Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

О НЕКОТОРЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СОСТАВНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Б. Л. Абрамян, Н. Х. Арутюнян

(Ереван)

В настоящей работе приводятся решения некоторых контактных задач, связанных с кручением составного полупространства. В общем случае рассматривается задача о кручении составного упругого полупространства путем поворота жесткого цилиндра конечной длины, впаянного в вертикальное углубление этого полупространства. Далее рассматриваются следующие частные задачи по кручению такого полупространства.

1) Составное полупространство с вертикальным упругим сердечником бесконечной длины, скручиваемое путем поворота жесткого штампа, прикрепленного к верхнему торцу упругого сердечника.

2) Полупространство с вертикальным цилиндрическим отверстием бесконечной длины, скручиваемое путем поворота жесткого конечного цилиндра, впаянного в верхнюю часть этого отверстия.

В общем случае решение задачи сводится к решению интегрального уравнения на полупрямой второго рода. Исследован вопрос разрешимости этого основного интегрального уравнения и показано, что его решение может быть построено методом последовательных приближений.

Отметим, что задачи о кручении однородного полупространства и упругого слоя посредством поворота жесткого штампа рассматривались в работах Н. А. Ростовцева [1], Рейснера и Сагочи [2], Я. С. Уфлянда [3], Флоренса [4], Д. В. Грилицкого [5] и др.

Задача о кручении круглого цилиндрического стержня и спаянного с ним полупространства, находящихся под действием крутящего момента, приложенного к свободному торцу стержня, рассматривалась в работе Д. В. Грилицкого и Я. М. Кизымы [6].

Кручение упругого полупространства с вертикальным цилиндрическим включением из другого материала посредством поворота жесткого штампа, лежащего на поверхности этого полупространства, рассматривалось в работе [7], причем в этой работе полагалось, что штамп расположен симметрично относительно оси включения и лежит одновременно на обоих материалах.

§ 1. Кручение составного упругого полупространства посредством поворота жесткого цилиндра конечной длины, впаянного в вертикальное углубление этого полупространства. Рассмотрим задачу о кручении составного полупространства с вертикальным упругим сердечником цилиндрической формы, расположенным своим верхним торцом ниже поверхности полупространства (фиг. 1). В углублении полупространства впаян жесткий цилиндр того же радиуса, что и сердечник, и кручение полупространства осуществляется путем поворота этого жесткого цилиндра или штампа. Для решения задачи направляем ось z по оси сердечника и разбиваем осевое сечение полупространства с сердечником на три подобласти D_i ($i = 1, 2, 3$).

Функцию перемещения $\Psi(r, z)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=0 \tag{1.1}$$

ищем в виде

$$\Psi(r, z)=\Psi_i(r, z) \qquad \text{в } D_i\,(i, 2, 3) \tag{1.2}$$

$$\Psi_1(r, z)=\frac{1}{r}\int_0^\infty \xi\,[D(\xi)\,\mathrm{sh}\,\xi z+F(\xi)\,\mathrm{ch}\,\xi z]\,W_1(\xi r)\,d\xi+ \tag{1.3}$$

$$+\frac{1}{r}\sum_{k=1}^\infty H_k K_1(\beta_k r)\sin\beta_k z \qquad \begin{pmatrix}-b\leqslant z\leqslant 0\\ a\leqslant r<\infty\end{pmatrix} \qquad \left(\beta_k=\frac{(2k-1)\pi}{2b}\right)$$

$$\Psi_2(r, z)=\frac{1}{r}\int_0^\infty A(\xi)\,K_1(\xi r)\sin\xi z\,d\xi+ \tag{1.4}$$

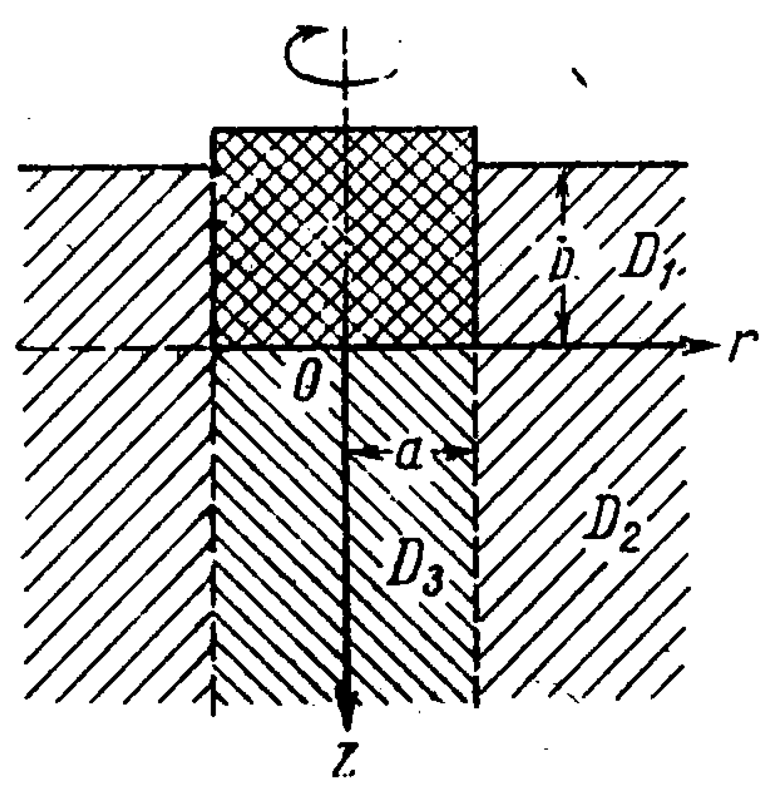
$$+\frac{1}{r}\int_0^\infty \xi B(\xi)\,e^{-z\xi}W_1(\xi r)\,d\xi \qquad \begin{pmatrix}0\leqslant z<\infty\\ a\leqslant r<\infty\end{pmatrix}$$

$$\Psi_3(r, z)=\frac{1}{r}\int_0^\infty C(\xi)\,I_1(\xi r)\sin\xi z\,d\xi+ \tag{1.5}$$

$$+\frac{1}{r}\sum_{k=1}^\infty D_k e^{-\lambda_k z}J_1(\lambda_k r) \qquad \begin{pmatrix}0\leqslant z<\infty\\ 0\leqslant r\leqslant a\end{pmatrix}$$

$$W_n(\xi r)=J_n(\xi r)\,Y_1(a\xi)-Y_n(\xi r)\,J_1(a\xi) \tag{1.6}$$

Здесь $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ — функции Бесселя от действительного аргумента, соответственно первого и второго рода [8], $J_n(x)$ и $I_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя от мнимого аргумента, а λ_k — корни уравнения $J_1(\lambda a)=0$.



Фиг. 1

Заметим, что

$$W_1(\xi a)=0, \qquad W_2(\xi a)=-W_0(\xi a)=\frac{2}{\pi a\xi} \tag{1.7}$$

Перемещения и напряжения в подобластях D_i $(i=1, 2.3)$ вычисляем по формулам

$$v^{(i)}(r,z)=r\Psi_i(r,z), \qquad \tau_{r\varphi}^{(i)}=G_i r\frac{\partial\Psi_i}{\partial r},$$

$$\tau_{z\varphi}^{(i)}=G_i r\frac{\partial\Psi_i}{\partial z}\ (i=1,2,3), \quad G_1=G_2=G \tag{1.8}$$

Пользуясь формулами (1.8), у (1.3) — (1.5) получим

$$\tau_{r\varphi}^{(1)}(r, z)=G\left\{-\int_0^\infty \xi^2[D(\xi)\,\mathrm{sh}\,\xi z+F(\xi)\,\mathrm{ch}\,\xi z]\,W_2(\xi r)\,d\xi-\right. \tag{1.9}$$

$$\left.-\sum_{k=1}^\infty \beta_k H_k K_2(\beta_k r)\sin\beta_k z\right\}$$

$$\tau_{z\varphi}^{(1)}(r,\ z)=G\left\{\int\limits_0^\infty \xi^2\left[D(\xi)\operatorname{ch}\xi z+F(\xi)\operatorname{sh}\xi z\right]W_1(\xi r)\,d\xi+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k H_k K_1(\beta_k r)\cos\beta_k z\right\}$$

$$\tau_{r\varphi}^{(2)}(r,\ z)=G\left[-\int\limits_0^\infty \xi A(\xi)K_2(\xi r)\sin\xi z\,d\xi-\int\limits_0^\infty \xi^2 B(\xi)e^{-\xi z}W_2(\xi r)\,d\xi\right]$$

$$\tau_{z\varphi}^{(2)}(r,\ z)=G\left[\int\limits_0^\infty \xi A(\xi)K_1(\xi r)\cos\xi z\,d\xi-\int\limits_0^\infty \xi^2 B(\xi)e^{-\xi z}W_1(\xi r)\,d\xi\right]$$

$$\tau_{r\varphi}^{(3)}(r,\ z)=G_3\left[\int\limits_0^\infty \xi C(\xi)I_2(\xi r)\sin\xi z\,d\xi-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k D_k e^{-\lambda_k z}J_2(\lambda_k r)\right]$$

$$\tau_{z\varphi}^{(3)}(r,\ z)=G_3\left[\int\limits_0^\infty \xi C(\xi)I_1(\xi r)\cos\xi z\,d\xi-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k D_k e^{-\lambda_k z}J_1(\lambda_k r)\right]$$

Постоянные коэффициенты H_k и D_k и функции $D(\xi)$, $F(\xi)$, $A(\xi)$, $B(\xi)$, и $C(\xi)$ должны быть определены из следующих граничных условий и условий сопряжения между подобластями D_i $(i=1,\ 2,\ 3)$:

$$\begin{gathered}
\tau_{z\varphi}^{(1)}(r,\ -b)=0 \qquad (a\leqslant r<\infty)\\
v^{(1)}(a,\ z)=c \quad (-b\leqslant z\leqslant 0), \qquad v^{(3)}(r,\ 0)=\frac{c}{a}r \quad (0\leqslant r\leqslant a)\\
v^{(3)}(a,\ z)=v^{(2)}(a,\ z), \qquad \tau_{r\varphi}^{(3)}(a,\ z)=\tau_{r\varphi}^{(2)}(a,\ z) \qquad (0\leqslant z<\infty)\\
v^{(2)}(r,\ 0)=v^{(1)}(r,\ 0), \qquad \tau_{z\varphi}^{(2)}(r,\ 0)=\tau_{z\varphi}^{(1)}(r,\ 0) \qquad (a\leqslant z<\infty)
\end{gathered}\tag{1.10}$$

Пользуясь выражениями (1.9) и удовлетворяя условиям (1.10), получим

$$\begin{gathered}
D(\xi)\operatorname{ch}\xi b-F(\xi)\operatorname{sh}\xi b=0, \quad F(\xi)=B(\xi) \qquad (m_0=G/G_3)\\
C(\xi)I_1(\xi a)=A(\xi)K_1(\xi a)\\
H_k=-\frac{2c}{\beta_k b K_1(\beta_k a)}, \qquad D_k=\frac{2c}{\lambda_k a J_2(\lambda_k a)}\\
C(\xi)I_2(\xi a)+m_0 A(\xi)K_2(\xi a)=\frac{2cI_2(\xi a)}{\pi\xi I_1(\xi a)}-\frac{4m_0}{a\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{tB(t)\,dt}{t^2+\xi^2}\\
\xi\left[D(\xi)+B(\xi)\right]\left[J_1^2(a\xi)+Y_1^2(a\xi)\right]=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{tA(t)K_1(ta)\,dt}{t^2+\xi^2}-\frac{c}{\xi}\operatorname{th}b\xi
\end{gathered}\tag{1.11}$$

Здесь использованы следующие формулы интегрального преобразования Фурье и Вабера — Орра [8]

$$\Phi(z)=\int\limits_0^\infty f(\xi)\sin\xi z\,d\xi, \qquad f(\xi)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\Phi(z)\sin\xi z\,dz \tag{1.12}$$

$$\varphi(r)=\int\limits_0^\infty \xi\psi(\xi)W_1(\xi r)\,d\xi, \qquad \psi(\xi)\left[J_1^2(a\xi)+Y_1^2(a\xi)\right]=\int\limits_0^\infty r\varphi(r)W_1(\xi r)\,dr$$

а также значения интегралов

$$\int_0^\infty e^{-tz}\sin\xi z\,dz=\frac{\xi}{t^2+\xi^2},\quad \int_a^\infty rW_1(\xi r)K_1(\beta_k r)\,dr=-\frac{2K_1(\beta_k a)}{\pi(\xi^2+\beta_k^2)} \tag{1.13}$$

и значения рядов

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{\lambda_k^2+\xi^2}=\frac{aI_2(\xi a)}{2\xi I_1(\xi a)},\quad \sum_{k=1}^\infty\frac{1}{\beta_k^2+\xi^2}=\frac{b}{2\xi}\operatorname{th}b\xi\quad\left(\beta_k=\frac{(2k-1)\pi}{2b}\right)$$

Здесь суммирование производится по корням уравнения $J_1(\lambda a)=0$. При этом приняты во внимание равенства (1.7).

Исключая $C(\xi)$ из шестого уравнения (1.11) и $D(\xi)$ из последнего уравнения (1.11), получим систему интегральных уравнений

$$A(\xi)=\frac{1}{\Omega(\xi a)}\left[\frac{2cI_2(\xi a)}{\pi\xi}-\frac{4m_0I_1(\xi a)}{a\pi^2}\int_0^\infty\frac{tB(t)\,dt}{t^2+\xi^2}\right] \tag{1.14}$$

$$\xi B(\xi)=-\frac{1}{(1+\operatorname{th}b\xi)[J_1^2(a\xi)+Y_1^2(a\xi)]}\left[\frac{c}{\xi}\operatorname{th}b\xi+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{tA(t)K_1(ta)\,dt}{t^2+\xi^2}\right] \tag{1.15}$$

$$\Omega(\xi a)=I_2(\xi a)K_1(\xi a)+m_0K_2(\xi a)I_1(\xi a) \tag{1.16}$$

Произведем в уравнениях (1.14) и (1.15) следующую замену неизвестных функций:

$$tA(t)\,K_1(ta)=A^*(t),\qquad tB(t)=-B^*(t) \tag{1.17}$$

Подставляя затем выражение (1.14) в соотношение (1.15), получим для определения $B^*(t)$ интегральное уравнение вида

$$B^*(\xi)=\int_0^\infty B^*(z)K(\xi,z)\,dz+F(\xi) \tag{1.18}$$

$$K(\xi,z)=\frac{8m_0}{a\pi^3(1+\operatorname{th}b\xi)[J_1^2(a\xi)+Y_1^2(a\xi)]}J^{(1)}(\xi,z) \tag{1.19}$$

$$F(\xi)=\frac{c}{(1+\operatorname{th}b\xi)[J_1^2(a\xi)+Y_1^2(a\xi)]}\left[\frac{\operatorname{th}b\xi}{\xi}+\frac{4}{\pi^2}J^{(2)}(\xi,z)\right] \tag{1.20}$$

$$J^{(1)}(\xi z)=\int_0^\infty\frac{tI_1(ta)K_1(ta)\,dt}{\Omega(ta)(t^2+\xi^2)(t^2+z^2)},\qquad J^{(2)}(\xi,z)=\int_0^\infty\frac{I_2(ta)K_1(ta)\,dt}{\Omega(ta)(t^2+\xi^2)}$$

Чтобы показать разрешимость интегрального уравнения (1.18) и возможность применения метода последовательных приближений для построения его решения, оценим значение интеграла

$$\int_0^\infty|K(\xi,z)|\,dz \tag{1.21}$$

Пользуясь неравенством $K_n(x) \leqslant K_{n+1}(x)$, которое справедливо для бесселевых функций от мнимого аргумента второго рода, будем иметь

$$\frac{m_0 I_1(ta) K_1(ta)}{\Omega(ta)} \leqslant \frac{m_0 I_1(ta) K_2(ta)}{I_2(ta) K_1(ta) + m_0 K_2(ta) I_1(ta)} \leqslant 1 \tag{1.22}$$

Тогда для интеграла, входящего в выражение (1.19), получим следующую оценку [9]:

$$m_0 J^{(1)}(\xi, z) \leqslant \int_0^\infty \frac{t\,dt}{(t^2+\xi^2)(t^2+z^2)} = \frac{1}{z^2-\xi^2} \ln\frac{z}{\xi} \tag{1.23}$$

Пользуясь этой оценкой, найдем

$$\int_0^\infty |K(\xi, z)|\,dz \leqslant \frac{8}{a\pi^3(1+\operatorname{th}\xi b)\,[J_1^2(a\xi)+Y_1^2(a\xi)]} \int_0^\infty \ln\frac{z}{\xi}\,\frac{dz}{z^2-\xi^2} =$$

$$= \frac{2}{a\pi\xi(1+\operatorname{th}\xi b)\,[J_1^2(a\xi)+Y_1^2(a\xi)]} = f(\xi) \tag{1.24}$$

Заметим, что $f(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$; кроме того, в силу известных равенств $xY_1(x)|_{x\to 0} = -1$, $J_1(0) = 0$, имеем

$$f(\xi)|_{\xi\to\infty} = {}^1/_2 \tag{1.25}$$

если воспользоваться для n целого следующими асимптотическими формулами [8] при $z \to \infty$:

$$\begin{aligned} J_n(z) &\approx \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ Y_n(z) &\approx \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \tag{1.26}$$

При $\nu > 0$ и $x > 0$ произведение $x\,[J_\nu^2(x) + Y_\nu^2(x)]$, рассматриваемое как функция от x, монотонно убывает [9, 10], если $\nu > {}^1/_2$.

Поэтому величина $f(\xi)$ монотонно растет, оставаясь при этом меньше одной второй.

Таким образом, имеет место неравенство

$$\int_0^\infty |K(\xi, z)|\,dz \leqslant f(\xi) \leqslant \frac{1}{2} \qquad (0 \leqslant \xi < \infty) \tag{1.27}$$

Нетрудно видеть, что и правая часть $F(\xi)$ интегрального уравнения (1.18) ограничена. Действительно,

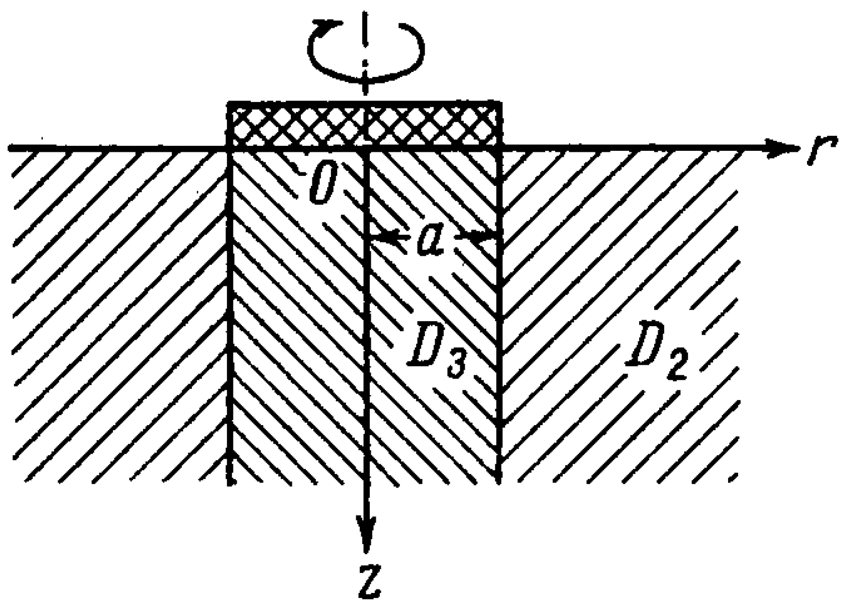
$$F(\xi) = \frac{a\pi}{2} f(\xi)\, c \operatorname{th} b\xi + \frac{2ac\xi}{\pi} f(\xi) \int_0^\infty \frac{I_2(ta) K_1(ta)\,dt}{\Omega(ta)(t^2+\xi^2)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a\pi c}{2} f(\xi) \left[\operatorname{th} b\xi + \frac{4\xi}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+\xi^2}\right] = \frac{a\pi c}{2} f(\xi) \left(\operatorname{th} b\xi + \frac{2}{\pi}\right) < \frac{a\pi c}{2} \tag{1.28}$$

Здесь использованы оценка (1.27), а также следующие соотношения

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+\xi^2} = \frac{\pi}{2\xi}, \qquad \frac{I_2(ta)\,K_1(ta)}{\Omega(ta)} < 1$$

Но, как известно [11], при выполнении условий (1.27) и (1.28) интегральное уравнение (1.18) разрешимо в классе ограниченных на полуоси функций, и это решение может быть построено методом последовательных приближений.



Фиг. 2

Определяя неизвестную функцию $B^*(\xi)$ из основного интегрального уравнения (1.18), определим по формулам (1.14) и (1.17) методом последовательных приближений сначала функцию $A(\xi)$, а затем и остальные неизвестные величины.

Пользуясь полученным выше решением, рассмотрим некоторые частные задачи по кручению составного полупространства.

§ 2. Кручение составного полупространства с вертикальным упругим сердечником посредством поворота жесткого штампа, прикрепленного к сердечнику. В частном случае, когда $b=0$ (фиг. 2), решение задачи о кручении составного полупространства с вертикальным упругим сердечником, скручиваемым посредством поворота жесткого штампа, прикрепленного к сердечнику, можно получить из приведенного выше общего решения задачи.

В данном случае граничные условия задачи принимают вид

$$v^{(3)}(r,\ 0) = cr/ar \quad (0 \leqslant r \leqslant a), \qquad \tau_{z\varphi}^{(2)}(r,\ 0)=0 \quad (a<r<\infty)$$
$$v^{(3)}(a,\ z) = v^{(2)}(a,\ z), \quad \tau_{r\varphi}^{(3)}(a,\ z) = \tau_{r\varphi}^{(2)}(a,\ z) \quad (0 \leqslant z < \infty) \qquad (2.1)$$

Решение задачи можно представить в следующем виде:

$$\Psi_2(r,z) = \frac{1}{r}\int_0^\infty \frac{A^*(\xi)\,K_1(\xi r)}{\xi K_2(\xi a)}\sin\xi z\,d\xi - \frac{1}{r}\int_0^\infty B^*(\xi)e^{-\xi z}W_1(\xi r)\,d\xi \quad \begin{pmatrix} a\leqslant r<\infty \\ 0\leqslant z<\infty \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

$$\Psi_3(r,z) = \frac{1}{r}\int_0^\infty \frac{A^*(\xi)\,I_1(\xi r)}{\xi I_1(\xi a)}\sin\xi z\,d\xi + \frac{2c}{ar}\sum_{k=1}^\infty \frac{e^{-\lambda_k z}J_1(\lambda_k r)}{\lambda_k J_2(\lambda_k a)} \quad \begin{pmatrix} 0\leqslant r\leqslant a \\ 0\leqslant z<\infty \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

Произвольные функции интегрирования $A^*(\xi)$ и $B^*(\xi)$ должны быть определены из системы интегральных уравнений

$$A^*(\xi) = \frac{4\xi m_0 I_1(\xi a)\,K_1(\xi a)}{a\pi^2\Omega(\xi a)}\int_0^\infty \frac{B^*(t)\,dt}{t^2+\xi^2} + \frac{2cI_2(\xi a)\,K_1(\xi a)}{\pi\Omega(\xi a)} \qquad (2.4)$$

$$B^*(\xi) = \frac{2}{\pi\,[J_1^2(a\xi)+Y_1^2(a\xi)]}\int_0^\infty \frac{A^*(t)\,dt}{t^2+\xi^2} \qquad (2.5)$$

$$m_0 = \frac{G}{G_3}, \qquad \Omega(\xi a) = K_1(\xi a)\,I_2(\xi a) + m_0 I_1(\xi a)\,K_2(\xi a) \qquad (2.6)$$

Система интегральных уравнений (2.4) и (2.5) может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма следующего вида:

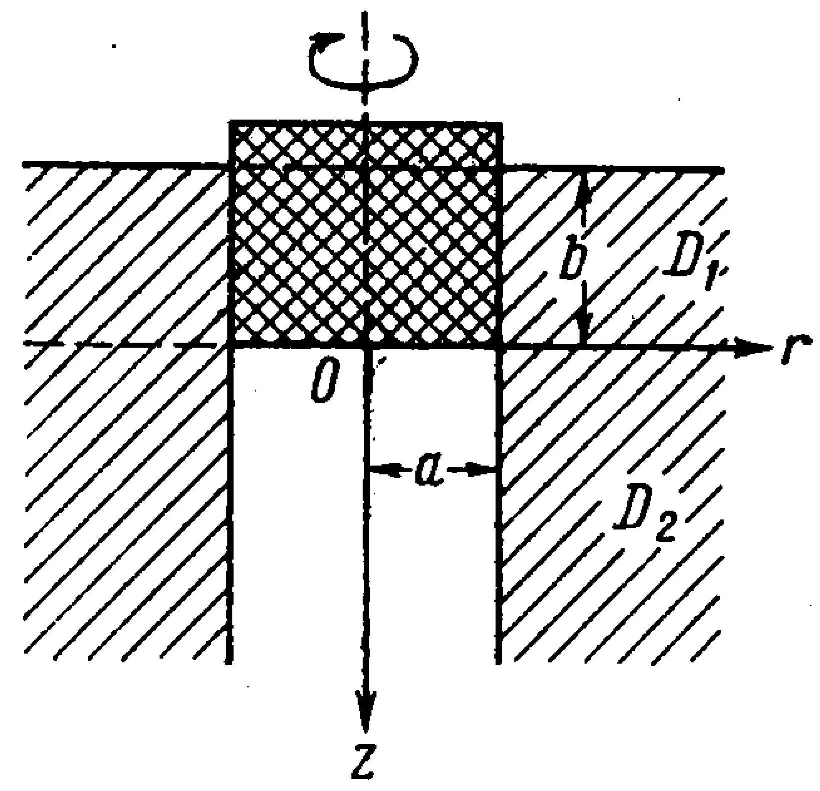
$$B^*(\xi) = \int_0^\infty K(\xi, u) B^*(u)\, du + F(\xi) \tag{2.7}$$

$$K(\xi, u) = \frac{8m_0}{a\pi^3 [J_1^2(a\xi) + Y_1^2(a\xi)]} \int_0^\infty \frac{t I_1(ta) K_1(ta)\, dt}{\Omega(ta)(t^2+\xi^2)(t^2+u^2)} \tag{2.8}$$

$$F(\xi) = \frac{4c}{\pi^2 [J_1^2(a\xi) + Y_1^2(a\xi)]} \int_0^\infty \frac{I_2(ta) K_1(ta)\, dt}{\Omega(ta)(t^2+\xi^2)} \tag{2.9}$$

Для этого уравнения имеет место оценка (1.27), а следовательно, его решение можно построить, пользуясь методом последовательных приближений.

В заключение заметим, что если в рассмотренной задаче заменить упругий сердечник жестким, то решение получится элементарным путем при помощи функции перемещений $\Psi = ac/r^2$, где a — радиус сердечника, а c — угол поворота. Однако это решение не имеет смысла, так как крутящий момент получается бесконечным.



Фиг. 3

§ 3. Кручение упругого полупространства с вертикальным цилиндрическим отверстием путем поворота жесткого конечного цилиндра, впаянного в верхнюю часть отверстия. Из решения, полученного в первом параграфе, можно получить также решение для задачи о кручении полупространства с вертикальным цилиндрическим отверстием, скручиваемого путем поворота жесткого конечного цилиндра, впаянного в верхнюю часть этого отверстия (фиг. 3).

Полагая для этого $m_0 = \infty$, в выражениях (1.3) — (1.5) получим для функций перемещения следующие выражения:

$$\Psi_1(r, z) = -\frac{1}{r}\int_0^\infty B^*(\xi) \frac{\operatorname{ch}(z+b)\xi}{\operatorname{ch}\xi b} W_1(\xi r)\, d\xi - \frac{2c}{br}\sum_{k=1}^\infty \frac{K_1(\beta_k r)\sin\beta_k z}{\beta_k K_1(\beta_k a)} \tag{3.1}$$

$$(-b \leqslant z \leqslant 0, \quad a \leqslant r < \infty)$$

$$\Psi_2(r, z) = \frac{1}{r}\int_0^\infty \frac{A^*(\xi) K_1(\xi r)}{\xi K_1(\xi a)} \sin \xi z\, d\xi - \frac{1}{r}\int_0^\infty B^*(\xi) e^{-z\xi} W_1(\xi r)\, d\xi \tag{3.2}$$

$$(0 \leqslant z < \infty, \quad a \leqslant r < \infty)$$

Граничные условия в рассматриваемой задаче примут вид

$$\begin{gathered} \tau_{z\varphi}^{(1)}(r, -b) = 0 \quad (a \leqslant r < \infty), \qquad v^{(1)}(a, z) = c \quad (-b \leqslant z \leqslant 0) \\ \tau_{\varphi r}^{(2)}(a, z) = 0 \quad (0 \leqslant z < \infty) \\ v^{(1)}(r, 0) = v^{(2)}(r, 0), \qquad \tau_{z\varphi}^{(1)}(r, 0) = \tau_{z\varphi}^{(2)}(r, 0) \quad (a \leqslant r < \infty) \end{gathered} \tag{3.3}$$

Подставляя выражения (3.1) и (3.2) в (1.10) и учитывая при этом условия (4.3), получим для неизвестных функций B* (ξ) и A* (ξ) следующую систему:

$$A^*(\xi) = \frac{4\xi K_1(\xi a)}{a\pi^2 K_2(\xi a)} \int_0^\infty \frac{B^*(t)\, dt}{t^2+\xi^2} \tag{3.4}$$

$$B^*(\xi) = \frac{1}{(1+\operatorname{th} b\xi)[J_1^2(a\xi) + Y_1^2(a\xi)]}\left[\frac{c}{\xi}\operatorname{th} b\xi + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{A^*(t)\, dt}{t^2+\xi^2}\right] \tag{3.5}$$

Эту систему интегральных уравнений можно свести к одному интегральному уравнению Фредгольма второго рода следующего вида:

$$B^*(\xi) = \int_0^\infty K(\xi, u) B^*(u)\, du + F(\xi) \tag{3.6}$$

$$K(\xi, u) = \frac{8}{a\pi^3 (1 + \operatorname{th} b\xi)\,[J_1^2(a\xi) + Y_1^2(a\xi)]} \int_0^\infty \frac{tK_1(ta)\, dt}{K_2(ta)(t^2 + \xi^2)(t^2 + u^2)}$$

$$F(\xi) = \frac{c \operatorname{th} b\xi}{\xi (1 + \operatorname{th} b\xi)\,[J_1^2(a\xi) + Y_1^2(a\xi)]}$$

Для этого уравнения (3.6) также справедлива оценка (1.27), а следовательно, его решение можно построить, пользуясь методом последовательных приближений.

Таким образом, имея значения $B^*(\xi)$ и определяя затем при помощи выражения (3.4) значение $A(\xi)$, найдем компоненты напряжения и перемещения.

Поступила 5 VI 1967

Институт математики и механики
АН Арм ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ростовцев Н. А. К задаче о кручении упругого полупространства. ПММ, 1955, т. 19, вып. 1, стр. 55—60.
2. Reissner E., Sagoci H. Forsed Torsional oscillations of an Elastic Half-space. J. Appl. Phys., 1944, vol. 15, No. 9, pp. 652—654.
3. Уфлянд Я. С. Кручение упругого слоя. Докл. АН СССР, 1959, т. 129, № 5, стр. 997—999.
4. Florence A. L. Two contact problems for an elastic layer. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1961, vol. 14, part. 4, pp. 453—459.
5. Грилицкий Д. В. Кручение двуслойной упругой среды. Прикл. механика, 1961, т. 7, вып. 1, стр. 89—95.
6. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Совместное кручение стержня и полупространства. Прикл. механика, 1967, т. 3, вып. 2, стр. 89—98.
7. Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А. О контактных задачах для полупространства с включением. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, стр. 1050—1056.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2., М., «Наука», 1966.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, М., Физматгиз, 1962.
10. Magnus W., Oberhettinger F. Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin, Springer — Verlag, 1948
11. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Изд. 2-е, М., «Наука», 1965.