Отсюда из условий теоремы 4 и (22) на основании теоремы 1 и вытекает утверждение теоремы.

Приемы, использованные при построении функционалов (18) и (22), дают возможность при помощи простых, но громоздких вычислений получить условия устойчивости решений уравнения (2) в общем случае, т. е. в случае ядер без скачка.

Пример 1. Система

$$x^{\cdot}(t) = -a(t)\,x(t) + b(t)\,x(t-\tau) \qquad (\tau \geqslant 0)$$

на основании теоремы 2 асимптотически устойчива, если

$$\inf_t a(t) > \sup_t |b(t)| \qquad (t \geqslant 0)$$

Пример 2. Система

$$x^{\cdot}(t) = a(t)\,x(t) - b(t)\,x(t-\tau) \qquad (a(t) > 0,\ b(t) > 0,\ \tau \geqslant 0)$$

на основании теоремы 3 асимптотически устойчива, если

$$\sup_t \int\limits_{t-\tau}^{t} b(\tau + s)\,ds < 1 \qquad (t \geqslant 0)$$

$$\inf_t b(t) > \sup_t (3a(t) + \tau b(t+\tau) \sup_t a(t) + \tau b(t+\tau) \sup_t b(t))$$

В заключение автор благодарит Р. З. Хасьминского за поставленную задачу и постоянное внимание к работе.

Поступила 3 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
2. Колмановский В. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости линейных систем с запаздыванием. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1966, № 4, с. 58—65.
3. Hale G. Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional — differential equation. J. of diff. equat., 1965, vol. 1, No 4, pp. 452—482.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ДВОЙНОГО НУЛЕВОГО КОРНЯ ДЛЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ

Н. В. Стоянов

(София, Болгария)

Рассматривается задача о стабилизации установившихся движений нелинейной управляемой системы в критическом случае двух нулевых корней. Поставленная задача решается способом, опирающимся на теорию устойчивости движения [1–6] и методы, развитые в работах [7–9], при использовании неаналитического управления. Эта задача рассмотрена в [10] в случае, когда двойному нулевому корню отвечает одна группа решений первого приближения исходной системы. Здесь рассматривается второй случай,когда этому корню отвечают две группы решений.

1. Рассмотрим возмущенное движение управляемого объекта, описываемое системой

$$\frac{dy}{dt} = Ay + Bu + g(y, u) \qquad (y \in \{R^{n+2}\},\ u \in \{R^m\}) \tag{1.1}$$

Здесь y — $(n+2)$-мерный вектор возмущения; u — m-мерный вектор управления, которое будем считать невозмущенным помехами; A, B — постоянные матрицы — $(n+2) \times (n+2)$ и $(n+2) \times m$; $g(y, u)$ — аналитические нелинейности по y, u Все коэффициенты уравнений (1.1) предполагаются вещественными.

Пусть при $u \equiv 0$ невозмущенное движение $y = 0$ системы (1.1) не является асимптотически устойчивым. Тогда ставится задача о стабилизации движения (1.1), т. е. выбрать такое управление $u = u(y)$, при подстановке которого в (1.1) невозмущенное движение $y = 0$ стало бы асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Воспользуемся определением работы [8] и рассмотрим критический случай двойного нулевого корня, причем второй подслучай, когда двойному нулевому корню отвечают две группы решений. В этом случае системы уравнений первого приближения допускают два независимых линейных интеграла с постоянными коэффициентами. При помощи невырожденного преобразования переменных, матрицу которого можно построить, следуя [1-3,8], приняв эти интегралы за новые переменные ξ, η и обозначая $y_i = x_i$ $(i = 1, \ldots n)$, приведем систему (1.1) к следующему виду:

$$d\xi/dt = X(\xi, \eta, x, u), \qquad d\eta/dt = Y(\xi, \eta, x, u) \tag{1.2}$$

$$dx\,/\,dt = A_0 x + B_0 u + a\xi + b\eta + Z(\xi, \eta, x, u) \tag{1.3}$$

Здесь ξ, η — скаляры, x — n-вектор; a, b — n-векторы; A_0 — постоянная $n \times n$ матрица, B_0 — постоянная $n \times m$ матрица; X, Y, Z — аналитические нелинейности по ξ, η, x, u.

При таком преобразовании задача о стабилизации для системы (1.1) эквивалентна той же задаче для системы (1.2), (1.3).

Как известно система

$$dx\,/\,dt = A_0 x + B_0 u \tag{1.4}$$

удовлетворяет условию стабилизируемости [8] и для нее можно построить линейное управление вида (P — некоторая постоянная $m \times n$-матрица)

$$u^0(x) = Px \tag{1.5}$$

Подходящим выбором управления (1.5) для системы (1.4), все собственные числа μ_i матрицы $A_0 + B_0 P = \mathrm{const}$ удовлетворяют условию

$$R_{e\mu i} < 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

Пусть имеем неаналитическое управление в виде [9]

$$u_j(\xi, \eta, x) = u_j^\circ(x) + \sum_{p,\, q=0}^{1} \sum_{s+k=1}^{\infty} \alpha_{skpq}^j \xi^s \eta^k \xi_*^{\,p} \eta_*^{\,q} \tag{1.7}$$

$$z_* = \operatorname{sign} z = \begin{cases} 1 \text{ при } z \geqslant 0 \\ -1 \text{ при } z < 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, m \\ s \geqslant 0,\ k \geqslant 0 \end{pmatrix}$$

Если в (1.7) положим $p = q = 0$, получается аналитическое управление. В этом случае для решения задачи о стабилизации системы (1.2), (1.3) можно применить любой из известных в теории устойчивости способов исследования [3-5]. Если подчинить коэффициенты ряда в (1.7) условию $\alpha_{s0}{}^j{}_{p1} = \alpha_{0k}{}^j{}_{1q} = 0$, то получим непрерывное управление.

Здесь будем рассматривать для системы (1.2), (1.3) неаналитическое управление, которое существенно расширяет возможности стабилизации.

2. Будем использовать теорему [3] (см. также [6]), известную под названием «принцип сведения», которая дает возможность свести решение задачи об устойчивости полной системы (1.2), (1.3) к рассмотрению некоторой «укороченной» системы, соответствующей двум нулевым корням. Сформулируем принцип сведения для нашего случая. Подставляя управление $u(\xi, \eta, x)$ (1.7) в систему (1.2) — (1.3), получим

$$d\xi\,/\,dt = X'(\xi, \eta, x), \qquad d\eta\,/\,dt = Y'(\xi, \eta, x) \tag{2.1}$$

$$dx\,/\,dt = (A_0 + B_0 P)x + Z'(\xi, \eta, x) \tag{2.2}$$

Отбросим в правых частях уравнений (2.1) все члены, содержащие x_i, и получим, таким образом, укороченную систему

$$d\xi\,/\,dt = X'(\xi, \eta, 0), \qquad d\eta\,/\,dt = Y'(\xi, \eta, 0) \tag{2.3}$$

Предположим, что в разложениях функции X', Y' (2.1) наинизший порядок членов, зависящих от x_i ($i = 1,\ldots, n$), есть q, а наинизший порядок этих членов относительно x_i есть $r \leqslant q$.

Теорема 2.1. Предположим, что невозмущенное движение $\xi = \eta = 0$ для укороченной системы (2.3) устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво вне зависимости от членов выше N-го порядка, тогда, если разложения вектора $Z'(\xi, \eta, 0)$ начинается членами порядка не ниже p, где

$$p \geqslant \frac{N+1-q+r}{r} \tag{2.4}$$

то невозмущенное движение $\xi = \eta = x_i = 0$ для полной системы (2.1), (2.2) соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво.

Доказательство теоремы не будем излагать, так как оно в основных чертах повторяет доказательство теоремы для аналитической системы [3].

Для возможности применения принципа сведения к системе (2.1), (2.2) необходимо привести эти уравнения к такому виду, для которого разложения функций Z' (ξ, η, 0) начинались бы членами достаточно высокого порядка. Для этого сделаем преобразование Ляпунова

$$x_i = v_i + w_i \qquad (i = 1,\ldots, n) \tag{2.5}$$

Здесь v^i (ξ, η) — целые рациональные функции переменных ξ, η, удовлетворяющие системе уравнений с частными производными

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} X(\xi, \eta, v, u) + \frac{\partial v}{\partial \eta} Y(\xi, \eta, v, u) = A_0 v + B_0 u + a\xi + b\eta + Z(\xi, \eta, v, u) \tag{2.6}$$

где v — n-мерный вектор. Если управление (1.7) является аналитическим, т. е. при $p = q = 0$, то система (2.6) имеет единственное решение [3]. При неаналитическом управлении u (ξ, η, v) в формуле (1.7), подставляя его в систему (2.6), решение этой системы будем искать в виде формальных рядов

$$v_i = \sum_{p,\, q=0}^{1} \sum_{s+k=1}^{\infty} a^i_{skpq}\, \xi^s \eta^k \xi_*{}^p \eta_*{}^q \qquad \begin{pmatrix} i = 2, \ldots, n \\ s \geqslant 0,\ k \geqslant 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Системы (2.6) можно решать методом неопределенных коэффициентов. Подставляя (2.7) в (2.6), для определения коэффициентов a^i_{skpq} получим линейные алгебраические системы уравнений, определитель которых $| A_0 + B_0 P |$, согласно (1.6), не равен нулю [3,8]. Эти уравнения дадут возможность последовательно определить все коэффициенты a^i_{skpq} в разложениях величин v_i так, чтобы равенство (2.6) удовлетворялось тождественно по ξ, η, ξ_*, η_*. Такие ряды (2.7) для системы (2.6) всегда найдутся и притом вполне определенные во всем пространстве.

Если сумеем вычислить непрерывные решения v_i (2.7) для системы (2.6) до членов $s + k \leqslant (p - 1)$-го порядка, то после подстановки (2.5) в (2.2), и полагая $w_i \equiv 0$, получим, что исчезают все члены, имеющие относительно ξ, η порядок, меньше чем p. Таким образом, преобразование (2.1), (2.2) к системе, удовлетворяющей условиям теоремы, является возможным.

После подстановки уравнения (1.7) в уравнения (2.1) и замены вектора x через вектор v (2.7) получающаяся укороченная система запишется так: (2.8)

$$\frac{d\xi}{dt} = X_m(\xi, \eta) + X_{m+1}(\xi, \eta) + \ldots, \qquad \frac{d\eta}{dt} = Y_m(\xi, \eta) + Y_{m+1}(\xi, \eta) + \ldots \qquad (m \geqslant 2)$$

Здесь X_i (ξ, η), Y_i (ξ, η) ($i = m, m+1,\ldots$) — формы i-го порядка в виде

$$X_i(\xi, \eta) = \sum_{p,\, q=0}^{1} \sum_{s+k=i} l^{(i)}_{skpq}\, \xi^s \eta^k \xi_*{}^p \eta_*{}^q, \qquad Y_i(\xi, \eta) = \sum_{p,\, q=0}^{1} \sum_{s+k=i} h^{(i)}_{skpq}\, \xi^s \eta^k \xi_*{}^p \eta_*{}^q \tag{2.9}$$

коэффициенты которых подчиним условиям непрерывности, т. е.

$$l^{(i)}_{s0p1} = l^{(i)}_{0k1q} = 0, \quad h^{(i)}_{s0p1} = h^{(i)}_{0k1q} = 0 \tag{2.10}$$

Оставшиеся коэффициенты $l_{skpq}^{(i)}$, $h_{slpq}^{(i)}$ определенным образом зависят от коэффициентов $\alpha_{sl,pq}^{j}$ в (1.7).

Система (2.8) получается из системы (1.2) и (1.3) после преобразования (2.5), если затем положить $w_i \equiv 0$ и отбросить все уравнения, соответствующие некритическим корням. Итак, согласно принципу сводимости для решения задачи устойчивости полной системы (1.2) и (1.3), достаточно рассмотреть критические уравнения (2.8).

Составим две формы $(m+1)$-го порядка:

$$P_{m+1}(\xi, \eta) = \xi X_m(\xi, \eta) + \eta Y_m(\xi, \eta), \qquad (2.11)$$

$$Q_{m+1}(\xi, \eta) = \xi Y_m(\xi, \eta) - \eta X_m(\xi, \eta) \qquad (2.12)$$

3. Предположим сначала формы $Q_{m+1}(\xi, \eta)$ не знакоопределенными. В этом случае уравнение

$$Q_{m+1}(\xi, \eta) = \xi Y_m(\xi, \eta) - \eta X_m(\xi, \eta) = 0 \qquad (3.1)$$

имеет вещественные решения для ξ, η, не равные нулю одновременно. Уравнение (3.1), в левой части которого фигурируют функции вида (2.9), определяет одну или несколько ломаных прямых с точкой излома в начале координат. Ограничимся теми управлениями (1.7), при которых преобразование (2.5) является непрерывным, и для функции (2.9) удовлетворяют условию (2.10). Тогда в силу непрерывности поля скоростей для однородных уравнений

$$d\xi / dt = X_m(\xi, \eta), \qquad d\eta / dt = Y_m(\xi, \eta) \qquad (3.2)$$

каждая интегральная кривая этих уравнений, проходящая через начало координат, касается одной из ломаных прямых (3.1), так как, согласно определению (2.11) формы $Q_{m+1}^{*}(\xi, \eta)$ на каждой такой ломаной прямой имеет место тождество

$$\xi\, d\eta / dt - \eta\, d\xi / dt = 0$$

Потребуем, чтобы для формы (2.11) удовлетворялось условие

$$P_{m+1}(\xi, \eta) = \xi X_m(\xi, \eta) + \eta Y_m(\xi, \eta) = -\tau(\xi, \eta) \qquad (3.3)$$

Здесь $\tau(\xi, \eta)$ — определенно положительная функция из класса (2.9), которую можно взять в виде [9]

$$\tau(\xi, \eta) = \sum_{i+j=m+1} \beta_{ij}^{(m+1)} (\xi\xi_*)^i (\eta\eta_*)^j \qquad (\beta_{ij}^{(m+1)} > 0) \qquad (3.4)$$

Функцию Ляпунова, удовлетворяющую условиям теоремы об асимптотической устойчивости, построим в виде

$$2V = \xi^2 + \eta^2 \qquad (3.5)$$

Составим полную производную от этой функции в силу уравнений (3.2); получим

$$dV / dt = P_{m+1}(\xi, \eta)$$

Согласно выбору формы (3.3), удовлетворяющей условиям (3.4), производная dV / dt на каждой ломаной прямой принимает только отрицательные значения. Итак, справедливо [3-5] следующее утверждение.

Теорема 3.1. Стабилизация системы (2.8) обеспечена управлением (1.7), если коэффициенты $\alpha_{sl,pq}^{j}$, β_{ij}^{m+1} можно выбрать так, чтобы форма (2.11) не была знакоопределенной, и удовлетворялись условия (2.10), (3.4).

Замечание. Если $m = 2$ в (2.8), то функцию $\tau(\xi, \eta)$ вместо (3.4) можно взять более общей

$$\tau(\xi, \eta) = |\xi| \sum_{i+j=2} c_{ij}\xi^i\eta^j + |\eta| \sum_{i+j=2} c_{ij}^{*}\xi^i\eta^j \qquad (i \geqslant 0,\ j \geqslant 0)$$

где $|\xi| = \xi\xi_*$ — абсолютная величина, а коэффициенты удовлетворяют неравенствам Сильвестра

$$c_{20} > 0, \qquad 4c_{20}c_{02} - c_{11}^2 > 0, \qquad c_{20}^* > 0, \qquad 4c_{20}^*c_{02}^* - c_{11}^{*2} > 0$$

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема 3.2. Если хотя бы на одной полупрямой из ломаных прямых, определяемых уравнением (3.1), форма (2.11) может принимать положительные значения, то стабилизация управлением (1.7) системы (2.8) невозможна.

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что этой полупрямой является положительная ось ξ. В этом случае при $\eta = 0$ и $\xi > 0$ для коэффициентов (2.9) должны выполняться соотношения

$$l_{m000}^{(m)} + l_{m010}^{(m)} > 0, \qquad h_{m000}^{(m)} + h_{m010}^{(m)} = 0 \tag{3.6}$$

Функцию Четаева, отвечающую системе уравнений (2.8), можно взять в виде

$$2V = \xi^{2k} - \eta^2 \qquad (k > 0 \text{ и целое}) \tag{3.7}$$

Производная dV / dt в силу уравнения (2.8) получается

$$dV / dt = k\xi^{2k-1}X_m(\xi, \eta) - \eta Y_m(\xi, \eta) + \ldots \tag{3.8}$$

Рассмотрим область $(D) : \xi > 0$ и $|\eta| \leqslant \xi^k$. Функция V в области (D) будет $V \geqslant 0$. Знак производной dV / dt определяется выражением

$$k(l_{m000}^{(m)} + l_{m010}^{(m)})\xi^{2k} - (h_{m-1\,100}^{(m)} + h_{m-1\,110}^{(m)})\eta^2$$

В области (D) при условии (3.6) и достаточно большое k будет всегда положительным при любом выборе коэффициентов α_{skpq}^j (1.7). Таким образом, построенная функция V (3.7) удовлетворяет всем условиям теоремы Четаева о неустойчивости [3–5].

4. Рассмотрим случай когда форма $Q_{m+1}(\xi, \eta)$ будет знакоопределенной. По требованию знакоопределенности функции из класса (2.9) возьмем (2.11) в виде

$$Q_{m+1}(\xi, \eta) = \sum \gamma_{ij}^{(m+1)}(\xi\xi_*)^i(\eta\eta_*)^j \qquad (i + j = m + 1) \tag{4.1}$$

Подлежащие определению коэффициенты $\gamma_{ij}^{(m+1)}$ в (4.1) будем выбирать так, чтобы выполнялись условия

$$\gamma_{ij}^{(m+1)} > 0 \quad \text{или} \quad \gamma_{ij}^{(m+1)} < 0 \tag{4.2}$$

Однородные функции X_i, Y_i, P_{m+1}, Q_{m+1} здесь удобнее записать так:

$$X_i(\xi, \eta, |\xi|, |\eta|), \; Y_i(\xi, \eta, |\xi|, |\eta|), \ldots \tag{4.3}$$

При помощи подстановки $\xi = r\cos\theta$, $\eta = r\sin\theta$ $(r \geqslant 0)$ преобразуем систему (2.8) при (2.10) к следующему виду:

$$dr / dt = r^m P_{m+1}(\cos\theta, \sin\theta) + r^{m+1}P_{m+2}(\cos\theta, \sin\theta) + \ldots \tag{4.4}$$

$$d\theta / dt = r^{m-1}Q_{m+1}(\cos\theta, \sin\theta) + r^m Q_{m+2}(\cos\theta, \sin\theta) + \ldots \tag{4.5}$$

Здесь $P_{m+i}(\theta)$, $Q_{m+i}(\theta)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — функции $\cos\theta$, $\sin\theta$ вида (4.3), коэффициенты которых зависят от α_{skpq}^j согласно (1.7) и $\gamma_{ij}^{(m+1)}$ согласно (4.1).

Рассмотрим сначала случай, когда

$$g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P_{m+1}(\cos\theta, \sin\theta)}{Q_{m+1}(\cos\theta, \sin\theta)}\, d\theta \neq 0 \tag{4.6}$$

На основании одного свойства периодических функций будем иметь

$$\int_0^{\theta} \frac{P_{m+1}(\cos\theta, \sin\theta)}{Q_{m+1}(\cos\theta, \sin\theta)}\, d\theta = g\theta + f(\theta) \tag{4.7}$$

где $f(\theta)$ вследствие знакоопределенности функции $Q_{m+1}(\theta)$ является непрерывной периодической функцией. Вводим новую переменную

$$z = re^{-f(\theta)} \tag{4.8}$$

В качестве функции Ляпунова в этом случае можно взять

$$V = z \qquad (z \geqslant 0)$$

Производная dV / dt в силу уравнения (4.4), (4.5) и (4.8) запишется так:

$$dV/dt = gQ_{m+1}(\cos\theta, \sin\theta)\, z^m e^{(m-1)f(\theta)} + z^{m+1}P_{m+1}^{*}(\theta) + \ldots$$

где $P^*_{m+i}(\theta)$ — функции относительно $\cos\theta$, $\sin\theta$ вида (4.3). Итак пришли к следующему выводу [3-5].

Теорема 4.1. Стабилизация системы (2.8) будет обеспечена управлением (1.7), если коэффициенты α^j_{skpq} и $\gamma^{(m+1)}_{ij}$ могут быть выбраны при выполнении (2.10), (4.2) так, чтобы удовлетворялось неравенство $gQ_{m+1}(\cos\theta, \sin\theta) < 0$. Если при любом выборе коэффициентов α^j_{skpq}, $\gamma^{(m+1)}_{ij}$ выполняется неравенство $gQ_{m+1}(\cos\theta, \sin\theta) > 0$, то стабилизация управлением (1.7) невозможна.

Переходим к случаю, в котором постоянная $g = 0$. Производя замену $\rho = re^{-f(\theta)}$, преобразуем систему (4.4), (4.5) к новой переменной и из преобразованных уравнений исключением dt находим

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho^2 H_2(\theta) + \rho^3 H_3(\theta) + \ldots \tag{4.9}$$

где $H_k(\theta)$ — функции относительно $\cos\theta$, $\sin\theta$ вида (4.3). Решение уравнения (4.9) будем искать в виде ряда

$$\rho = c + c^2 u_2(\theta) + c^3 u_3(\theta) + \ldots \qquad (\rho(0, c) = c)$$

Здесь c — произвольная постоянная, $u_i(\theta)$ — периодическая функция θ, определяемая уравнениями

$$du_2 / d\theta = H_2(\theta) = R_2(\theta), \qquad du_3 / d\theta = H_3(\theta) + 2u_2(\theta) \;\; H_2(\theta) = R_3(\theta), \ldots$$

Если $u_k(\theta)$ $(k \leqslant N - 1)$ является первой непериодической функцией в последовательности $u_2, u_3, \ldots$, то она будет иметь вид

$$u_k(\theta) = g^*\theta + G(\theta) \qquad \left(g^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_k(\theta)\, d\theta \neq 0\right)$$

где $G(\theta)$ — периодическая функция.

Отсюда непосредственно убеждаемся [1,3—5] в справедливости следующей теоремы.

Теорема 4.2. Если можно выбрать коэффициенты α^j_{skpq}, $\gamma^{(m+1)}_{ij}$ при выполнении условий (2.10), (4.2) так, чтобы удовлетворялось неравенство $g^* Q_{m+1}(\theta) < 0$, то стабилизация системы (2.8) обеспечена управлением (1.7). Если удовлетворено неравенство $g^* Q_{m+1}(\theta) > 0$ при любом выборе коэффициентов α^j_{skpq}, $\gamma^{(m+1)}_{ij}$, то стабилизация системы (2.8) управлением (1.7) невозможна.

Автор благодарит В. В. Румянцева за ценные советы.

Поступила 1 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения, М., Гостехиздат, 1955.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Изд. 2-е, М., Наука, 1966.
4. Малкин И. Г. Некоторые вопросы теории устойчивости движения в смысле Ляпунова. Сб. научн. тр. Казан. авиац. ин-та, 1937, № 7.
5. Каменков Г. В. Об устойчивости движения. Сб. тр. Казан. авиац. ин-та, 1939, № 9.
6. Плисс В. А. О принципе сведения в теории устойчивости движения. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 5.
7. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. Первого конгресса ИФАК, т. 2, Изд-во АН СССР, 1961.
8. Гальперин Е. А., Красовский Н. Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
9. Гальперин Е. А. О стабилизации установившихся движений нелинейной управляемой системы в критическом случае пары чисто мнимых корней. ПММ, 1965, т. 29, вып 6.
10. Стоянов Н. В. О стабилизации установившихся движений нелинейной управляемой системы в критическом случае двойного нулевого корня. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.