Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ С НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

С. Н. Кружков

(Москва)

В настоящей работе рассматривается некоторый класс задач с неизвестной границей в связи с поставленной в работе Г. И. Баренблатта и А. Ю. Ишлинского [1] задачей об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду, которая послужила основной моделью для выделения этого класса. Для рассматриваемых задач характерны наличие особенностей у неизвестных функций (искомое решение уравнения теплопроводности имеет точку разрыва, производные неизвестной границы неограничены) и немонотонность неизвестной границы [1].

Устанавливается теорема единственности решения этих задач, выводятся функциональные уравнения для неизвестной границы (эквивалентные исходной задаче) и обсуждаются некоторые свойства решений (более подробно в случае указанной выше задачи об ударе стержня).

1. Постановка задач. Требуется найти на некотором отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ непрерывную функцию $h(t)$, $h(0) = 0$, $h(t) > 0$ для $t \in (0, T)$, и ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} \tag{1.1}$$

в области

$$\Omega = \{(t, x) : 0 < x < h(t),\ 0 < t \leqslant T\}$$

непрерывное в $\overline{\Omega} \setminus (0,0)$ вместе с производной $u_x(t, x)$ и удовлетворяющее условиям

$$u|_{x=0} = f(t), \quad u_x|_{x=h(t)} = 0, \quad u|_{x=h(t)} = A(h) \equiv g^h(t) \tag{1.2}$$

где $f(t)$ — непрерывная при $t \geqslant 0$ функция, A — некоторый оператор со значениями в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $C^1[0, T]$. Естественно, в некоторых случаях из предположения о гладкости [2] функции $g(t)$ вытекает гладкость функции $h(t)$: например, если $g(t) = F(h(t))$, где $F(\sigma)$ — гладкая монотонная функция; кроме того, некоторые ограничения на $h(t)$ могут возникнуть из самой постановки задачи (в частности, из физических соображений; например, в случае задачи об ударе стержня $h(t)$ меньше длины стержня). Поэтому оператор A определен, вообще говоря, лишь на некотором подмножестве непрерывных функций, которое будем называть множеством допустимых границ и выбор которого является существенным моментом в постановке задачи.

---

[1] Задачи с монотонной неизвестной границей, имеющие регулярные решения, исследуются, например, в работах [2,3].

[2] В дальнейшем не будем подчеркивать зависимость функции $g(t)$ от $h(t)$ в тех случаях, конечно, где это не может привести к недоразумению.

Пусть T^* — верхняя грань тех T, для которых существует единственное решение рассматриваемой задачи; если $T^* < +\infty$ (например, $h(T) = 0$), то говорят, что решение существует в малом, локально.

2. Представление решения $u(t, x)$, выделяющее его главную особенность. В том случае, если $f(0) \neq g(0)$, функция $u(t, x)$ заведомо будет разрывна в точке (0, 0). Поэтому прежде всего установим представление для функции $u(t, x)$, не связанное с конкретным видом оператора A, но выделяющее ее разрывную часть.

Теорема 2.1. Пусть $h(t)$, $u(t, x)$ образуют любое возможное решение задачи (1.1), (1.2). Тогда

$$u(t, x) = g(0)\,\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right) f(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \left[\Phi\left(\frac{x+h(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) + \Phi\left(\frac{x-h(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\right] g'(\tau)\,d\tau \qquad (2.1)$$

$$\left(\Phi(\sigma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\sigma \exp(-\sigma^2)\,d\sigma\right)$$

Доказательство. Доопределим функцию $u(t, x)$ в области $\{(t, x) : h(t) < x < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ по формуле $u(t, x) \equiv g(t)$. Полученная в полуполосе $\pi\ \{(t, x) : 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ функция $u(t, x)$ непрерывна в $\pi \setminus (0,0)$ вместе с производной $u_x(t, x)$ и является ограниченным решением задачи

$$u_t - u_{xx} = F(t, x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{при } x < h(t) \\ g'(t) & \text{при } x > h(t) \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$u|_{x=0} = f(t), \quad u|_{t=0} = g(0), \quad [u]|_{x=h(t)} = [u_x]|_{x=h(t)} = 0 \qquad (2.3)$$

Решение такой задачи можно выразить через функцию Грина

$$G(x, \xi, t, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)\right]$$

следующей формулой [1]:

$$u(t, x) = \int_0^{+\infty} g(0)\,G(x, \xi, t, 0)\,d\xi + \int_0^t G_\xi(x, 0, t, \tau)\,f(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^{+\infty} G(x, \xi, t, \tau)\,F(\tau, \xi)\,d\xi\,d\tau \qquad (2.4)$$

откуда после элементарных преобразований получаем представление (2.1).

Следствие 2.1. Функция

$$u(t, x) - g(0)\,\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - f(0)\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right)$$

непрерывна в $\overline{\Omega}$, причем (для преобразования второго члена формулы

[1] Доказательство формулы (2.4) можно получить непосредственной проверкой того, что функция $u(t, x)$ в (2.4) (или в (2.1)) дает решение задачи (2.2), (2.3), и применением теоремы единственности решения задачи (2.2), (2.3) в классе ограниченных функций.

(2.1) применяется тождество $f(\tau) = f(\tau) - f(0) + f(0)$):

$$\left| u(t, x) - g(0)\,\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - f(0)\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} |f(\tau) - f(0)| + t \max_{0\leqslant t\leqslant T} |g'(t)|$$

откуда при $t \to 0$

$$\left| (g(0) - f(0))\left(1 - \Phi\left(\frac{h(t)}{2\sqrt{t}}\right)\right)\right| = o(1) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} |f(\tau) - f(0)| + 2t \max_{0\leqslant t\leqslant T} |g'(t)|$$

Следствие 2.2. Если $g(0) - f(0) \neq 0$, то

$$\lim_{t\to 0} \frac{h(t)}{\sqrt{t}} = +\infty \tag{2.5}$$

что вытекает из второй оценки следствия 2.1.

Следствие 2.3 (принцип максимума). Для функции $u(t, x)$ справедливы неравенства

$$\min\,[g(0), \min_{0\leqslant\tau\leqslant t} f(\tau)] \leqslant u(t, x) \leqslant \max\,[g(0), \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} f(\tau)]$$

(достаточно применить обычный принцип максимума при $t \geqslant \delta > 0$ и устремить δ к 0).

Следствие 2.4. Задача (1.1), (1.2) при $f(t) \equiv \text{const} = f(0)$ имеет смысл лишь в том случае, если выполнено условие

$$g(0) - f(0) \neq 0$$

Действительно, в противном случае из формулы (2.1) получаем, что функция $u(t, x)$ непрерывна в начале координат и, следовательно, равна константе $f(0)$ при любой границе $x = h(t)$.

Так как нас особенно интересует случай разрывной функции $u(t, x)$ и случай $f(t) \equiv 0$ (в задаче об ударе стержня), то всюду дальше будем считать, что это условие выполнено.

3. Теорема единственности. Будем предполагать что оператор A на множестве допустимых границ обладает следующими свойствами.

(1) Значение $A(h)|_{t=0} = g(0)$ не зависит от выбора $h(t)$.

(2) Если $h_1(t_0) > h_2(t_0)$, то найдется такая точка $t^* < t_0$, что $h_1(t^*) = h_2(t^*)$ и для $g^{h_i}(t) \equiv A(h_i)$ $(i = 1, 2)$ справедливо неравенство

$$g^{h_1}(t^*) - g^{h_1}(t_0) \geqslant g^{h_2}(t^*) - g^{h_2}(t_0) \tag{3.1}$$

Например, если $A(h) \equiv F(h(t))$, где $F(\sigma)$ — гладкая убывающая функция, то свойство (2) выполнено при любых t_0 с $t^* = 0$. Как будет показано ниже, другой пример такого оператора дает задача об ударе вязко-пластического стержня.

Относительно гладкой функции $f(t)$ предположим, что [1]

$$f(0) \leqslant g(0), \qquad f'(t) \leqslant 0 \tag{3.2}$$

---

[1] Случай $f(0) \geqslant g(0)$, $f'(t) \geqslant 0$ сводится к (3.2) умножением «данных» задачи (1.1), (1.2) на — 1.

Заметим, что в случае гладкой функции $f(t)$ второй член в правой части формулы (2.1) (обозначим его J_f) интегрированием по частям преобразуется к виду

$$J_f = f(t) - f(0)\,\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \int_0^t \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right) f'(t-\tau)\,d\tau \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. При указанных предположениях относительно оператора A и функции $f(t)$ решение задачи (1.1), (1.2) единственно.

Доказательство. Прежде всего, пользуясь представлением (2.1) для любого решения $h(t)$, $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) с учетом (3.2) и (3.3) и применяя принцип максимума в области $\{(t, x)\colon 0 \leqslant x \leqslant h(t),\ 0 < \delta \leqslant t \leqslant t_0 \leqslant T\}$, получаем, что $u(t_0, x) \geqslant f(t_0) - c_1\delta$, откуда в пределе при $\delta \to 0$ вытекает, что в области Ω $u(t, x) \geqslant f(t)$ и, следовательно, $u_x(t, 0) \geqslant 0$.

Дифференцируя формулу (2.1) по x, находим, что

$$u_x(t, x) \geqslant \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[\exp\left(-\frac{(x+h(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(x-h(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right)\right] g'(\tau)\,d\tau$$

откуда следует неравенство $u_x(\delta, x) \geqslant -c_2\delta^{1/2}$. По принципу максимума для непрерывной в области $\{(t, x)\colon 0 \leqslant x \leqslant h(t),\ 0 < \delta \leqslant t \leqslant T\}$ функции $u_x\ (t, x)$, которая удовлетворяет уравнению (1.1), учитывая второе условие в (1.2), получаем, что $u_x(t, x) \geqslant -c_2\delta^{1/2}$ при $t \geqslant \delta$; устремляя δ к 0, находим, что в $\overline{\Omega} \setminus (0, 0)$

$$u_x(t, x) \geqslant 0 \tag{3.4}$$

Отсюда вследствие усиленного принципа максимума [4] в точках области Ω

$$u_x(t, x) > 0 \tag{3.5}$$

Предположим теперь, что существуют два решения задачи (1.1), (1.2): $h_1(t)$, $u_1(t, x)$ на отрезке $[0, T_1]$ и $h_2(t)$, $u_2(t, x)$ на отрезке $[0, T_2]$. Пусть

$$T = \min(T_1, T_2),\ m(t) = \min[h_1(t), h_2(t)] \text{ и } D = \{(t, x)\colon 0 < x < m(t),\ 0 < t \leqslant T\}$$

Рассмотрим в области $\overline{D}$ функцию $w(t, x) \equiv u_1(t, x) - u_2(t, x)$, $w(0, 0) = 0$, которая удовлетворяет уравнению (1.1) в D. В силу теоремы 2.1 эта функция непрерывна в $\overline{D}$ и $w(t, x) \to 0$ при $t \to 0$.

Пусть P — точка максимума функции $w(t, x)$ в $\overline{D}$, причем $w(P) > 0$. Так как $w(t, 0) = 0$, то точка P должна лежать на кривой $x = m(t)$, т. е. $P = (t_0, m(t_0))$, $t_0 \in (0, T]$. По известному свойству решений уравнения теплопроводности $w_x(P) > 0$ (заметим, что $w \neq \mathrm{const}$). Следовательно, $h_1(t_0) > h_2(t_0)$, ибо в противном случае в силу второго условия в (1.2) для функции u_1 и неравенства (3.4) для функции u_2:

$$w_x(P) = u_{1x}(P) - u_{2x}(P) = -u_{2x}(P) \leqslant 0$$

Согласно свойству (2) оператора A найдется точка $t^* < t_0$, для которой $h_1(t^*) = h_2(t^*)$ и выполнено неравенство (3.1). Применяя последовательно неравенство (3.5) для функции $u_1(t, x)$ и неравенство (3.1), имеем

$$w(P) = u_1(t_0, m(t_0)) - g^{h_2}(t_0) < u_1(t_0, h_1(t_0)) - g^{h_2}(t_0) = g^{h_1}(t_0) - g^{h_2}(t_0) \leqslant$$
$$\leqslant g^{h_1}(t^*) - g^{h_2}(t^*) = w(t^*, m(t^*))$$

Но это противоречит выбору точки P как точки максимума функции $w(t, x)$ в $\overline{D}$. Следовательно, $w(P) \leqslant 0$, а значит и всюду в $\overline{D}$:

$$u_1(t, x) \leqslant u_2(t, x)$$

Поскольку с самого начала доказательства функции u_1 и u_2 можно поменять местами, то справедливо и обратное неравенство. Таким образом, $u_1 \equiv u_2$ в $\bar{D}$.

Покажем, что тогда и $h_1(t) \equiv h_2(t)$ на $[0, T]$. Действительно, если бы нашлась точка $\theta \in [0, T]$ такая, что, например, $h_1(\theta) < h_2(\theta)$, то по второму условию в (1.2) $u_{1x}(\theta, h_1(\theta)) = 0$, а по неравенству (3.5) $u_{1x}(\theta, h_1(\theta)) = u_{2x}(\theta, h_1(\theta)) > 0$; пришли к противоречию. Теорема 3.1 полностью доказана.

Замечание 3.1. Отметим, что в доказательстве теоремы единственности нигде не использовалась какая-либо гладкость неизвестной границы.

4. Сведение задачи (1.1), (1.2) к эквивалентным функциональным уравнениям для неизвестной границы. Пусть $h(t)$, $u(t, x)$ есть решение задачи (1.1), (1.2). Представим функцию $u(t, x)$ по формуле (2.1) и устремим в ней x к $h(t)$ при фиксированном t (обоснование предельного перехода под знаком интеграла здесь очевидно). Пользуясь третьим условием в (1.2), находим

$$g(0)\left[1 - \Phi\left(\frac{h(t)}{2\sqrt{t}}\right)\right] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{h(t)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{h^2(t)}{4(t-\tau)}\right) f(\tau)\, d\tau -$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t \left[2 - \Phi\left(\frac{h(t)+h(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{h(t)-h(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\right] g'(\tau)\, d\tau \tag{4.1}$$

Обратно, пусть $h(t)$ — непрерывное решение уравнения (4.1), для которого $h'(t)$ существует на полуинтервале $(0, T]$ и

$$\int_0 |h'(\tau)|\,(t-\tau)^{-1/2}\, d\tau < \infty$$

Покажем, что функция $u(t, x)$, определяемая формулой (2.1), удовлетворяет всем требованиям определения решения задачи (1.1), (1.2). Неочевидным является лишь условие $u_x|_{x=h(t)} = 0$; проверим его. Заметим, что рассматриваемая функция $u(t, x)$ имеет непрерывные в $\bar{\Omega} \setminus (0,0)$ производные u_x, u_t, u_{xx} и применим интегральное представление для $u(t, x)$ при помощи указанной в п. 1 функции $G(x, \xi, t, \tau)$ (см. [5], гл. VI, § 3), учитывая, что $|u_x(t, x)| \leqslant c_3/t^{1/2}$:

$$u(t, x) = \int_0^t G_\xi(x, 0, t, \tau) f(\tau)\, d\tau - \int_0^t G(x, h(\tau), t, \tau)\, u_x(\tau, h(\tau))\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t [G(x, h(\tau), t, \tau) h'(\tau) - G_\xi(x, h(\tau), t, \tau)]\, g(\tau)\, d\tau$$

Пользуясь тем, что квадратная скобка в последнем члене равна

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left[\Phi\left(\frac{x+h(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) + \Phi\left(\frac{x-h(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\right]$$

и преобразуя этот член интегрированием по частям, получаем для функции $u(t, x)$ представление, которое отличается от формулы (2.1) лишь слагаемым

$$V(t, x) \equiv \int_0^t G(x, h(\tau), t, \tau)\, u_x(\tau, h(\tau))\, d\tau$$

которое, следовательно, равно нулю в $\bar{\Omega}$. Пользуясь известным свойством тепловых потенциалов (см. [5], гл. VI, § 4), находим

$$0 = \lim_{x \to h(t)-0} V_x(t, x) = V_x(t, h(t)) - {}^1\!/_2 u_x(t, h(t)) \tag{4.2}$$

Рассмотрим функцию $V(t, x)$ при $x \geqslant h(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Так как $V(t, h(t)) = 0$, $V(0, x) = 0$ при $x > 0$ и $|V(t, x)| \leqslant 2c_3$, то по принципу максимума $V(t, x) \equiv 0$, откуда вытекает, что

$$0 = \lim_{x \to h(t)+0} V_x(t, x) = V_x(t, h(t)) + {}^1/_2 u_x(t, h(t)) \tag{4.3}$$

Сравнивая (4.2) и (4.3), заключаем, что $u_x|_{x=h(t)} \equiv 0$.

Другое функциональное уравнение получаем, дифференцируя формулу (2.1) по x и приравнивая в силу второго условия в (1.2) производную $u_x(t, x)$ нулю при $x = h(t)$:

$$-g(0)\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{h^2(t)}{4t}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t (t-\tau)^{-3/2}[2(t-\tau) - h^2(t)]\exp\left(-\frac{h^2(t)}{4(t-\tau)}\right)f(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[\exp\left(-\frac{(h(t)+h(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(h(t)-h(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right)\right]g'(\tau)\,d\tau \tag{4.4}$$

Наконец, третье функциональное уравнение получим из формулы (2.1), приравнивая на искомой границе $x = h(t)$ функции $\partial u / \partial t$ и $du / dt = A(h)' \equiv g'(t)$ (здесь используется свойство скачка теплового потенциала двойного слоя в предположении существования интегрируемой по модулю с весом $(t-\tau)^{-1/2}$ производной $h'(\tau)$ на любом полуинтервале $(0, t]$):

$$g'(t) = -g(0)\frac{h(t)}{t\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{h^2(t)}{4t}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)f(\tau)\,d\tau\,\Big|_{x=h(t)} -$$

$$-2\int_0^t G_\xi(h(t), h(\tau), t, \tau)\,g'(\tau)\,d\tau \tag{4.5}$$

Доказательство эквивалентности уравнений (4.4) и (4.5) задаче (1.1), (1.2) проводится так же, как и в случае уравнения (4.1) прямой проверкой того, что функция $u(t, x)$, определяемая формулой (2.1), удовлетворяет всем требованиям определения решения задачи (1.1), (1.2), правда, при некоторых дополнительных априорных предположениях относительно решений уравнений (4.4) и (4.5). Например, в случае уравнения (4.5) достаточно потребовать выполнения свойства (2.5). Тогда, как видно из (2.1), $u(t) \equiv u(t, h(t)) \to g(0)$ при $t \to 0$, а из того, что $h(t)$ есть решение уравнения (4.5), вытекает совпадение производных $u'(t)$ и $g'(t)$; следовательно, $u(t, h(t)) \equiv g(t)$ и достаточно провести те же самые рассуждения, что и для уравнения (4.1).

Полученные функциональные уравнения имеют существенно различные свойства и их следует применять в зависимости от того, какую информацию о решении нужно получить. Например, для получения асимптотики $h(t)$ около $t = 0$ представляется наиболее удобным применение уравнения (4.1); для четкой операторной постановки вопроса о разрешимости задачи (1.1), (1.2) наиболее естественно применить уравнение (4.5), которое, как легко видеть из доказательства теоремы 2.1 и вывода уравнения (4.5), при заданной функции $h(t)$ является линейным уравнением Вольтерра относительно $\partial u / \partial t \equiv g'(t)$ на границе $x = h(t)$ для решения $u(t, x)$ следующей задачи:

$$u_t = u_{xx} \tag{4.6}$$

$$u\,|_{x=0} = f(t), \qquad u_x\,|_{x=h(t)} = 0, \qquad \lim_{t\to 0} u(t, h(t)) = \text{const} = g(0) \tag{4.7}$$

Переходим к применениям полученных результатов.

5. **Асимптотика неизвестной границы $x = h(t)$ около $t = 0$.** Прежде всего заметим, что нестрого правильный результат можно получить исходя из равенства $\partial u / \partial t = du/dt = g'(t)$ на границе $x = h(t)$ при $t \to 0$, которое уже содержит в себе условие $u_x = 0$ при $x = h(t)$, отбрасывая при вычислении $\partial u/\partial t$ всю непрерывную (регулярную) часть функции $u(t, x)$ (теорема 2.1 и следствие 2.1).

Для строгого вывода асимптотики сделаем некоторые естественные априорные предположения о «данных» задачи (1.1), (1.2) и функции $h(t)$.

Будем предполагать, что

$$\operatorname{sign}\,[g(0) - f(0)] = -\operatorname{sign}\, g'(0) \neq 0 \tag{5.1}$$

(из дальнейшего будет видно, что условие совпадения знаков величин $g(0) - f(0)$ и $-g'(0)$ является необходимым условием существования решения задачи (1.1), (1.2)). Для определенности в дальнейших выкладках будем считать, что

$$g(0) - f(0) > 0, \qquad g'(0) < 0 \tag{5.2}$$

Относительно функции $h(t)$ предположим, что при достаточно малом $\delta_0 > 0$ эта функция монотонна и выпукла кверху на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \delta_0$, причем функция $\omega(t) \equiv h(t) / 2\sqrt{t}$ монотонно стремится к $+\infty$ при $t \to 0$ и $|\omega'(t)| = o(t^{-1}\omega(t))$ (последние ограничения вполне согласуются с условием (2.5); предположение об $\omega'(t)$ становится вполне оправданным после того, как получена оценка сверху для $\omega(t)$, вывод которой, как будет видно, не опирается на это предположение; относительно этого предположения см. также нижеследующее замечание 5.1). Так как функция $h'(t)$ может иметь лишь счетное множество точек разрыва на $[0, \delta_0]$, то, не нарушая общности дальнейших рассуждений, можно считать, что $h'(t)$ существует всюду на $[0, \delta_0]$.

В силу (5.2) можно считать, что $g'(t) < 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \delta_0$.

Теорема 5.1. При указанных выше предположениях

$$h(t) \sim 2\sqrt{t}\,\omega_0(t) \tag{5.3}$$

где $\omega_0(t)$ есть решение уравнения [1]

$$[g(0) - f(0)]\,\omega_0(t) \exp(-\omega_0^2(t)) = -\sqrt{\pi}\, g'(0)\, t \tag{5.4}$$

---

[1] Легко видеть, что $\omega_0(t) \sim \sqrt{\ln(1/t)}$ при $t \to 0$; однако функция $2\sqrt{t}\omega_0(t)$ более точно характеризует асимптотику $h(t)$.

Доказательство. Воспользуемся уравнением (4.1). Первый член правой части этого уравнения (сохраним за ним обозначение J_f) преобразуем, пользуясь тождеством $f(\tau) = f(\tau) - f(0) + f(0)$:

$$J_f = [f(0) + o(1)] \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{h(t)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{h^2(t)}{4(t-\tau)}\right) d\tau =$$

$$= [f(0) + o(1)] \left[1 - \Phi\left(\frac{h(t)}{2\sqrt{t}}\right)\right] \qquad (5.5)$$

Второй член в правой части (4.1) разбиваем на два слагаемых $J^+ + J^-$, где

$$J^{\pm} = \frac{1}{2} \int_0^t \left[1 - \Phi\left(\frac{h(t) \pm h(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\right] g'(\tau)\, d\tau$$

Заметим, что, вследствие монотонности $h(t)$:

$$0 \geqslant J^+ = \frac{1}{2} \int_0^t \left[1 - \Phi\left(\frac{h(t) + h(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\right] g'(\tau)\, d\tau \geqslant \qquad (5.6)$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \int_0^t \left[1 - \Phi\left(\frac{h(t)}{2\sqrt{t}}\right)\right] g'(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} t g'(0)\, \alpha_1(t)\, [1 - \Phi(\omega(t))]$$

где $\alpha_1(t) \to 1$ при $t \to 0$ (дальше через $\alpha_i(t)$ будем обозначать функции, обладающие этим свойством).

Получим оценки снизу и сверху для J^-. Пользуясь монотонностью $\omega(t)$, имеем

$$J^- = \int_0^t \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{t}\,\omega(t) - \sqrt{\tau}\,\omega(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\right)\right] g'(\tau)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant g'(0)\, \alpha_2(t) \int_0^t \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{t} - \sqrt{\tau}}{\sqrt{t-\tau}}\, \omega(t)\right)\right] d\tau$$

Сделав замену

$$\theta = \frac{\sqrt{t} - \sqrt{\tau}}{\sqrt{t-\tau}}\, \omega(t)$$

имеем далее

$$J^- \leqslant g'(0)\, \alpha_2(t)\, 4t\omega^{-2} \int_0^{\omega} [1 - \Phi(\theta)]\, \theta\, \frac{\omega^4(\omega^2 - \theta^2)}{(\omega^2 + \theta^2)^3}\, d\theta =$$

$$= 4g'(0)\, \alpha_3(t)\, \omega^{-2} \int_0^{+\infty} [1 - \Phi(\theta)]\, \theta\, d\theta$$

Последний интеграл интегрированием по частям выражается через $\Phi(+\infty) = 1$ и равен $1/4$. Итак

$$J^- \leqslant \alpha_3(t)\; g'(0) t\; \omega^{-2}(t) \qquad (5.7)$$

Для вывода оценки снизу заметим, что в силу выпуклости $h(t)$:

$$\frac{h(t) - h(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}} \geqslant \frac{h'(t)}{2} \sqrt{t-\tau}$$

и, следовательно,

$$J^- \geqslant \frac{1}{2} g'(0)\, \alpha_4(t) \int_0^t \left[1 - \Phi\left(\frac{h'(t)}{2} \sqrt{t-\tau}\right)\right] d\tau = 4g'(0)\, \alpha_4(t) \frac{1}{(h'(t))^2} \int_0^{\chi(t)} [1 - \Phi(\sigma)] \sigma\, d\sigma$$

$$\sigma = h'(t) \sqrt{t-\tau} / 2, \qquad \chi(t) = {}^1\!/_2 h'(t) \sqrt{t}$$

Так как в силу условия $|\omega'(t)| = o(t^{-1}\omega(t))$ при $t \to 0$:

$$h'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \omega(t) + 2\sqrt{t}\omega'(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \omega(t), \qquad 2\chi(t) = h'(t) \sqrt{t} > \frac{1}{2}\omega(t) \to \infty$$

то

$$J^- \geqslant 4g'(0)\, \alpha_5(t) \frac{1}{(h'(t))^2} \int_0^\infty [1 - \Phi(\sigma)]\, \sigma\, d\sigma \geqslant g'(0)\, t \alpha_6(t)\, \omega^{-2}(t) \tag{5.8}$$

Из оценок (5.6) — (5.8) вытекает, что

$$J^+ + J^- = g'(0)\, t\, \alpha_7(t) \omega^{-2}(t) + o(1)\ [1 - \Phi(\omega(t))] \tag{5.9}$$

Подставляя соотношения (5.5) и (5.9) в уравнение (4.1), имеем

$$[g(0) - f(0) + o(1)]\ [1 - \Phi(\omega(t))] = -\alpha_7(t) g'(0) t\ \omega^{-2}(t)$$

Учитывая, что при $\omega \to +\infty$:

$$1 - \Phi(\omega) \sim \exp(-\omega^2) / \sqrt{\pi}\omega$$

получаем[1] утверждение теоремы 5.1

Замечание 5.1. Условие $|\omega'(t)| = o(t^{-1}\omega(t))$ несущественно для доказательства теоремы, так как для получения оценки снизу для $\omega(t)$ можно воспользоваться доказанным выше дифференциальным неравенством

$$[g(0) - f(0)]\ \omega^{-1} \exp(-\omega^2) \leqslant -g'(0)\ \alpha_8(t) \sqrt{\pi} / (h'(t))^2$$

однако это требует некоторых дополнительных рассмотрений.

6. Задача об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду. Эта задача (см. [1]) является частным случаем задачи (1.1),(1.2) при

$$f(t) \equiv 0, \qquad A(h) = 1 - s \int_0^t \frac{d\tau}{1 - h(\tau)} \equiv g(t), \qquad s = \text{const} > 0$$

причем, в качестве множества допустимых границ здесь естественно взять совокупность непрерывных функций $h(t)$, $h(0) = 0$, $0 < h(t) < 1$ при $0 < t \leqslant T$ (длина стержня в безразмерных переменных равна единице). Из физической постановки этой задачи ясно, что решение ее существует лишь в малом: для некоторого $T > 0$ $h(T) = 0$ и $u(T, 0) = 0$.

Выполнение всех сделанных в предыдущих пунктах предположений о данных задачи (1.1), (1.2), кроме свойства (2) оператора A, здесь совершенно очевидно. Проверим это свойство.

Пусть $h_1(t)$ и $h_2(t)$ — некоторые функции из множества допустимых границ, причем $h_1(t_0) = h_2(t_0)$ (следовательно, обе эти функции определены и непрерывны на $[0, t_0]$). Обозначим через t^* верхнюю грань тех

[1] Здесь учитывается следующее свойство обратной функции $\omega(z)$ для $z = \omega e^{-\omega^2}$: при $z \to 0$ $\omega(kz) \sim \omega(z)$ для любого $k > 0$.

$t < t_0$, для которых $h_1(t) = h_2(t)$; очевидно, что множество таких t не пусто (так как содержит $t = 0$) и что $h_1(t^*) = h_2(t^*)$. По определению t^* при $t^* < t \leqslant t_0$ выполняется неравенство

$$h_1(t) > h_2(t) \tag{6.1}$$

Учитывая, что $0 \leqslant h_i(t) < 1$ и пользуясь (6.1), имеем

$$g^{h_1}(t^*) - g^{h_1}(t_0) = s\int_{t^*}^{t_0}\frac{d\tau}{1-h_1(\tau)} > s\int_{t^*}^{t_0}\frac{d\tau}{1-h_2(\tau)} = g^{h_2}(t^*) - g^{h_2}(t_0)$$

что и требовалось доказать. Таким образом, рассматриваемая задача может иметь только одно решение.

Покажем, что решение задачи об ударе стержня не может существовать бесконечно долго. Действительно, если решение $u(t, x)$, $h(t)$ этой задачи определено в области $\{0 \leqslant x \leqslant h(t),\ 0 < t < +\infty\}$, то вследствие очевидного неравенства $u(t, h(t)) < 1 - st$ функция $u(t, h(t)) < 0$ при $t > 1/s$, что противоречит принципу максимума (следствие 2.3), согласно которому $0 \leqslant u(t, x) \leqslant 1$ (физически нереальный случай $h(t_1) = 1$, $t_1 > 0$ (см., например, [1]), не рассматриваем). Из этого рассуждения вытекает также оценка сверху для отрезка $[0, T]$ существования решения

$$T \leqslant 1/s$$

Функциональное уравнение (4.1) в данном случае таково:

$$1 - \Phi\left(\frac{h(t)}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{s}{2}\int_0^t\left[2 - \Phi\left(\frac{h(t)+h(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{h(t)-h(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\right]\frac{d\tau}{1-h(\tau)} \tag{6.2}$$

Асимптотика $h(t)$ около $t = 0$ имеет вид

$$h(t) \sim 2\sqrt{t}\,\omega_0(t), \quad \omega_0(t)\exp(-\omega_0^2(t)) = s\sqrt{\pi}t, \quad \omega_0 \sim \sqrt{-\ln t}$$

Получим оценку снизу для $h(t)$ на всем отрезке существования решения. Из (6.2), учитывая, что

$$\Phi\left(\frac{h(t)+h(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) + \Phi\left(\frac{h(t)-h(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \geqslant 0$$

при любых неотрицательных $h(t)$ и $h(\tau)$, имеем

$$1 - \Phi\left(\frac{h(t)}{2\sqrt{t}}\right) \leqslant s\int_0^t\frac{d\tau}{1-h(\tau)} \tag{6.3}$$

Отсюда вытекает, что $h(t) \geqslant 2\sqrt{t}\,\omega_-(t)$, где $\omega_-(t)$ есть решение уравнения

$$1 - \Phi(\omega_-(t)) = s\int_0^t\frac{d\tau}{1-2\sqrt{\tau}\,\omega_-(\tau)}$$

или соответствующего дифференциального уравнения

$$\omega' = -s\sqrt{\pi}\,\frac{\exp(\omega^2)}{1-2\sqrt{t}\,\omega}, \qquad \omega(0) = +\infty \tag{6.4}$$

Легко видеть, что единственным неограниченным при $t \to 0$ решением задачи (6.4) является сепаратриса этого уравнения, отделяющая гладкие решения этого уравнения от решений, имеющих вертикальные касательные. Ясно, что если $\omega(t)$ является некоторым решением уравнения (6.4), пересекающим ось t в точке $t = T_0$, то для T верна оценка $T > T_0$, и что любое решение, проходящее через ось ω, пересекает ось t (нетрудно показать, что сепаратриса тоже пересекает ось t).

Как было отмечено выше, существует точка T, где $h(T) = 0$. О характере поведения $h(t)$ около $t = T$ можно получить информацию непосредственно из постановки задачи. Для этого докажем следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Лемма. Пусть $u(t, x)$ есть решение уравнения (1.1) в области

$$Q\{0 < x < \varphi(T - t),\ T_0 < t < T;\ \varphi(0) = 0,\ \varphi \in C[T_0 - T,\ 0]\}$$

непрерывное в $\overline{Q}$ и удовлетворяющее условиям

$$u|_{x=0} = u_x|_{x=\varphi(T-t)} = 0$$

Пусть $\varphi(\sigma) = o(\sqrt{\sigma})$ при $\sigma \to 0$. Тогда $u(t, x) \to 0$ при $t \to T$ быстрее любой степени $(T - t)$.

Доказательство. Сделаем замену переменных

$$e^{-\tau} = T - t, \quad y = x / \sqrt{T - t}$$

При этом область Q преобразуется в область

$$D\{(\tau, y):\ 0 < y < e^{\tau/2}\varphi(e^{-\tau}), \qquad -\ln(T - T_0) \leqslant \tau < +\infty\}$$

а уравнение (1.1) переходит в

$$L(u) \equiv u_{yy} - {}^1/_2\, y u_y - u_\tau = 0$$

Пусть $D_0 = D \cap \{(\tau, y):\ \tau \geqslant \tau_0\}$. Выберем произвольное $\alpha > 0$ и рассмотрим в D_0 функцию

$$v(y) = 2 - e^{-\alpha y} < 2$$

Так как при достаточно большом τ_0 область D_0 в силу условия $\varphi(\sigma) = o(\sqrt{\sigma})$ содержится в сколь угодно узкой полуполосе $\{0 \leqslant y \leqslant e^{\tau_0/2}\varphi(e^{-\tau_0}),\ \tau \geqslant \tau_0\}$, то для данного α можно найти такое τ_0, что в D_0:

$$L(v) \equiv (-\alpha^2 - {}^1/_2\, y\, \alpha)e^{-\alpha y} \leqslant -{}^1/_2\, \alpha^2$$

Очевидно, при любом $\alpha > 0$ $v(y) > 1$ и на правой боковой границе Γ области D_0 $v_y = \alpha e^{-\alpha y} > 0$. Положим $w \equiv u/v$. Ясно, что

$$w|_{y=0} = 0,\ w_y|_\Gamma = -\frac{u}{v^2} v_y|_\Gamma \equiv -a(y)\, w|_\Gamma, \qquad a = \frac{v_y}{v}\Big|_\Gamma > 0$$

Функция $w(\tau, y)$ удовлетворяет в D_0 уравнению

$$w_{yy} + \left(2\frac{v_y}{v} - \frac{1}{2}y\right) w_y + \frac{L(v)}{v} w - w_\tau = 0$$

причем $(L(v) / v) \leqslant -\alpha^2 / 4$. Применяя принцип максимума к функциям

$$w^{\pm} \equiv \pm w - M_0 \exp[(\alpha^2/4)(\tau_0 - \tau)], \text{ где } M_0 = \max_y |w(\tau_0, y)|$$

получаем оценку

$$|w(\tau, y)| \leqslant M_0 e^{(\alpha^2/4)(\tau_0 - \tau)}$$

следовательно,

$$|u(\tau, y)| \leqslant M(\alpha) e^{-\alpha^2\tau/4}$$

Отсюда в силу произвольности $\alpha > 0$ вытекает утверждение леммы.

Так как в случае задачи об ударе стержня $u(t, h(t)) - u(T, h(T)) \sim s(T - t)$ при любых $h(t)$, то порядок касания функции $h(t)$ прямой $t = T$ не может быть меньше, чем у некоторой параболы второй степени. Оказывается, что в данном случае порядок касания $h(t)$ этой прямой сильнее, чем у любой параболы второй степени. Действительно, в противном случае, сделав ту же самую замену, что и в лемме, и применив в новых переменных к $u(\tau, y)$ разложение по собственным функциям задачи

$$-Y'' + {}^1/_2\, y\, Y' = \lambda Y, \qquad Y(0) = Y'(l) = 0$$

при некотором $l > 0$, приходим к противоречию с тем, что в силу условия

$$u(t, h(t)) = 1 - s\int_0^t \frac{d\tau}{1 - h(\tau)}$$

эта задача должна иметь собственные значения $\lambda = n/2$, $n = 2, 3, 4..$, чего, как нетрудно видеть, не может быть ни при каком l. (При $\lambda = n/2$ общее решение рассматриваемого обыкновенного уравнения выражается через многочлены и функции Чебышева — Эрмита).

Следовательно, для задачи об ударе стержня (при некотором условии регулярности функции $t = h^{-1}(x) \sim T$.

$$\overline{\lim_{t \to T}} \frac{h(T - t)}{\sqrt{T - t}} = + \infty$$

7. Некоторые замечания и, в частности, обобщения. *Замечание* 7.1. Аналогично можно рассматривать и более общие задачи — задачи с начальными условиями, когда $h(0) = l > 0$ и $u(0, x) = u_0(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, $u_0(l) = g(0)$; нетрудно указать условия на $u_0(x)$, при которых, например, остается справедлива теорема единственности. Однако для справедливости теоремы существования необходимы, конечно, некоторые условия согласования $u_0(x)$ с оператором A. Например, как показано в работе [6], постановка задачи об ударе стержня будет противоречива, если $l > 0$ и $u_0(x) \equiv 1$ (достаточно сравнить при $t \to 0$ порядок малости $1 - u(t, x_0)$, $x_0 < l$ и $1 - u(t, h(t))$, пользуясь условиями $u_x \geqslant 0$, $u(t, x) \leqslant 1$).

Замечание 7.2. Полученные результаты можно обобщить на случай некоторых параболических уравнений с переменными коэффициентами.

Замечание 7.3. Вопросы сведения задач с неизвестной границей к функциональным уравнениям рассматриваются в работе [7].

Поступила 6 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Ишлинский А. Ю. Об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, стр. 497—502.
2. Вентцель Т. Д. Об одной задаче со свободной границей для уравнения теплопроводности. Докл. АН СССР, 1960, т. 131, № 5, стр. 1000—1003.
3. Нгуен Дин Чи. Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнения. Вест. Моск. ун-та, сер. матем., механ., 1966, № 2.
4. Nirenberg L. Astrong maximum principle for parabolic equations. Comm. Pure Appl. Math., 1953, vol. 6, № 2, pp. 167—177.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики Изд. 3-е, М., «Наука».
6. Скобеев А. М. О постановке задачи об ударе вязко-пластического стержня. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, стр. 789—791.
7. Kolodner I. I. Free boundary problem for the heat equation with applications to problems of change of phase. Comm. Pure Appl. Math., 1956, vol. 9, No. 1, pp. 1—31.