О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ЛЯПУНОВА К ЛИНЕЙНЫМ СИСТЕМАМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В. Б. Колмановский (Москва)

Ряд авторов изучал свойства решений дифференциальных уравнений вида

$$x^{\cdot}(t) = -\int_0^\infty x(t-s)\, dK_0(t, s) \tag{1}$$

$$x^{\cdot\cdot}(t) = -\int_0^\infty x^{\cdot}(t-s)\, dK_1(t, s) - \int_0^\infty x(t-s)\, dK_2(t, s) \tag{2}$$

Здесь и далее символом $dK_i\,(t, s)$ обозначен дифференциал по второму аргументу. При этом, в основном, рассматривался случай сосредоточенного запаздывания, т. е. ступенчатых функций $K_i\,(t\,, s)$. Общий случай распределенного на конечном интервале $[0, s\,(t)]$ запаздывания впервые был рассмотрен А. Д. Мышкисом (см. [1]).

В работе [2] были получены условия устойчивости решений дифференциальных уравнений указанного вида в предположении, что ядра K_i зависят только от s, т. е. $K_i\,(t, s) \equiv K_i\,(s)$ и функции $K_i\,(s)$ имеют ограниченную вариацию на $[0, \infty)$.

Настоящая работа посвящена условиям устойчивости тривиальных решений уравнений вида (1) и (2).

Предполагается, что функции $K_i\,(t, s)$ удовлетворяют требованиям ограниченности изменения по s:

$$\sup_t \int_0^\infty |\, dK_i(t, s)\,| \leqslant \text{const} < \infty \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{3}$$

Решение $x\,(t)$ уравнения (1) (уравнения (2)) при $t > 0$ определяется заданной на $(-\infty, 0]$ функцией $\varphi\,(t)$ (функцией $\psi\,(t)$):

$$x\,(t) = \varphi\,(t), \qquad t \leqslant 0 \tag{4}$$

$$(x\,(t) = \psi\,(t),\;\; x^{\cdot}\,(t) = \psi^{\cdot}\,(t),\;\; t \leqslant 0) \tag{5}$$

Определение. Решение $x_1\,(t)$ задачи (1), (4) (решение $x_2\,(t)$ задачи (2), (5)) назовем устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta\,(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|\, x_1\,(t)\,| < \varepsilon \qquad \text{при } t \geqslant 0 \qquad (|\, x_2\,(t)\,| < \varepsilon \qquad \text{при } t \geqslant 0)$$

как только

$$\|\varphi\|_1 = \sup_{\theta \leqslant 0} |\,\varphi\,(\theta)\,| < \delta\,(\varepsilon) \qquad (\|\psi\|_2 = \sup_{\theta \leqslant 0} (|\,\varphi\,(\theta)\,| + |\,\psi^{\cdot}\,(\theta)\,|) < \delta\,(\varepsilon))$$

Если, кроме того, $x_i\,(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $i = 1, 2$, то решение назовем асимптотически устойчивым.

Обоснование общих теорем второго метода Ляпунова в применении к уравнениям с бесконечным запаздыванием получается дословным повторением доказательств соответствующих теорем для случая конечного запаздывания. Аналогичное замечание уже было сделано в [3]. По этой причине без доказательства приведем лишь одну теорему, являющуюся обобщением теоремы 31.3 работы [4], необходимую при исследовании. Рассмотрим заданное в n-мерном пространстве E_n уравнение

$$x^{\cdot}\,(t) = F\,(x\,(t + \theta),\; t) \tag{6}$$

где $F\,(x\,(\theta),\; t)$ при фиксированном t — непрерывный функционал, определенный на функциях $x\,(\theta)$ аргумента θ, меняющегося в пределах $-\infty < \theta \leqslant 0$, при фиксированном же $x\,(\theta)$ функция $F\,(x\,(\theta),\; t)$ по t непрерывна.

Предположим, что $F\,(\varphi,\; t) \equiv 0$ при $\varphi \equiv 0$ и

$$|\, F\,(x\,(\theta),\; t) - F\,(y\,(\theta),\; t)\,| \leqslant L\,\|\, x - y\,\| = L \sup_{\theta \leqslant 0} \sum_{i=1}^n |\, x_i\,(\theta) - y_i\,(\theta)\,|$$

Символом dV / dt обозначим

$$\overline{\lim_{\Delta t \to +0}} \frac{1}{\Delta t} [V(x(t+\theta+\Delta t),\ t+\Delta t) - V(x(t+\theta), t)]$$

где $x(t)$ решение системы (6).

Теорема 1. Тривиальное решение уравнения (6) асимптотически устойчиво, если существует непрерывный функционал $V(x(\theta), t)$, удовлетворяющий оценкам

$$V(x(\theta),\ t) \leqslant W_1(|x(0)|) + W_2(\|x(\theta)\|), \qquad W_1(0) = W_2(0) = 0 \tag{7}$$

$$V(x(\theta),\ t) \geqslant \omega(|x(0)|), \qquad |x(0)| = (\Sigma_i^2(0))^{1/2} \tag{8}$$

$$dV / dt \leqslant -f(|x(0)|) \tag{9}$$

Здесь непрерывные функции $W_1(r)$, $W_2(r)$ монотонны при $r \geqslant 0$, а непрерывные функции $\omega(r)$ и $f(r)$ положительны при $r > 0$.

Замечание. Тривиальное решение уравнения (6) устойчиво, если выполнены условия (7) и (8) предыдущей теоремы, а вместо условия (9) справедливо следующее:

$$dV / dt \leqslant 0 \tag{10}$$

Теорема 2. Пусть ядро $K_0(t, s)$ имеет в нуле скачок величины $K_0(t, 0)$, удовлетворяющий условию

$$\inf_t \left[2K_0(t, 0) - \int_{+0}^{\infty} |dK_0(t, s)| - \int_{+0}^{\infty} |dK_0(t+s, s)|\right] > 0 \qquad (t \geqslant 0) \tag{11}$$

Тогда тривиальное решение задачи (1), (6) асимптотически устойчиво, если

$$\sup_t \int_{+0}^{\infty} \int_{t-s}^{t} |dK_0(\tau+s, s)|\, d\tau \leqslant C < \infty$$

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$V(x(t+\theta), t) = x^2(t) + \int_{+0}^{\infty} \int_{t-s}^{t} |dK_0(\tau+s, s)|\, x^2(\tau)\, d\tau \tag{12}$$

Производная этого функционала по t вдоль траекторий системы (1)

$$\frac{dV(x(t+\theta), t)}{dt} \leqslant -x^2(t) \left[2K_0(t, 0) - \int_{+0}^{\infty} |dK_0(t, s)| - \int_{+0}^{\infty} |dK_0(t+s, s)|\right]$$

Отсюда из (11) и (12) на основании теоремы 1 следует справедливость теоремы 2.

Следствие. Утверждение теоремы 2 будет в силе, если условие (11) заменить следующим:

$$\inf_t K_0(t, 0) > \int_{+0}^{\infty} \sup_t |dK_0(t, s)| \qquad (t \geqslant 0)$$

Положим

$$K_{ij}(t, s) = \frac{1}{2}\left(\int_0^s |dK_i(t, \tau)| - (-1)^j K_i(t, s)\right) \qquad (j = 1,2)$$

Тогда

$$K_i(t, s) = K_{i1}(t, s) - K_{i2}(t, s) \qquad (i = 0, 1, 2) \tag{13}$$

Здесь $K_{ij}(t, s)$ — монотонно возрастающие по s при каждом фиксированном значении $t > 0$; причем предполагается $K_{ij}(t, s) \equiv 0$ при $t < 0$.

На основании (13) уравнения (1) и (2) могут быть переписаны в виде

$$x^{\cdot}(t)=-\int_0^\infty x(t-s)\,dK_{01}(t,s)+\int_0^\infty x(t-s)\,dK_{02}(t,s)\qquad x^{\cdot}(t)=y(t) \tag{14}$$

$$y^{\cdot}(t)=-\int_0^\infty y(t-s)\,dK_{11}(t,s)+\int_0^\infty y(t-s)\,dK_{12}(t,s)-$$
$$-\int_0^\infty x(t-s)\,dK_{21}(t,s)+\int_0^\infty x(t-s)\,dK_{22}(t,s) \tag{15}$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия

$$\sup_t\int_0^\infty\int_{t-s}^t dK_{01}(\tau+s,s)\,d\tau<1\qquad(t\geqslant 0) \tag{16}$$

$$\inf_t\Bigl[\int_0^\infty dK_{01}(t+s,s)-\int_0^\infty dK_{02}(t,s)-2\int_0^\infty dK_{02}(t+s,s)-$$
$$-\int_0^\infty s\,dK_{01}(t+s,s)\sup_t\int_0^\infty dK_{02}(t,s)-\int_0^\infty s\,dK_{01}(t+s,s)\sup_t\int_0^\infty dK_{01}(t,s)\Bigr]>0\qquad(t\geqslant 0)$$

Тогда тривиальное решение задачи (1), (4) асимптотически устойчиво, если

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{t-s_1}^t dK_{01}(\tau+s_1,s_1)\,d\tau\int_\tau^t dK_{0j}(\tau_1,s)\,d\tau_1\leqslant c<\infty$$
$$\int_0^\infty\int_{t-s}^t d\tau\int_\tau^t dK_{01}(\tau_1+s,s)\,d\tau_1\leqslant c\qquad\int_0^\infty\int_{t-s}^t dK_{02}(\tau+s,s)\,d\tau\leqslant c \tag{17}$$

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$V(x(t+\theta),t)=x^2(t)\Bigl[1-\int_0^\infty\int_{t-s}^t dK_{01}(\tau+s,s)\,d\tau\Bigr]+$$
$$+\int_0^\infty\int_{t-s}^t[x(t)-x(\tau)]^2\,dK_{01}(\tau+s,s)\,d\tau+$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{t-s_1}^t dK_{01}(\tau+s_1,s_1)\,d\tau\int_\tau^t[x(\tau)-x(\tau_1-s)]^2\,d\tau_1\,dK_{01}(\tau_1,s)+$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{t-s_1}^t dK_{01}(\tau+s_1,s_1)\,d\tau\int_\tau^t[x(\tau)+x(\tau_1-s)]^2\,d\tau_1\,dK_{02}(\tau_1,s)+$$
$$+\int_0^\infty\int_{t-s}^t[x(\tau)-x(\tau-s)]^2\,dK_{02}(\tau,s)+2\int_0^\infty\int_{t-s}^t x^2(\tau)\,dK_{02}(\tau+s,s)\,d\tau+$$
$$+\int_0^\infty\int_{t-s}^t d\tau\int_\tau^t x^2(\tau_1)\,dK_{01}(\tau_1+s,s)\,d\tau_1\sup_t\int_0^\infty dK_{02}(t,s)+$$
$$+\int_0^\infty\int_{t-s}^t d\tau\int_\tau^t x^2(\tau_1)\,dK_{01}(\tau_1+s,s)\,d\tau_1\sup_t\int_0^\infty dK_{01}(t,s)\qquad(t\geqslant 0) \tag{18}$$

Производная по t функционала (18) вдоль траекторий системы (15) удовлетворяет неравенству

$$\frac{dV(x(t+\theta),t)}{dt} \leqslant -\int_0^\infty x^2(t-s)\,|dK_0(t,s)|\left[1-\int_0^\infty\int_{t-s_1}^t dK_{01}(\tau+s_1,s_1)\,d\tau\right]-$$

$$-x^2(t)\left[\int_0^\infty dK_{01}(t+s,s)-\int_0^\infty dK_{02}(t,s)-2\int_0^\infty dK_{02}(t+s,s)-\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty s\,dK_{01}(t+s,s)\left(\sup_t\int_0^\infty dK_{01}(t,s)+\sup_t\int_0^\infty dK_{02}(t,s)\right)\right] \qquad (t\geqslant 0)$$

Отсюда из условий (16), (17) теоремы 3 и (18) на основании теоремы 1 и вытекает справедливость теоремы 3.

Теорема 4. Пусть ядро $K_1(t,s)$ уравнения (15) имеет в нуле скачок величины $K_{11}(t,0)$ и выполнены условия

$$\inf_t\int_0^\infty dK_2(t,s)>0 \qquad (t\geqslant 0) \tag{19}$$

$$\sup_t \varlimsup_{\Delta t\to+0}\left[\int_0^\infty dK_2(t+\Delta t,s)-\int_0^\infty dK_2(t,s)\right]\leqslant 0 \tag{20}$$

$$\inf_t\left[2K_{11}(t,0)-2\int_{+0}^\infty |dK_1(t,s)|-\int_0^\infty s\,|dK_2(t,s)|-\int_0^\infty\int_{t-s}^t d\tau\,|dK_2(\tau+s,s)|\right]\geqslant 0 \tag{21}$$

Тогда тривиальное решение задачи (2), (5) асимптотически устойчиво, если

$$\int_{+0}^\infty\int_{t-s}^t |dK_1(\tau+s,s)|\,d\tau\leqslant C<\infty$$

$$\int_0^\infty\int_{t-s}^t d\tau\int_\tau^t |dK_{2j}(\tau_1,s)|\,d\tau_1\leqslant C \qquad (j=1,2)$$

$$\int_0^\infty\int_{t-s}^t (t-\tau)\,|dK_2(\tau+s,s)|\,d\tau\leqslant C$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функционал

$$V(x(t+\theta),y(t+\theta),t)=\int_{+0}^\infty\int_{t-s}^t |dK_1(\tau+s,s)|\,y^2(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^\infty\int_{t-s}^t d\tau\int_\tau^t [y(\tau)-y(\tau_1)]^2\,d\tau_1\,dK_{21}(\tau_1,s)+$$

$$+\int_0^\infty\int_{t-s}^t d\tau\int_\tau^t [y(\tau)+y(\tau_1)]^2\,d\tau_1\,dK_{22}(\tau_1,s)+\int_0^\infty\int_{t-s}^t |dK_2(\tau+s,s)|\,d\tau\int_\tau^t y^2(\tau_1)\,d\tau_1+$$

$$+y^2(t)+x^2(t)\int_0^\infty dK_2(t,s) \tag{22}$$

Имеем

$$dV/dt\leqslant -y^2(t)\left[2K_{11}(t,0)-2\int_{+0}^\infty |dK_1(t,s)|-\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty s\,|dK_2(t,s)|-\int_0^\infty\int_{t-s}^t d\tau\,|dK_2(\tau+s,s)|\right]+$$

$$+x^2(t)\varlimsup_{\Delta t\to+0}\left[\int_0^\infty dK_2(t+\Delta t,s)-\int_0^\infty dK_2(t,s)\right]$$

Отсюда из условий теоремы 4 и (22) на основании теоремы 1 и вытекает утверждение теоремы.

Приемы, использованные при построении функционалов (18) и (22), дают возможность при помощи простых, но громоздких вычислений получить условия устойчивости решений уравнения (2) в общем случае, т. е. в случае ядер без скачка.

Пример 1. Система

$$x^{\cdot}(t) = -a(t)\,x(t) + b(t)\,x(t-\tau) \qquad (\tau \geqslant 0)$$

на основании теоремы 2 асимптотически устойчива, если

$$\inf_t a(t) > \sup_t |b(t)| \qquad (t \geqslant 0)$$

Пример 2. Система

$$x^{\cdot}(t) = a(t)\,x(t) - b(t)\,x(t-\tau) \qquad (a(t) > 0,\ b(t) > 0,\ \tau \geqslant 0)$$

на основании теоремы 3 асимптотически устойчива, если

$$\sup_t \int_{t-\tau}^{t} b(\tau + s)\,ds < 1 \qquad (t \geqslant 0)$$

$$\inf_t b(t) > \sup_t (3a(t) + \tau b(t+\tau) \sup_t a(t) + \tau b(t+\tau) \sup_t b(t))$$

В заключение автор благодарит Р. З. Хасьминского за поставленную задачу и постоянное внимание к работе.

Поступила 3 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
2. Колмановский В. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости линейных систем с запаздыванием. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1966, № 4, с. 58—65.
3. Hale G. Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional — differential equation. J. of diff. equat., 1965, vol. 1, No 4, pp. 452—482.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ДВОЙНОГО НУЛЕВОГО КОРНЯ ДЛЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ

Н. В. Стоянов

(София, Болгария)

Рассматривается задача о стабилизации установившихся движений нелинейной управляемой системы в критическом случае двух нулевых корней. Поставленная задача решается способом, опирающимся на теорию устойчивости движения [1–6] и методы, развитые в работах [7–9], при использовании неаналитического управления. Эта задача рассмотрена в [10] в случае, когда двойному нулевому корню отвечает одна группа решений первого приближения исходной системы. Здесь рассматривается второй случай,когда этому корню отвечают две группы решений.

1. Рассмотрим возмущенное движение управляемого объекта, описываемое системой

$$\frac{dy}{dt} = Ay + Bu + g(y, u) \qquad (y \in \{R^{n+2}\},\ u \in \{R^m\}) \tag{1.1}$$

Здесь y — $(n+2)$-мерный вектор возмущения; u — m-мерный вектор управления, которое будем считать невозмущенным помехами; A, B — постоянные матрицы — $(n+2) \times (n+2)$ и $(n+2) \times m$; $g(y, u)$ — аналитические нелинейности по y, u Все коэффициенты уравнений (1.1) предполагаются вещественными.