

О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ
НА РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ОСНОВАНИИ

Х. Л. Смолицкий (Ленинград)

Наличие интеграла уравнений движения гироскопа позволило выяснить ряд деталей траектории оси гироскопа. Рассмотрены различные приближения для этой траектории. Обсуждены численные методы определения траектории.

1. Пусть на равномерно вращающемся с угловой скоростью $\omega > 0$ основании установлен гироскоп в кардановом подвесе. Ось наружной рамки образует угол $1/2\pi - \varphi$ с осью вращения основания. Предполагается, что силы тяжести (ускорение ее g) направлено по оси наружной рамки, а центр тяжести гироблока смещен относительно оси вращения на величину $l = \omega\lambda$, пропорциональную угловой скорости основания. Основное внимание уделяется случаю $\lambda = 0$ — уравновешенному гироскопу.

Положение рамок определяется углами: α — угол поворота наружной рамки относительно основания ($\alpha = 0$ — оси гироскопа, наружной рамки и вращения основания лежат в одной плоскости); β — угол поворота внутренней рамки относительно наружной ($\beta = 0$ — плоскости рамок перпендикулярны).

Пусть I, I_0 — осевой и экваториальный моменты инерции ротора; I_{1x}, I_{1y}, I_{1z} — моменты инерции внутренней рамки относительно оси ротора, оси внутренней рамки, относительно оси, перпендикулярной первым двум; I_{2x}, I_{2y}, I_{2z} — моменты инерции наружной рамки относительно оси, перпендикулярной плоскости рамки, относительно оси внутренней рамки, относительно оси наружной рамки; m, Ω — масса и полная угловая скорость ротора. Введем безразмерные величины

$$P = \frac{I_0 + I_{1y}}{I}, \quad Q = \frac{I_0 + I_{1z} + I_{2z}}{I}, \quad R = \frac{I_0 + I_{1z} - I_{1x}}{I}$$

$$S = \frac{(I_{1z} - I_{1y}) + (I_{2x} - I_{2y})}{I}, \quad a = \frac{mgl}{I\Omega\omega} = \frac{mg\lambda}{I\Omega}, \quad \kappa = a - \sin\varphi$$

Обозначим через γ угол между осью вращения основания и осью гироскопа; имеем $\cos\gamma = \sin\varphi \sin\beta + \cos\varphi \cos\alpha \cos\beta$. Введем функции

$$\Phi(\alpha, \beta) = a \sin\beta - \cos\gamma = \kappa \sin\beta - \cos\varphi \cos\alpha \cos\beta$$

$$\Psi(\alpha, \beta) = 1/2 [R \cos^2\gamma + S \cos^2\varphi \sin^2\alpha],$$

$$p(\alpha, \beta) = (R - P) \cos\varphi \cos\alpha - 2R \cos\beta \cos\gamma$$

$$f(\beta) = Q - R \sin^2\beta \quad (f(\beta) > 0)$$

В последующем дифференцирование по времени t будем обозначать точкой, дифференцирование по α, β — штрихом. При этих обозначениях уравнения движения гироскопа могут записаны в виде

$$f(\beta) \alpha'' + f'(\beta) \alpha' \beta' + [\Omega \cos\beta + \omega p(\alpha, \beta)] \beta' + \omega [\Omega \Phi + \omega \Psi]_{\alpha}' = 0 \quad (1.1)$$

$$P\beta'' - 1/2 f'(\beta) \alpha'^2 - [\Omega \cos\beta + \omega p(\alpha, \beta)] \alpha' + \omega [\Omega \Phi + \omega \Psi]_{\beta}' = 0 \quad (1.2)$$

Будем изучать систему (1.1), (1.2) при начальных условиях

$$\alpha|_{t=0} = \alpha_0, \quad \beta|_{t=0} = \beta_0, \quad \alpha'|_{t=0} = \omega\chi_1, \quad \beta'|_{t=0} = \omega\chi_2 \quad (1.3)$$

где $\alpha_0, \beta_0, \chi_1, \chi_2$ — произвольные числа ($|\beta_0| < 1/2\pi$). Система (1.1), (1.2) имеет первый интеграл, для короткой записи которого введем функцию $F(\alpha, \beta) = \Omega\Phi + \omega\Psi$. Именно имеем

$$f(\beta) \alpha'^2 + P\beta'^2 = 2\omega [F_0 - F(\alpha, \beta)] + \omega^2 [f_0\chi_1^2 + P\chi_2^2] \quad (1.4)$$

$$f_0 = f(\beta_0), \quad F_0 = F(\alpha_0, \beta_0)$$

В силу неотрицательности левой части (1.4) и предположенной положительности ω следует, что движение гироскопа происходит так, что точка (α, β) плоскости $\alpha\beta$ остается в области G_ω , определяемой неравенством $F_0 - F(\alpha, \beta) + 1/2 \omega [f_0\chi_1^2 + P\chi_2^2] \geq 0$.

Эту область в последующем будем называть потенциальной ямой. Всегда будем считать $\omega \ll |\Omega|$. В силу этого потенциальная яма мало отличается от области G_0 , определяемой неравенством $\Omega (\Phi_0 - \Phi(\alpha, \beta)) \geq 0$, ($\Phi_0 = \Phi(\alpha_0, \beta_0)$).

Так как функции $\Phi(\alpha, \beta)$ и $\Psi(\alpha, \beta)$ 2π -периодичны и четны относительно α , то области G_ω, G_0 симметричны относительно прямых $\alpha = k\pi$ (k — целое число).

Заметим, что при изменении знака Ω на противоположный область G_0 заменяется на дополнительную часть плоскости $\alpha\beta$. С другой стороны, можно считать очевидным, что от направления вращения ротора движение оси гироскопа зависит незначительно. Из сопоставления этих двух фактов следует, что гироскоп движется так, что точка (α, β) находится вблизи границы области G_0 и тем самым вблизи края потенциальной ямы.

В уравнениях (1.1), (1.2) перейдем от независимой переменной t к новой переменной τ , полагая $t = \omega\tau$. Введем малый параметр $\mu = \omega / \Omega$. Тогда задача (1.1) — (1.3) примет вид

$$\left(\cos \beta \frac{d\beta}{d\tau} + \Phi_{\alpha'} \right) + \mu \left[f(\beta) \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} + f'(\beta) \frac{d\alpha}{d\tau} \frac{d\beta}{d\tau} + p \frac{d\beta}{d\tau} + \Psi_{\alpha'} \right] = 0 \quad (1.5)$$

$$\left(-\cos \beta \frac{d\alpha}{d\tau} + \Phi_{\beta'} \right) + \mu \left[P \frac{d^2\beta}{d\tau^2} - \frac{1}{2} f'(\beta) \left(\frac{d\alpha}{d\tau} \right)^2 - p \frac{d\alpha}{d\tau} + \Psi_{\beta'} \right] = 0 \quad (1.6)$$

$$\alpha|_{\tau=0} = \alpha_0, \quad \beta|_{\tau=0} = \beta_0; \quad \frac{d\alpha}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \chi_1, \quad \frac{d\beta}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \chi_2 \quad (1.7)$$

а вместо интеграла (1.4) запишем теперь равенство

$$\Phi(\alpha, \beta) - \Phi_0 = \mu \left\{ \Psi_0 - \Psi(\alpha, \beta) + \frac{1}{2} [f_0 \chi_1^2 + P \chi_2^2] - \frac{1}{2} \left[f(\beta) \left(\frac{d\alpha}{d\tau} \right)^2 + P \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 \right] \right\} \quad (1.8)$$

Система (1.5), (1.6) содержит малый параметр μ при старших производных. Полагая $\mu = 0$ и удерживая в (1.7) лишь первые два условия, придем к следующей задаче для определения предельной траектории:

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{\Phi_{\beta'}}{\cos \beta}, \quad \frac{d\beta}{d\tau} = -\frac{\Phi_{\alpha'}}{\cos \beta}, \quad \alpha|_{\tau=0} = \alpha_0, \quad \beta|_{\tau=0} = \beta_0 \quad (1.9)$$

В силу уравнений (1.9) следует, что $\Phi_{\alpha'} \alpha' + \Phi_{\beta'} \beta' = 0$, т. е. линия $\Phi(\alpha, \beta) = \Phi_0$ содержит предельную траекторию. Задача (1.9) была получена в другой форме и решена в статье [1] для случая $a = 0$ и в статьях [2, 3] для $a \neq 0$. Эту траекторию будем называть кинематической, так как она не содержит никакой информации о моментах инерции рамок, гироскопа и его угловой скорости. В случае $a = 0$ кинематическая траектория имеет следующий смысл: в начальный момент ось гироскопа фиксирует в инерциальном пространстве некоторое направление, отвечающее заданным α_0, β_0 ; при последующем вращении основания рамки вращаются так, что ось гироскопа удерживает заданное направление в инерциальном пространстве.

Обозначим через χ_1^* и χ_2^* значения правых частей уравнений (1.9) в точке (α_0, β_0) . Движение гироскопа с начальными условиями (1.3) для $\chi_1 = \chi_1^*, \chi_2 = \chi_2^*$ назовем движением с компенсирующим начальным толчком. Для случая $a = 0$ при компенсирующем начальном толчке ось гироскопа в начальный момент имеет нулевую скорость по отношению к инерциальному пространству. В работе [1] изучается именно этот случай и утверждается высокая точность кинематической траектории. В случае $a = 0$ для кинематической траектории имеем $\gamma = \gamma_0$.

Для точек действительной траектории левая часть равенства (1.8) записывается как $\cos \gamma_0 - \cos \gamma$, что по модулю меньше, чем $|\gamma - \gamma_0|$. Поэтому модуль правой части (1.8) можно рассматривать как оценку снизу для ошибки в работе гироскопа в любой момент τ , если известны $\alpha(\tau), \beta(\tau), d\alpha/d\tau, d\beta/d\tau$. Предполагая, что для действительной траектории с компенсирующим толчком последние величины отличаются от

аналогичных для кинематической траектории на величины, не превышающие $C\mu$ ($C = \text{const}$) и пренебрегая величинами порядка μ^2 , найдем

$$\cos \gamma_0 - \cos \gamma \approx \frac{\mu}{2} \left\{ S \cos^2 \varphi (\sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha) + \left[\frac{Q - R}{\cos^2 \beta_0} - (P - R) \right] (\sin \varphi \cos \beta_0 - \cos \varphi \cos \alpha_0 \sin \beta_0)^2 - \left[\frac{Q - R}{\cos^2 \beta} - (P - R) \right] (\sin \varphi \cos \beta - \cos \varphi \cos \alpha \sin \beta)^2 \right\} \quad (1.10)$$

Здесь (α, β) — точка кинематической траектории

$$\sin \varphi \sin \beta + \cos \varphi \cos \alpha \cos \beta = \cos \gamma_0$$

Правая часть обращается в нуль тождественно для безынерционных рамок ($P = Q = R, S = 0$), а также в моменты $\tau = 0$ и $\tau = 2\pi$ в случае тяжелых рамок. К обсуждению формулы (1.10) с другой точки зрения придем ниже.

Если в некоторой точке (α^0, β^0) кинематической траектории $\Phi(\alpha, \beta) = \Phi_0$ имеет место неравенство

$$\Psi_0 - \Psi(\alpha^0, \beta^0) \mp \frac{1}{2} [f_0 \chi_1^2 \mp P \chi_2^2] < 0 \quad (1.11)$$

то в этой точке правая часть (1.4) отрицательна и, следовательно, точка (α^0, β^0) не лежит в потенциальной яме; поэтому она не может принадлежать действительной траектории. Приведем такие примеры. Движение для $\chi_1 = \chi_2 = 0$ назовем движением разарретированного гироскопа. В случае $a = 0$ в точках кинематической траектории имеет место равенство $2(\Psi_0 - \Psi(\alpha, \beta)) = S \cos^2 \varphi (\sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha)$. Отсюда следует, что для разарретированного гироскопа с несмещенным гироскопом неравенство (1.11) имеет место почти во всех точках кинематической траектории в следующих случаях

$$(a) S > 0, \quad \alpha_0 = 0; \quad (b) S < 0, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \pi$$

Обозначая $\eta = \text{sign } \Omega$, найдем

$$\eta (\cos \gamma - \cos \gamma_0) \geq \frac{1}{2} |\mu| S \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha \quad \text{в случае (a),}$$

$$\eta (\cos \gamma - \cos \gamma_0) \geq \frac{1}{2} |\mu S| \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha \quad \text{в случае (б)}$$

Эти формулы дают достоверную оценку снизу для ошибки разарретированного гироскопа. В случае, если $0 < \gamma_0 < \frac{1}{2} \pi$, следует, что при $\eta = \mp 1$ ось гироскопа приближается к оси вращения основания, при $\eta = -1$ — удаляется.

Если $S \neq 0$ и $\alpha_0 \neq 0$ и $\alpha_0 \neq \frac{1}{2} \pi$, то можно указать такие участки кинематической траектории, которые не лежат в потенциальной яме, и тогда имеют место аналогичные оценки.

Линия $F(\alpha, \beta) = F_0$ всегда находится в потенциальной яме, проходит через точку (α_0, β_0) , и, по-видимому, если на ней задать расписание движения, может служить хорошим приближением к действительной траектории. Такую линию назовем потенциальной траекторией.

Чтобы задать расписание движения по ней, можно записать дифференциальные уравнения типа (1.9), заменив числители на $(\Phi_\beta' \mp \mu \Psi_\beta')$ и $-(\Phi_\alpha' \mp \mu \Psi_\alpha')$ соответственно, а знаменатель на величину, близкую к $\cos \beta$. Последнее можно сделать по-разному, исходя из тех или иных соображений. Если исходить из требования, чтобы для случая $a = 0$ и безынерционных рамок ($P = Q = R, S = 0$) дифференциальные уравнения превращались в уравнение (1.9), то знаменатель достаточно выбрать равным $\cos \beta \mp \frac{1}{2} \mu r(\alpha, \beta)$, хотя из вида уравнений (1.1), (1.2) следует, что «упрощенными» уравнениями ([4], стр. 100) будут те, в которых знаменатель равен $\cos \beta \mp \mu r(\alpha, \beta)$.

2. Кинематические траектории изучены в статьях [1] — для $a = 0$ и [2,3] — для $a \neq 0$. Поэтому в нашей статье они будут описаны весьма кратко. Кинематические траектории являются линиями уровня функции $\Phi(\alpha, \beta)$. Ограничиваясь областью $|\beta| \leq \frac{1}{2} \pi, -\frac{1}{2} \pi < \alpha \leq \pi$ и считая $\cos \varphi > 0$, из уравнений $\Phi_\alpha' = \Phi_\beta' = 0$ найдем

следующие стационарные точки функции $\Phi(\alpha, \beta)$:

- 1) $\alpha = 0, \beta = -\arctg \frac{\kappa}{\cos \varphi}; \Phi = -\Phi^0 = -\sqrt{\kappa^2 + \cos^2 \varphi}$ (точка минимума)
- 2) $\alpha = \pi, \beta = \arctg \frac{\kappa}{\cos \varphi}; \Phi = \Phi^0 = \sqrt{\kappa^2 + \cos^2 \varphi}$ (точка максимума)
- 3) $\alpha = \frac{1}{2}\pi, \beta = \pm \frac{1}{2}\pi; \Phi = \pm \kappa$ (седловая точка)

На фиг. 1 изображены линии $\Phi = \text{const}$ для случаев $\kappa > 0, \kappa = 0, \kappa < 0$. В случае $\kappa = 0$ эти линии замкнуты; в случае $\kappa \neq 0$ имеются и разомкнутые: именно, линия $\Phi(\alpha, \beta) = \Phi(\alpha_0, \beta_0)$ будет разомкнута, если $|\Phi(\alpha_0, \beta_0)| < |\kappa|$, и замкнута, если $|\kappa| \leq |\Phi(\alpha_0, \beta_0)| < \Phi^0$. На фиг. 1 стрелки на линиях указывают направление возрастания τ . Уравнение (1.9) интегрируются в конечном виде. Именно, пусть $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ — две точки такого участка кинематической траектории $\Phi(\alpha, \beta) = \Phi(\alpha_0, \beta_0) = \Phi_0$, на котором $\sin \alpha$ сохраняет знак, и пусть τ_1 и τ_2 — два соответствующих значения τ . Тогда легко получить:

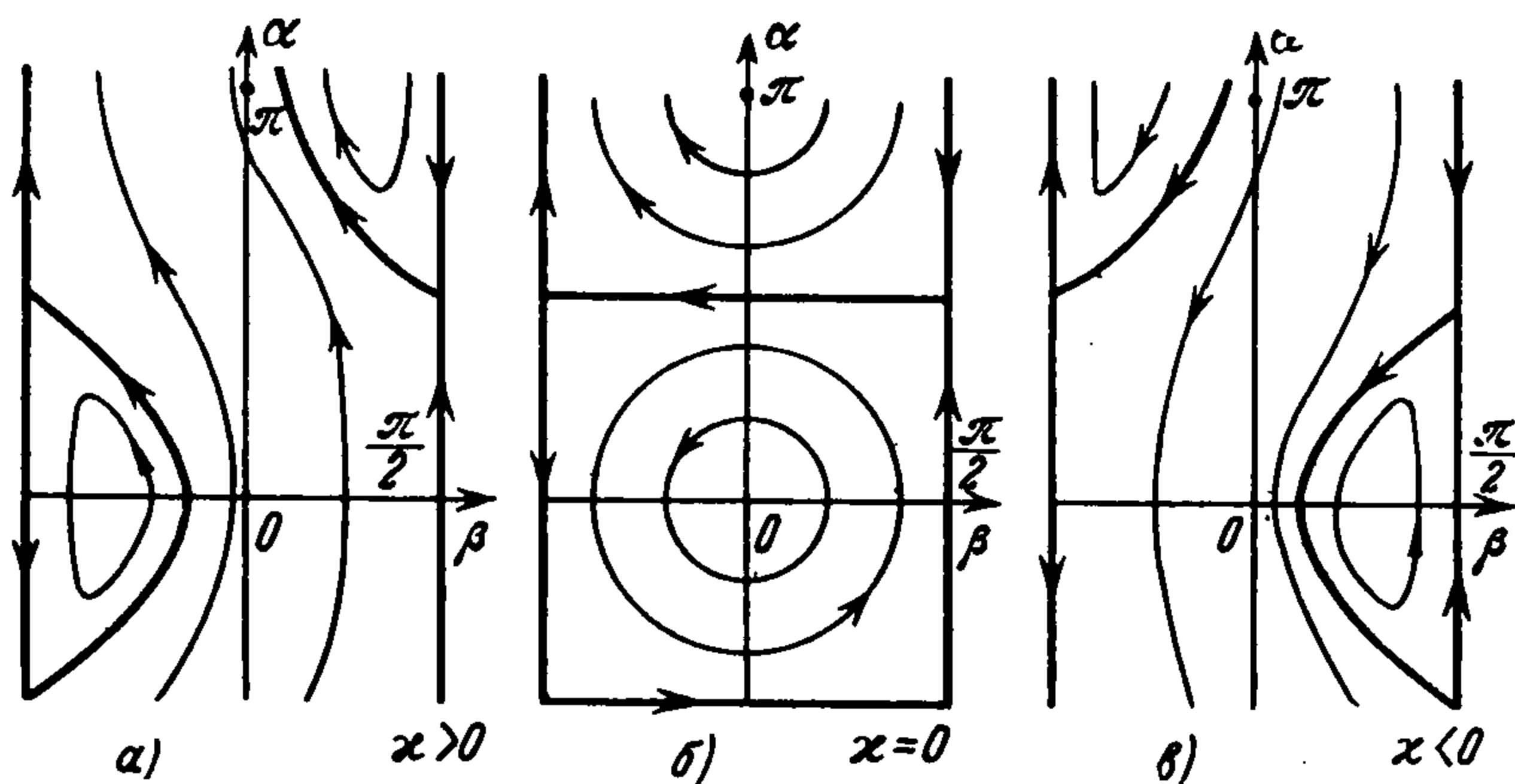
$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{-\text{sign} \sin \alpha}{\Phi^0} \left[\arcsin \frac{\Phi^0 \sin \beta_2 - \kappa \Phi_0}{\cos \varphi \sqrt{\Phi^0^2 - \Phi_0^2}} - \arcsin \frac{\Phi^0 \sin \beta_1 - \kappa \Phi_0}{\cos \varphi \sqrt{\Phi^0^2 - \Phi_0^2}} \right]$$

Учитывая симметричность кинематической траектории относительно прямых $\alpha = k\pi$ (k — целое), а также принимая во внимание обращение в ± 1 выражения под знаком \arcsin в точках пересечения траектории с этими прямыми, легко получаем время полного возвращения рамок гироскопа в исходное положение

$$T = \frac{2\pi}{\omega \Phi^0} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - 2a \sin \varphi + a^2}}$$

совпадающее, естественно, в случае $a = 0$ с временем $2\pi / \omega$ одного полного поворота основания.

3. Попробуем выяснить детали действительного движения гироскопа. Заметим



Фиг. 1

сначала, что при $\omega = 0$ задача (1.1) — (1.3) имеет единственное решение $\alpha \equiv \alpha_0, \beta \equiv \beta_0$. Предполагая, что решение этой задачи для достаточно малых $|\omega|$ разлагается в ряды

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \omega^k$$

$$\beta(t) = \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) \omega^k$$

найдем следующую систему линейных уравнений и начальных условий для определения $\alpha_1(t), \beta_1(t)$:

$$f_0 \alpha_1'' + (\Omega \cos \beta) \beta_1' = -\Omega \Phi_{\alpha_0}', \quad (-\Omega \cos \beta) \alpha_1' + P \beta_1'' = -\Omega \Phi_{\beta_0}' \quad (3.1)$$

$$\alpha_1(0) = \beta_1(0) = 0, \quad \alpha_1'(0) = \chi_1, \quad \beta_1'(0) = \chi_2$$

$$(\Phi_{\alpha_0}' = \Phi_{\alpha}'(\alpha_0, \beta_0) = -\chi_2^* \cos \beta_0, \quad \Phi_{\beta_0}' = \Phi_{\beta}'(\alpha_0, \beta_0) = \chi_1^* \cos \beta_0)$$

В обозначениях $M_1 = \sqrt{f_0} (\chi_1 - \chi_1^*), M_2 = \sqrt{P} (\chi_2 - \chi_2^*)$ решение задачи (3.1) примет вид

$$\alpha_1(t) = \chi_1^* t + \frac{1}{A \sqrt{f_0}} [M_1 \sin At - M_2 (1 - \cos At)]$$

$$\beta_1(t) = \chi_2^* t + \frac{1}{A \sqrt{P}} [M_2 \sin At + M_1 (1 - \cos At)]$$

$$(A = \Omega \cos \beta_0 / \sqrt{P f_0})$$

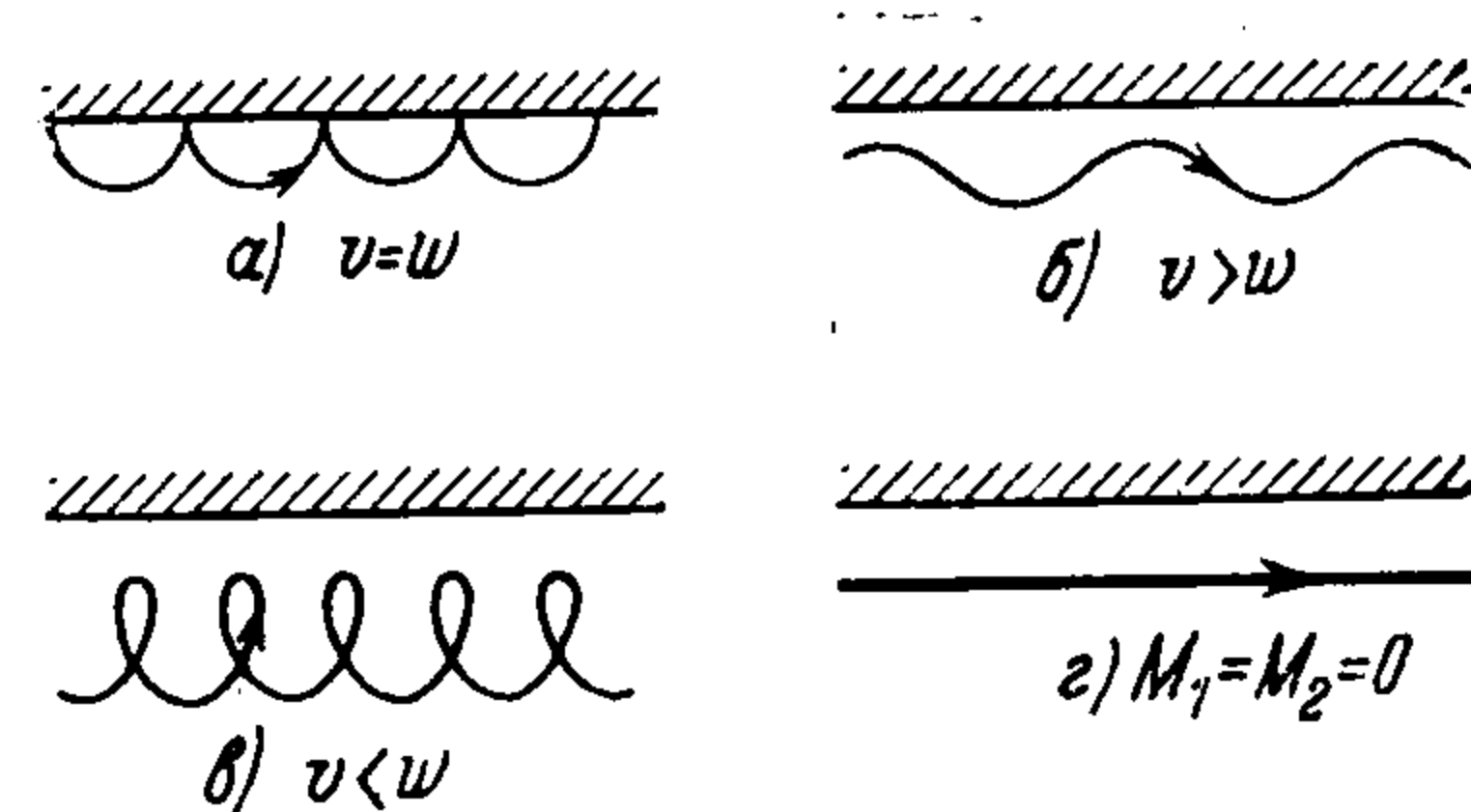
Здесь $2\pi / |A|$ — предел периода нутационных колебаний рамок в точке β_0 при условии, что их амплитуда стремится к нулю.

Это решение означает, что точка $\alpha = \alpha_0 + \omega\alpha_1(t)$, $\beta = \beta_0 + \omega\beta_1(t)$ движется на плоскости (α, β) так: эллипс с полуосями $\omega\sqrt{M_1^2 + M_2^2}(|A|f_0)^{-1}$, $\omega\sqrt{M_1^2 + M_2^2}(|A|\sqrt{P})^{-1}$, параллельными осями α и β , движется поступательно со скоростью компенсирующего толчка $(\omega\chi_1^*, \omega\chi_2^*)$, и одновременно по эллипсу движется точка (α, β) , пробегая весь эллипс за время $2\pi / |A|$ одного нутационного колебания. Система (3.1) имеет первый интеграл

$$f_0\alpha'^2 + P\beta'^2 = \omega \{2\omega [\Phi'_{\alpha_0} (\alpha_0 - \alpha) + \Phi'_{\beta_0} (\beta_0 - \beta)] + \omega (f_0\chi_1^2 + P\chi_2^2)\}$$

определяющий потенциальную яму в виде полуплоскости. Очевидно, что если в двух точках $(\alpha^{(1)}, \beta^{(1)})$, $(\alpha^{(2)}, \beta^{(2)})$ ямы скорости (α', β') параллельны, то модуль скорости больше в точке, более удаленной от края ямы.

В двух положениях скорость перемещения по эллипсу параллельна скорости поступательного движения эллипса, причем модули этих скоростей на эллипсе равны, а направления противоположны. В одном из положений скорость движения по эллипсу совпадает по направлению с поступательной скоростью, в другом — противоположна; в первом положении полная скорость по модулю больше, чем во втором, и следовательно, первая точка дальше от края потенциальной ямы, чем вторая.



Фиг. 2

На фиг. 2 показаны возможные типы движений, причем заштрихована полуплоскость, дополнительная яме; обозначая через v и w модули скоростей поступательного движения эллипса и движения по эллипсу в отмеченных точках имеем в случае (а) $v = w$, в случае (б) $v > w$, в случае (в) $v < w$; в этих случаях предполагается $M_1^2 + M_2^2 > 0$; случай (г) изображает движение при $M_1 = M_2 = 0$ (компенсирующий толчок).

Таким образом, за один период $T_1 = 2\pi / |A|$ нутационных колебаний точка (α, β) из начального положения (α_0, β_0) переместится в точку $(\alpha_0 + \omega\chi_1^* T_1, \beta_0 + \omega\chi_2^* T_1)$; т. е. передвинется в направлении касательной к кинематической траектории. Предполагая $|\mu| = \omega / |\Omega|$ очень малой, будем считать, что точка переместилась просто по кинематической траектории в некоторую точку $\alpha_0^\circ, \beta_0^\circ$ и т. д. Таким образом, если отвлечься от нутационных колебаний, то точка (α, β) движется дискретно по кинематической траектории, причем средняя скорость каждого перескока равна скорости компенсирующего толчка в соответствующей точке траектории. Для такого описания движения уместны разностные уравнения. Если вместо разностных уравнений написать их непрерывный аналог, то приходим вновь к задаче (1.9), определяющей кинематическую траекторию. Во всем последующем предполагается, что действительная траектория для задачи (1.1) — (1.3) имеет вид, указанный на фиг. 3; заштрихована область, дополнительная к потенциальной яме.

4. Пусть (α_0, β_0) такова, что соответствующая кинематическая траектория $\Phi(\alpha, \beta) = \Phi_0$ далека от стационарных точек функции $\Phi(\alpha, \beta)$. Тогда для достаточно малых $|\mu|$ в некоторой полосе, окружающей кинематическую траекторию, нет стационарных точек функции $F(\alpha, \beta)$. Через каждую точку этой полосы проходит линия $F = \text{const}$, для которой касательный вектор $(\Omega^{-1}F'_\beta, -\Omega^{-1}F'_\alpha)$ образует острый угол с направлением кинематической траектории.

Пусть $\alpha(t), \beta(t)$ — решение задачи (1.1) — (1.3) и пусть для некоторого t_0 функция $\delta(t) = F(\alpha(t), \beta(t))$ достигает относительного экстремума. Точку $(\alpha(t_0), \beta(t_0))$ назовем отмеченной точкой первого рода, если этот экстремум — минимум, отмеченной точкой второго рода — в случае максимума. Если точка траектории лежит на краю ямы, то она будет отмеченной точкой второго рода, и траектория имеет в этой точке острие. Из соображений, приведенных для модельной задачи (3.1), заключаем, что в отмеченных точках первого рода вектор скорости $(\alpha'(t_0), \beta'(t_0))$ совпадает по на-

правлению с касательной к линии $F = \text{const}$. В отмеченных точках второго рода, не лежащих на краю ямы, указанные направления могут совпадать или быть противоположными (фиг. 3).

Пусть внутренняя точка (α, β) ямы будет отмеченной точкой первого рода действительной траектории. Тогда, с одной стороны, имеет место равенство (1.4), с другой,

$$\alpha' = k\Omega^{-1} F_{\beta}' \quad \beta' = -k\Omega^{-1} F_{\alpha}' \quad (k > 0)$$

Введем обозначение

$$H(\alpha, \beta) = f(\beta) (F_{\beta}')^2 + P(F_{\alpha}')^2$$

$$B = \left(\frac{2\omega [F_0 - F(\alpha, \beta)] + \omega^2 (f_0 \chi_1^2 + P \chi_2^2)}{H} \right)^{1/2} \quad (\eta = \text{sign } \Omega)$$

Тогда

$$\alpha' = \eta B F_{\beta}', \quad \beta' = -\eta B F_{\alpha}' \quad (4.1)$$

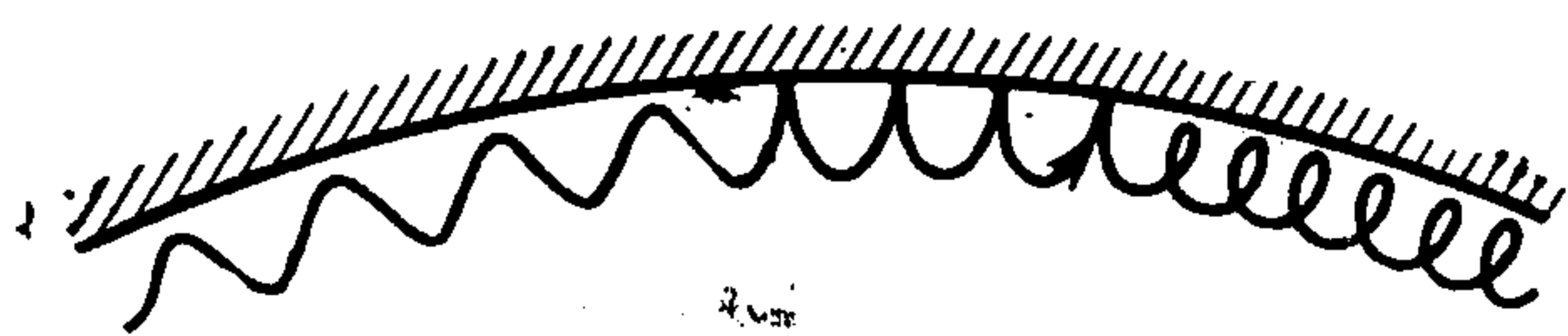
Далее имеем

$$\frac{dF}{dt} = F_{\alpha}' \alpha' + F_{\beta}' \beta', \quad \frac{d^2F}{dt^2} = F_{\alpha\alpha}'' \alpha'^2 + 2F_{\alpha\beta}'' \alpha' \beta' + F_{\beta\beta}'' \beta'^2 + F_{\alpha}'' \alpha'' + F_{\beta}'' \beta''$$

Заменяя α'' , β'' их выражениями, найденными из (1.1), (1.2) соответственно, учитывая также формулы (4.1), найдем, что в отмеченных точках первого рода имеет место равенство

$$2Pf(\beta) \frac{d^2F}{dt^2} = -2\omega H + 2\eta (\Omega \cos \beta + \omega p) HB + \\ + B^2 \{ 2Pf(\beta) [F_{\alpha\alpha}'' (F_{\beta}')^2 - 2F_{\alpha\beta}'' F_{\alpha}' F_{\beta}' + F_{\beta\beta}'' (F_{\alpha}')^2] + f'(\beta) F_{\beta}' [2P(F_{\beta}')^2 + f(\beta) (F_{\beta}')^2] \}$$

Здесь правая часть — известная функция от α , β . Обозначим ее через $K(\alpha, \beta)$



Фиг. 3

Так как в отмеченных точках первого рода имеем $d^2F/dt^2 \geq 0$, то в этих точках имеем $K(\alpha, \beta) \geq 0$. С другой стороны, на краю потенциальной ямы в силу $B = 0$ имеем $K = -2\omega H < 0$; в силу непрерывности $K(\alpha, \beta)$ это же неравенство справедливо в некоторой полосе у края ямы и, следовательно,

в этой полосе нет отмеченных точек первого рода. Легко видеть, что при $\omega \rightarrow 0$

$$\frac{K(\alpha, \beta)}{\sqrt{\omega}} \rightarrow 2 \cos \beta \sqrt{\frac{2\Omega [\Phi_0 - \Phi(\alpha, \beta)]}{f(\beta) (\Phi_{\beta}')^2 + P(\Phi_{\alpha}')^2}} > 0$$

в каждой внутренней точке области G_0 , и, следовательно, для достаточно малых ω в области G_ω имеются точки, для которых $K > 0$. Таким образом, линия $K = 0$ отделяет отмеченные точки первого рода от края ямы. Если во всех отмеченных точках второго рода некоторого участка действительной траектории вектор (α', β') совпадает по направлению с вектором $(\Omega^{-1} F_{\beta}', -\Omega^{-1} F_{\alpha}')$, то в этих точках обязательно, $K \leq 0$, и, следовательно, линия $K = 0$ пересекает многократно действительную траекторию и является хорошим приближением к ней. Линию $K = 0$ назовем энергетической траекторией, поскольку в ней учтена энергия начального толчка в виде $f_0 \chi_1^2 + P \chi_2^2$.

К недостаткам этой траектории следует отнести такие обстоятельства: 1) неизвестно «расписание» движения по этой траектории, поскольку она не определена уравнениями типа (1.9); 2) эта траектория, вообще говоря, не проходит через начальную точку (α_0, β_0) ; 3) если в отмеченных точках второго рода некоторого участка действительной траектории вектор (α', β') противоположен по направлению вектору $(\Omega^{-1} F_{\beta}', -\Omega^{-1} F_{\alpha}')$, то в этих отмеченных точках может оказаться $K > 0$, и тогда этот участок действительной траектории лежит по одну сторону от энергетической траектории, и она отделяет тогда действительную траекторию от края ямы. Так, например, для модельной задачи (3.1) отмеченные точки первого и второго рода лежат по разные

стороны энергетической траектории в том и только том случае, когда

$$\sqrt{M_1^2 + M_2^2} \leq 2 \sqrt{f_0 \chi_1^{*2} + P \chi_2^{*2}}$$

т. е. когда $|\chi_1 - \chi_1^*|$, $|\chi_2 - \chi_2^*|$ [не велики по сравнению с $|\chi_1^*|$, $|\chi_2^*|$].

Заметим, что при выполнении всех следующих условий: а) $P = Q = R$, $S = 0$ (например безынерционные рамки), б) $a = 0$ (несмещенный ротор), в) $\chi_1 = \chi_1^*$, $\chi_2 = \chi_2^*$ (компенсирующий толчок) для точек кинематической траектории $\Phi(\alpha, \beta) = \Phi_0$ имеет место равенство $K = 0$. В общем случае, рассматривая уравнение $K = 0$ как квадратное относительно B , найдем один из корней B_1 , который положителен и стремится к нулю при $\omega \rightarrow 0$. Поэтому уравнение энергетической траектории можно также записать в виде

$$\Phi(\alpha, \beta) - \Phi_0 = -NB_1^2 / 2\omega\Omega + \mu(\Psi_0 - \Psi(\alpha, \beta)) + 1/2\mu(f_0\chi_1^2 + P\chi_2^2)$$

причем разложение по степеням первого слагаемого правой части начинается так:

$$\frac{NB_1^2}{2\omega\Omega} = \frac{\mu}{2} \left[f(\beta) \left(\frac{\Phi_{\beta'}}{\cos \beta} \right)^2 + P \left(\frac{\Phi_{\alpha'}}{\cos \beta} \right)^2 \right] + \dots$$

Отсюда следует, что формулу (1.8), в которой $d\alpha/d\tau$ и $d\beta/d\tau$ заменены правыми частями (1.9), можно рассматривать как приближенное уравнение (с точностью до μ^2) энергетической траектории.

Предполагая, что энергетическая траектория очень близка к действительной, найдем в случае $a = 0$ оценку ошибки в работе гироскопа. Для этого левую часть только что описанного приближенного уравнения траектории заменим через $\cos \gamma_0 - \cos \gamma_2$, а в правой части заменим α, β величинами для кинематической траектории. В результате получим аналог формулы (1.10)₂ получающийся прибавлением в фигурной скобке формулы (1.10) одного слагаемого $[f_0(\chi_1^2 - \chi_1^{*2}) + P(\chi_2^2 - \chi_2^{*2})]$.

5. Лишь для определенности все последующие рассуждения будем проводить для случая $a = 0$, $\kappa = -\sin \varphi > 0$, $|\Phi(\alpha_0, \beta_0)| < \kappa$ (кинематическая траектория незамкнута, α возрастает).

Кинематические, потенциальные, энергетические траектории симметричны относительно прямых $\alpha = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Можно доказать, что действительная траектория симметрична относительно прямой $\alpha = j\pi$ (j — целое), если $\beta = 0$ в момент пересечения траекторией этой прямой; тогда эта точка траектории является отмеченной. Очевидно, что небольшим изменением начальных данных можно добиться того, чтобы траектория, близкая к рассматриваемой, имела на прямой $\alpha = j\pi$ отмеченную точку. В этом смысле действительную траекторию можно считать приближенно симметричной относительно прямых $\alpha = j\pi$. Поэтому, если, например, $0 < \alpha_0 < \pi$, то сначала следует найти отрезок траектории $\alpha_0 \leq \alpha \leq \pi$ и отразить его симметрично относительно прямой $\alpha = \pi$ на участок $\pi \leq \alpha \leq 2\pi - \alpha_0$, затем находим самостоятельно отрезок траектории для $2\pi - \alpha_0 \leq \alpha \leq 2\pi$ по начальным данным $\alpha = 2\pi - \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\alpha' = -\alpha'_0 = -\omega\chi_1$, $\beta' = \beta'_0 = \omega\chi_2$ и продолжаем отражение дальше в прямой $\alpha = 2\pi$ и т. д.

Пусть (α_k, β_k) и t_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) — последовательность всех отмеченных точек первого рода и времен их прохождения для некоторой действительно траектории. Пусть точка с номером N наиболее близка к $(\alpha_0 + 2\pi, \beta_0)$. Тогда t_N естественно объявить временем полного возвращения гироскопа в исходное положение. Ломаную, соединяющую последовательно точки (α_k, β_k) , назовем отмеченной траекторией первого рода. Аналогично можно рассматривать отмеченную траекторию второго рода как соединяющую точки второго рода. Действительная траектория лежит в полосе между отмеченными траекториями первого и второго рода, а за время $2\pi/\omega$ одного полного оборота основания образует в этой полосе примерно $2\pi/10\omega$ нутационных петель (если считать $\cos \beta > 1/2$ на траектории и $Pf(\beta)$ величиной порядка от 1 до 5). Если считать, что ротор совершает 1000 оборотов в секунду, и решается задача о гироскопе на земной поверхности, то речь идет примерно о $9 \cdot 10^6$ нутационных колебаниях. Для решения задачи (1.1) — (1.3) каким-либо численным методом (Рунге-Кутта, Адамса — Штермера и т. д.) разумно шаг по времени выбрать так, чтобы в пределах одного нута-

ционного колебания укладывалось несколько шагов (от 10 до 40), что приводит к $45 \cdot 10^6$ шагам, если решать задачу для полутраектории и выбирать лишь по 10 шагов на одно нутационное колебание. По-видимому, постановка такой задачи на существующих ЦВМ нереальна как по необходимому машинному времени, так и по тому доверию, которые могут заслуживать окончательные результаты.

Заметим, что тема данной статьи возникла в результате обсуждения с Н. В. Бутениным возможностей решения задачи (1.1) — (1.3) на ЦВМ. Отметим, что в статье [5] приведены некоторые результаты численного решения обсуждаемой задачи.

Итак, определение полной действительной траектории является задачей трудоемкой и, по-видимому, ненужной. Ниже предлагается метод приближенного определения полосы между отмеченными траекториями.

Обозначим через G_{ω}^+ область, в которой выполняется неравенство $K > 0$. Если точка (α_0, β_0) лежит в G_{ω}^+ , а $\alpha'_0 = \omega\chi_1$, $\beta'_0 = \omega\chi_2$ удовлетворяют уравнениям (4.1) для $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, то начальная точка (α_0, β_0) будет первой отмеченной точкой первого рода искомой траектории. Если (α_0, β_0) таковой не является, то каким-либо методом численного интегрирования задачи (1.1) — (1.3) (с шагом, значительно меньшим периода нутационных колебаний) находим первую отмеченную точку первого рода (по изменению знака с минуса на плюс у величины $F_{\alpha}'\alpha + F_{\beta}'\beta$).

Пусть теперь каким-либо путем найдена некоторая точка (α^0, β^0) области G_{ω}^+ и утверждается, что она является отмеченной точкой первого рода искомой траектории, или лежит близко от таковой. Тогда по формулам (4.1), полагая $\alpha = \alpha^0$, $\beta = \beta^0$, находим α° , β° и методом численного интегрирования системы (1.1), (1.2) с начальными условиями α° , β° , α° , β° находим отрезок траектории длиной 5—10 нутационных колебаний. В памяти фиксируются лишь координаты отмеченных точек первого и второго рода, времена прохождения этих точек, а также направления скоростей в отмеченных точках второго рода. Координаты и времена прохождения точек первого рода обрабатываются (например по методу наименьших квадратов) с целью найти вектор (r, s) средней скорости перемещения отмеченной точки первого рода. По этому вектору (r, s) и времени t_1 (в котором укладывается 100—200 периодов нутационных колебаний) находим точку $\alpha^{\circ} = \alpha^0 + rt_1$, $\beta^{\circ} = \beta^0 + st_1$. Если точка $(\alpha^{\circ}, \beta^{\circ})$ принадлежит области G_{ω}^+ , то $(\alpha^{\circ}, \beta^{\circ})$ принимается за новую приближенную отмеченную точку первого рода искомой траектории. Если $(\alpha^{\circ}, \beta^{\circ})$ не принадлежит области G_{ω}^+ , то проверяется на принадлежность и область G_{ω}^+ , точка $(\alpha^{\circ} + \frac{1}{2}rt_1, \beta^{\circ} + \frac{1}{2}st_1)$ и т. д. Когда так найдена точка из области G_{ω}^+ , то повторяется этап определения средней скорости перемещения точки первого рода и экстраполяции. Фиксирование в памяти машины координат и направлений скорости в отмеченных точках второго рода позволит получить представление о ширине полосы, занятой траекторией, а также о характере нутационных петель.

В настоящей работе расчеты не проводились. Можно думать, что экспериментальные расчеты полной действительной траектории и полосы между отмеченными надо проводить для сравнительно не малых значений μ (порядка $0.0001 \div 0,01$).

Автор признателен Н. В. Бутенину, М. К. Гавурину, Я. Л. Лунцу за критические замечания и интерес к работе.

Поступила 25 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л. О движении свободного гироскопа при равномерном вращении основания. Изв. высш. учебн. завед. Приборостроение, 1963, т. 6, № 5, стр. 75—83.
2. Бутенин Н. В. Астатический гироскоп с сухим трением в осях карданова подвеса, установленный неподвижно на Земле. Изв. высш. учебн. завед. Приборостроение, 1964, т. 7, № 2, стр. 99—106.
3. Бутенин Н. В., Лестев А. И. К теории гирополукомпаса. Изв. высш. учебн. завед. Приборостроение, 1964, т. 7, № 4, стр. 96—102.
4. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. М., Гостехиздат, 1956.
5. Бунатян Л. А. Движение свободного гироскопа на подвижном основании с учетом масс колец карданова подвеса. Докл. АН СССР, 1963, т. 152, № 2, стр. 305—308.