), однороден по времени, то вероятность, стоящая в левой части неравенства (1.7), не зависит от s.

Обозначим $\tau^{s,x}$ момент первого достижения множества $|x| = 2^\alpha$ траекторией процесса. Используя строго марковское свойство (см. [6]) процесса $X^{s,x}(t)$ и (1.7), получим неравенства

$$\sup_{|x|\leqslant 1} P\{\sup_{t\geqslant s} |X^{s,x}(t)| > 2^{2\alpha}\} =$$

$$= \sup_{|x|\leqslant 1} \int_{u=s}^{\infty} \int_{|y|=2^\alpha} P\{\tau^{s,x} \in du,\ X^{s,x}(u) \in dy\}\, P\{\sup_{t\geqslant u} |X^{u,y}(t)| > 2^{2\alpha}\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sup_{|x|\leqslant 1} P\{\tau^{s,x} < \infty\} = \frac{1}{2} \sup_{|x|\leqslant 1} P\{\sup_{t\geqslant s} |X^{s,x}(t)| > 2^\alpha\} \leqslant \frac{1}{2^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sup_{|x|\leqslant 1} P\{\sup_{t\geqslant s} |X^{s,x}(t)| > 2^{\alpha k}\} \leqslant \frac{1}{2^k} \tag{1.8}$$

Из (1.8) вытекает утверждение леммы при $p < 1/\alpha$, так как для $|x| = 1$

$$M[\sup_{t>s} |X^{s,x}(t)|^p] \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\alpha p} P\{2^{(k-1)\alpha} \leqslant \sup_{t\geqslant s} |X^{s,x}(t)| < 2^{k\alpha}\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\alpha p}\, 2^{-(k-1)} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(1-\alpha p)} < \infty$$

Лемма 1.2. Если выполнено условие (1.3), то при $p < 1 / \alpha$

$$\sup_{|x|=1} M \,|\, X^{s,x}(t) \,|^p \to 0 \qquad (t \to \infty) \tag{1.9}$$

Доказательство этой леммы немедленно вытекает из (1.3) — (1.4) и теоремы Лебега (см. [7], стр. 111).

Следующая лемма аналогична теореме 6.1 работы [1], где рассматривался лишь случай $p = 2$.

Лемма 1.3. Если для линейной системы с постоянными коэффициентами выполнено соотношение (1.9), то она экспоненциально p-устойчива в смысле [4], т. е. при некоторых постоянных A и α и для всех s, x выполнено соотношение

$$M \,|\, X^{s,x}(t) \,|^p < A \,|\, x \,|^p e^{-\alpha(t-s)} \tag{1.10}$$

Доказательство. Из леммы 1.2 следует, что для любого $Q < 1$ найдется τ такое, что

$$\sup_{|x|=1} M \,|\, X^{s,x}(s+\tau) \,|^p < Q$$

Полагая $Q = e^{-1}$ и учитывая (1.6), перепишем последнее соотношение в виде

$$M \,|\, X^{s,x}(s+\tau) \,|^p \leqslant e^{-1} \,|\, x \,|^p \tag{1.11}$$

Далее получим

$$M \,|\, X^{s,x}(s+2\tau) \,|^p = \int P\{X^{s,x}(s+\tau) \in dy\} \, M \,|\, X^{s+\tau,y}(s+2\tau) \,|^p \leqslant$$

$$\leqslant e^{-1} \int P\{X^{s,x}(s+\tau) \in dy\} \,|\, y \,|^p \leqslant e^{-2} \,|\, x \,|^p$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M \,|\, X^{s,x}(s+k\tau) \,|^p \leqslant e^{-k} \,|\, x \,|^p \tag{1.12}$$

Пусть

$$t = s + n\tau + t_1 \quad (0 \leqslant t_1 < \tau), \qquad K = \sup_{t > s, |x|=1} M \,|\, X^{s,x}(t) \,|^p$$

Здесь $k < \infty$ в силу леммы 1.1. Тогда получим с учетом (1.12) и (1.6)

$$M \,|\, X^{s,x}(t) \,|^p = \int P\{X^{s,x}(s+n\tau) \in dy\} \, M \,|\, X^{s+n\tau,y}(t) \,|^p \leqslant$$

$$\leqslant KM \,|\, X^{s,x}(s+n\tau) \,|^p \leqslant k \,|\, x \,|^p e^{-n} \leqslant Ke \,|\, x \,|^p \exp\left\{-\frac{t-s}{\tau}\right\}$$

Лемма 1.3, а вместе с нею и теорема 1.1 доказаны.

Пример детерминированной системы $dx \,/\, dt = -x \,/\, (t+1)$ показывает, что аналог теоремы 1.1 для систем с зависящими от времени коэффициентами, вообще говоря, неверен. Если, однако, условие (1.3) выполнено в некотором смысле равномерно, то аналогичная теорема все же верна.

Теорема 1.2. Если для решений линейной стохастической системы

$$dX(t) = B(t) X \, dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t) X d\xi_r(t) \tag{1.13}$$

при каждом $\varepsilon > 0$ выполнено условие

$$\sup_{s>0} P\{\sup_{u>s+T} |X^{s,x}(u)| > \varepsilon\} \to 0 \qquad (T \to \infty) \tag{1.14}$$

то эта система экспоненциально p-устойчива при всех достаточно малых положительных p.

Доказательство этой теоремы можно получить аналогично доказательству теоремы 1.1.

Замечание. В однородном по времени случае условия (1.14) и (1.3) эквивалентны. Это следует из эквивалентности событий

$$A = \{X^{s,x}(t) \nrightarrow 0\,(t \to \infty)\}, \qquad B = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\sup_{u>n} |X^{s,x}(u)| > \frac{1}{m}\right\}$$

и вытекающего из этой эквивалентности равенства

$$P(A) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} P\{\sup_{u>n} |X^{s,x}(u)| > 1/m\}$$

Поэтому теорема 1.2 действительно является обобщением теоремы 1.1 на неоднородный по времени случай.

Сопоставляя теоремы 1.1 и 1.2 и теорему 4.1 из [4], получим следующее утверждение.

Теорема 1.3. Пусть линейная система (1.13) равномерно асимптотически устойчива в смысле (1.14), а элементы матриц $B(t)$, $\sigma_r(t)$ ограничены. Тогда решение $X(t) = 0$ уравнения (1.1) устойчиво по вероятности для всех систем, коэффициенты которых допускают в достаточно малой окрестности точки $x = 0$ оценку

$$|b(t, x) - B(t)x| + \sum_{r=1}^{k} |\sigma_r(t, x) - \sigma_r(t)x| < \gamma |x| \tag{1.15}$$

с достаточно малой постоянной γ.

2. Изучим теперь вопрос о том, при каких условиях из неустойчивости линеаризованной системы вытекает неустойчивость полной системы. Следующий пример показывает, что в этом случае ситуация более сложная. Как показано в [8], одномерная система

$$dX(t) = (1 - \varepsilon)\, X\, dt + \sqrt{2}\, X\, d\xi(t)$$

при любом $\varepsilon > 0$ устойчива, а при $\varepsilon = 0$ неустойчива. Отсюда следует, что неустойчивость линейной стохастической системы еще не гарантирует неустойчивость системы, близкой к ней в смысле (1.15), как бы мала ни была постоянная γ. Докажем, тем не менее, что аналог теоремы 1.3 справедлив, если линейная система неустойчива в достаточно сильном смысле.

Предварительно введем определение экспоненциальной q-неустойчивости, аналогичное определению экспоненциальной p-устойчивости (1.10).

Решение $X(t) \equiv 0$ системы (1.1) называется экспоненциально q-неустойчивым ($q > 0$), если для некоторых A и $\alpha > 0$ выполнено условие

$$M\,|X^{s,x}(t)|^{-q} < A\,|x|^{-q} e^{-\alpha(t-s)} \tag{2.1}$$

Вполне аналогично теореме 3.1 из [5] доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.1. Для экспоненциальной q-неустойчивости решения $X(t) \equiv 0$ системы (1.13) необходимо и достаточно, чтобы существовала однородная относительно x порядка — q функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям ($k_i > 0$):

$$k_1\,|x|^{-q} \leqslant V(t, x) \leqslant k_2\,|x|^{-q}$$

$$L_0 V = \frac{\partial V}{\partial t} + (B(t)x, \nabla)V + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} (\sigma_r(t)x, \nabla)^2 V \leqslant -k_3\,|x|^{-q} \tag{2.2}$$

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \leqslant k_4\,|x|^{-g-1}, \qquad \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant k_4\,|x|^{-q-2}$$

(знаком ∇ мы обозначаем, как обычно, вектор с координатами $\partial / \partial x_i$).

При помощи теоремы 2.1 легко доказать аналог теоремы 4.1 из [5] относительно неустойчивости.

Теорема 2.2. Если решение $X(t) \equiv 0$ системы (1.13) с ограниченными коэффициентами экспоненциально q-неустойчиво, то оно неустойчиво по вероятности для всех систем вида (1.1), коэффициенты которых в достаточно малой окрестности точки $x = 0$ допускают оценки (1.15) с достаточно малой постоянной γ.

Доказательство. Пусть V — функция, удовлетворяющая условиям (2.2). Дифференциальный производящий оператор системы (1.1) имеет, как известно, вид

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + (b(t, x), \nabla) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} (\sigma_r(t, x), \nabla)^2$$

Отсюда и из (1.15) получим, учитывая оценки (2.2), в достаточно малой окрестности точки $x = 0$ оценку

$$LV = L_0 V + (b(t, x) - B(t)x, \nabla)V + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} (\sigma_r(t, x) - \sigma_r(t)x, \nabla)(\sigma_r(t, x) + \sigma_r(t)x, \nabla)V \leqslant -k_3\,|x|^{-q} + \gamma\,|x|\,k_4\,|x|^{-q-1} + \gamma c\,|x|^{-q} \tag{2.3}$$

Здесь постоянная c зависит от k_4 и верхней грани модулей коэффициентов уравнения (1.13). Из (2.3) следует, что при подходящем выборе $\gamma > 0$ справедлива оценка $LV < 0$ при $|x| < \varepsilon$.

Так как, кроме того, $\inf_{t>0} V(t, x) \to \infty$ при $x \to 0$, то, применяя теорему 2.3 из [8], получим утверждение теоремы (теорема 2.3 из [8] доказана для однородного по времени случая и невырожденной диффузии. Однако от этих ограничений легко избавиться, если воспользоваться при доказательстве аппаратом теории стохастических дифференциальных уравнений, см. [3,4]).

Замечание. Как отмечено в [8], из существования функции Ляпунова с отмеченными здесь свойствами следует более сильное утверждение, чем отрицание устойчивости по вероятности. Точнее, при выполнении условий теоремы 2.2 для любых $s > 0$ и x событие $\{X^{s,x}(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty\}$ имеет вероятность нуль.

Из определения 2.1 легко усмотреть, что детерминированная линейная система с постоянными коэффициентами q-неустойчива, если действительные части всех корней характеристического уравнения положительны, т. е. если любое решение, кроме $x \equiv 0$, стремится по модулю к бесконечности при $t \to \infty$. Аналогичный факт справедлив и для стохастических систем.

Теорема 2.3. Если для решений линейной системы с постоянными коэффициентами (1.2) при $x \neq 0$ выполнено соотношение

$$P\{|X^{s,x}(t)| \to \infty \, (t \to \infty)\} = 1 \tag{2.4}$$

то эта система экспоненциально q-неустойчива при всех достаточно малых положительных q. Утверждение теоремы справедливо и для систем с переменными коэффициентами (1.13), если вместо условия (2.4) выполнено условие: для любых $A > 0$, $x \neq 0$

$$\sup_{s>0} P\{\inf_{u>s+T} |X^{s,x}(u)| < A\} \to 0 \quad \text{при } T \to \infty \tag{2.5}$$

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теорем 1.1 и 1.2.

Из теорем 2.2 и 2.3 получаем вывод.

Теорема 2.4. Если решения линейной системы (1.13) (системы (1.2)) удовлетворяют условию (2.5) (условию (2.4)), а элементы матриц B, $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ ограничены, то решение $X(t) \equiv 0$ системы (1.1) неустойчиво по вероятности для всех систем, коэффициенты которых допускают в достаточно малой окрестности точки $x = 0$ оценку (1.15) с достаточно малой постоянной γ.

3. Полученные в п. 2 условия справедливости теоремы о неустойчивости по первому приближению можно, вероятно, улучшить. Рассмотрим, в частности, одномерную систему

$$dX(t) = b(t, X)\, dt + \sigma(t, X)\, d\xi(t) \tag{3.1}$$

для которой соответствующая линеаризованная система

$$dX(t) = b_0 X\, dt + \sigma_0 X\, d\xi(t)$$

имеет постоянные коэффициенты. При $b_0 < \sigma_0^2 / 2$ можно применить теорему 1.3, а при $b_0 > \sigma_0^2 / 2$ — теорему 2.4. При $b_0 = \sigma_0^2 / 2$ линейная система неустойчива, но не является асимптотически q-неустойчивой ни при каком $q > 0$. Как было отмечено выше, теорема 2.4 о неустойчивости по первому приближению в этом случае неверна. Если потребовать, однако, чтобы разности $b(t, x) - b_0 x$ и $\sigma(t, x) - \sigma_0 x$ были при $x \to 0$ бесконечно малыми величинами достаточно высокого порядка, то решение системы (3.1) оказывается все-таки неустойчивым.

В самом деле, предположим, что $b_0 = \sigma_0^2 / 2$ и при некоторых $c > 0$, $\alpha > 0$ выполнено условие

$$|b(t, x) - b_0 x| + |\sigma(t, x) - \sigma_0 x| \leqslant c|x|^{1+\alpha} \tag{3.2}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $V(x) = \ln \ln(1/|x|)$. Простая проверка показывает, что в данном случае $V \to \infty$ при $x \to 0$ и $LV < 0$ в достаточно малой окрестности начала координат.

Неустойчивость системы (3.1) при условиях $b_0 = \sigma_0^2 / 2$ и (3.2) следует из теоремы 2.3 работы [8].

Было бы интересно выяснить, верен ли аналог этого результата в многомерном случае. С этим вопросом тесно связан другой вопрос: нельзя ли в условиях теорем 2.3 и 2.4 потребовать, чтобы условия (2.4) и (2.5) выполнялись лишь при каком-нибудь одном значении x? Как известно, для детерминированных систем такое уточнение возможно. Из результатов работы [9] вытекает, что такое уточнение возможно сделать и для стохастических систем, если линеаризованная система имеет постоянные коэффициенты, а матрица диффузии для нее невырождена в том смысле, что

$$\sum_{r=1}^{k} (\sigma_r x, \lambda)^2 > 0 \tag{3.3}$$

для всех векторов x, λ, отличных от нулевых. Если же условие (3.3) не выполняется, то можно привести пример, показывающий, что такое уточнение, вообще говоря, неверно. Однако весьма вероятно, что такое уточнение можно сделать, если заменить условие (1.15) в формулировке этих теорем условием типа (3.2).

В заключение автор приносит благодарность И. Я. Кацу за полезные замечания.

Поступила 28 XI 1966

Институт проблем передачи информации АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. Гихман И. И. Дифференциальные уравнения со случайными функциями. В кн.: Зимняя школа по теории вероятностей и математической статистике. Киев, АН Укр. ССР, 1964.
3. Гихман И. И. Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений. В кн.: Предельные теоремы и статистические выводы. Ташкент, «Фан», 1966.
4. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости стохастических систем. Пробл. передачи информ., 1966, т. 2, № 3.
5. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов М., «Наука», 1965.
6. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963.
7. Халмош П. Теория меры. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
8. Хасьминский Р. З. Об устойчивости траекторий марковских процессов. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
9. Хасьминский Р. З. Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости линейных стохастических систем. Теор. вероятн. и ее применен., 1967, т. 12, вып. 1.