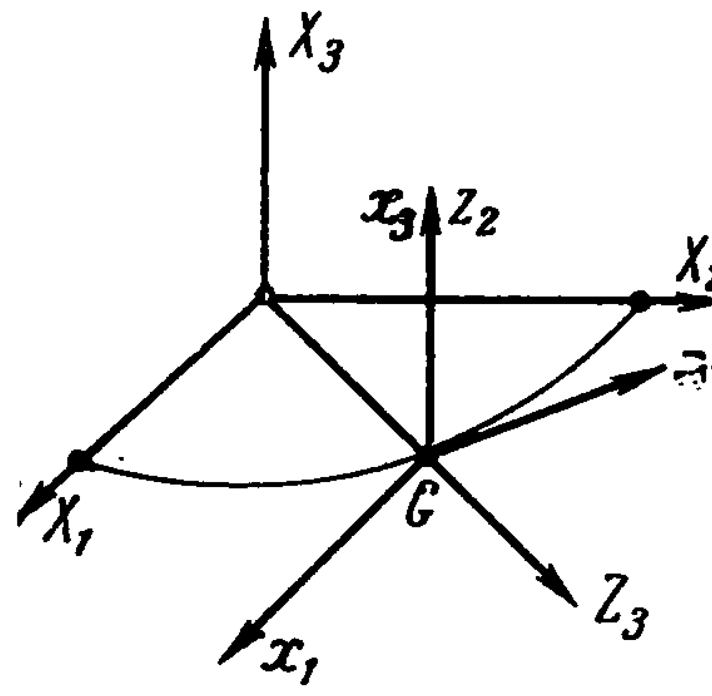
ДВИЖЕНИЕ ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС НАМАГНИЧЕННОГО ЭКВАТОРИАЛЬНОГО СПУТНИКА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МАГНИТНОГО И ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЕЙ ЗЕМЛИ

А. А. Хентов (Москва)

Магнитное поле Земли может весьма существенно сказываться на движении намагниченного космического аппарата вокруг своего центра масс. В ряде работ, например [1–3], анализировалась возможность пассивной стабилизации такого спутника по силовой линии геомагнитного поля.

Вопросы, рассматриваемые в настоящей статье, примыкают к классическим задачам о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном и ньютоновском поле сил.

§ 1. Уравнения движения. Введем абсолютную правую геоцентрическую систему координат $X_1X_2X_3$ (фигура), ось X_3 которой совпадает с осью вращения Земли. В центре масс спутника G выберем еще три правых репера: $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$ и $z_1z_2z_3$. Оси x_i соответственно параллельны осям X_i; y_j — главные центральные оси инерции спутника. Ось z_3 орбитальной системы координат z_k совпадает с радиусом-вектором центра масс спутника, а z_1 — с трансверсалью орбиты (i, j, k = 1, 2, 3).



Положение триедра y_j в осях x_i и z_k определим матрицами направляющих косинусов γ_{ji} и α_{jk} соответственно, причем, очевидно, что $\gamma_{13} = \alpha_{12}$, $\gamma_{23} = \alpha_{22}$ и $\gamma_{33} = \alpha_{32}$.

Примем дипольную модель магнитного поля Земли. Тогда при предположении о совпадении географических и геомагнитных полюсов для вектора магнитной напряженности этого поля будем иметь $\mathbf{H} = \mu_e \mathbf{n} / R^3$, согласно [4].[Здесь μ_e —постоянная Земного магнетизма, R — радиус-вектор центра масс стутника, $\mathbf{n}$ — единичный вектор оси x_3.

Будем считать, что магнитный момент спутника $\mathbf{I}^\circ$ складывается из постоянной составляющей $\mathbf{I}$ и магнитного момента оболочки. Направляющие косинусы вектора $\mathbf{I}$ с осями триедра y_j обозначим через η_j.

Оболочку спутника предположим геометрически симметричной и намагниченной вдоль оси симметрии. Примем, что ось симметрии оболочки совпадает с какой-либо главной осью инерции спутника, например, с y_3. Магнитный момент оболочки в этом случае в первом приближении, согласно [5,6], можно записать, как $\zeta\gamma_{33} / H$, где $\zeta = (\mu_0 - 1)\, v H^2 / 4\pi$, а μ_0 и v — магнитная проницаемость и объем оболочки.

В магнитном поле с напряженностью $\mathbf{H}$ на такой спутник будет действовать момент магнитных сил $\mathbf{M} = \mathbf{I}^\circ \times \mathbf{H}$. Момент гравитационных сил запишем согласно [2]. Другими моментами пренебрежем. Орбиту считаем заданной. Уравнения движения спутника около центра масс в такой ограниченной задаче имеют вид

$$A_1 dp_1 / dt + (A_3 - A_2)\, p_2 p_3 = IH\,(\eta_2\gamma_{33} - \eta_3\gamma_{23}) - \zeta\gamma_{23}\gamma_{33} + 3\delta\,(A_3 - A_2)\alpha_{23}\alpha_{33} \quad (1.1)$$

$$A_2 dp_2 / dt + (A_1 - A_3)\, p_1 p_3 = IH\,(\eta_3\gamma_{13} - \eta_1\gamma_{33}) + \zeta\gamma_{13}\gamma_{33} + 3\delta\,(A_1 - A_3)\,\alpha_{13}\alpha_{33}$$

$$A_3 dp_3/dt + (A_2 - A_1)\, p_1 p_2 = IH\,(\eta_1\gamma_{23} - \eta_2\gamma_{13}) + 3\delta\,(A_2 - A_1)\alpha_{13}\alpha_{23}$$

Здесь A_1, A_2, A_3 — моменты инерции спутника относительно осей y_1, y_2, y_3 соответственно; p_1, p_2, p_3 — проекции абсолютной угловой скорости спутника на те же оси; μ — гравитационная постоянная; $\delta = \mu / R^3$.

Дополним систему (1.1) соотношениями Пуассона для направляющих косинусов

$$d\gamma_{13} / dt = \gamma_{23}p_3 - \gamma_{33}p_2 \quad (123) \qquad (1.2)$$

$$d\alpha_{13} / dt = \alpha_{23}p_3 - \alpha_{33}p_2 + \omega\alpha_{11} \quad (123) \qquad (1.3)$$

$$d\alpha_{11} / dt = \alpha_{21}p_3 - \alpha_{31}p_2 - \omega\alpha_{13} \quad (123) \qquad (1.4)$$

Здесь символ (123) означает, что остальные соотношения получаются круговой перестановкой, ω — угловая скорость вращения центра масс спутника по орбите.

Если орбита круговая, то система (1.1) — (1.4) допускает существование интеграла типа Якоби

$$A_1p_1^2 + A_2p_2^2 + A_3p_3^2 - 2\mathrm{I}\cdot\mathrm{H} - \zeta\ \gamma_{23}^2 + 3\omega^2(A_1\alpha_{13}^2 + A_2\alpha_{23}^2 + A_3\alpha_{33}^2) - 2\omega(A_1p_1\gamma_{13} + A_2p_2\gamma_{23} + A_3p_3\gamma_{33}) = h \tag{1.5}$$

Этому интегралу можно придать ясный физический смысл, если перейти к угловым скоростям q_1, q_2, q_3 относительно орбитальных осей. Получим

$$A_1q_1^2 + A_2q_2^2 + A_3q_3^2 - 2\mathrm{I}\cdot\mathrm{H} - \zeta\,\gamma_{23}^2 + 3\omega^2(A_1\alpha_{13}^2 + A_2\alpha_{23}^2 + A_3\alpha_{33}^2) - \omega^2(A_1\gamma_{13}^2 + A_2\gamma_{23}^2 + A_3\gamma_{33}^2) = h \tag{1.6}$$

Это соотношение дает закон сохранения энергии в виде $T + V_1 + V_2 + V_3 = h$, где T — кинетическая энергия в относительном движении, V_1 — потенциальная энергия магнитных сил, V_2 — потенциальная энергия гравитационных сил, V_3 — потенциальная энергия центробежных сил.

Других интегралов рассматриваемая система, по-видимому, не имеет.

§ 2. **Вращение спутника в магнитном поле.** Для некоторых спутников магнитные моменты могут быть основными, а действие гравитационного поля можно относить к возмущениям. С этой точки зрения интересна задача о движении спутника только в поле магнитных сил. В отсутствии гравитационных моментов можно выписать еще один первый интеграл, отражающий постоянство проекции кинетического момента спутника относительно его центра масс на ось x_3. Этот интеграл имеет вид

$$A_1p_1\gamma_{13} + A_2p_2\gamma_{23} + A_3p_3\gamma_{33} = K \tag{2.1}$$

Перепишем (1.5) и (2.1), вводя обычным способом углы Эйлера нутации θ, прецессии ψ и собственного вращения φ для определения спутника в осях x_i. Получим

$$A_1(\psi^\cdot \sin\theta\sin\varphi + \theta^\cdot\cos\varphi)^2 + A_2(\psi^\cdot\sin\theta\cos\varphi - \theta^\cdot\sin\varphi)^2 + A_3(\psi^\cdot\cos\theta + \varphi^\cdot)^2 - 2IH(\eta_1\sin\theta\sin\varphi + \eta_2\sin\theta\cos\varphi + \eta_3\cos\theta) - \zeta\cos^2\theta = h$$

$$A_1(\psi^\cdot\sin\theta\sin\varphi + \theta^\cdot\cos\varphi)\sin\theta\sin\varphi + A_2(\psi^\cdot\sin\theta\cos\varphi - \theta^\cdot\sin\varphi)\sin\theta\cos\varphi + A_3(\psi^\cdot\cos\theta + \varphi^\cdot)\cos\theta = K$$

Координата ψ является циклической. Рассмотрим стационарные вращения спутника, определяемые условиями

$$\varphi^\cdot = \theta^\cdot = 0, \qquad \varphi = \varphi_0, \qquad \theta = \theta_0, \qquad \psi^\cdot = \psi_0^\cdot \tag{2.2}$$

Для исследования этих вращений применим теорему Рауса [7,8]. Потенциал Рауса П для рассматриваемой склерономной системы имеет вид

$$\Pi = K_0^2 / 2a - IH(\eta_1\sin\theta\sin\varphi + \eta_2\sin\theta\cos\varphi + \eta_3\cos\theta) - \zeta\cos^2\theta / 2$$

$$a = A_1\sin^2\theta\sin^2\varphi + A_2\sin^2\theta\cos^2\varphi + A_3\cos^2\theta$$

Здесь K_0 означает интеграл кинетического момента, подсчитанный при условиях (2.2). Углы φ_0 и θ_0 определяются из выражений $\partial\Pi / \partial\varphi = 0$ и $\partial\Pi / \partial\theta = 0$, которые имеют вид

$$[(A_1 - A_2)\psi_0^{\cdot 2}\sin\theta\sin 2\varphi + 2IH(\eta_1\cos\varphi - \eta_2\sin\varphi)]\sin\theta = 0$$

$$(b\psi_0^{\cdot 2} - \zeta)\sin 2\theta + 2IH[(\eta_1\sin\varphi + \eta_2\cos\varphi)\cos\theta - \eta_3\sin\theta] = 0 \tag{2.3}$$

$$b = A_1\sin^2\varphi + A_2\cos^2\varphi - A_3$$

Эти уравнения выделяют перманентные оси в теле спутника. Для устойчивости вращений вокруг этих осей потенциал Рауса должен иметь минимум. Достаточные условия устойчивости таковы:

$$(A_1 - A_2)\psi_0^{\cdot 2}\sin^2\theta(-\cos 2\varphi + B_1\sin^2\theta\sin^2 2\varphi) + IH\sin\theta(\eta_1\sin\varphi + \eta_2\cos\varphi) > 0$$

$$[(A_1 - A_2)(-\cos 2\varphi + B_1\sin^2\theta\sin^2 2\varphi)\psi_0^{\cdot 2}\sin^2\theta + IH\sin\theta(\eta_1\sin\varphi + \eta_2\cos\varphi)][b\psi_0^{\cdot 2}(-\cos 2\theta + b_1\sin^2 2\theta) + \zeta\cos 2\theta + IH(\eta_1\sin\theta\sin\varphi + \eta_2\sin\theta\cos\varphi + \eta_3\cos\theta)] + [B_2\psi_0^{\cdot 2}(1 - 2b_1\sin^2\theta)\sin 2\theta\sin 2\varphi + IH\cos\theta \times (\eta_1\cos\varphi - \eta_2\sin\varphi)]^2 > 0$$

$$B_1 = (A_1 - A_2) / a, \qquad B_2 = (A_1 - A_2) / 2, \qquad b_1 = b / a$$

Движение динамически симметричного спутника ($A_1 = A_2 \neq A_3$) около своего центра масс эквивалентно вращению динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки в ньютоновском центральном поле сил, когда расстояние до центра притяжения значительно превосходит размеры тела. Такая задача допускает полную интеграцию [2].

Если магнитный момент оболочки спутника мал по сравнению с магнитным моментом I, то движение спутника около центра масс будет близко к движению тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

Действительно, если пренебречь намагничиванием оболочки, то уравнения вращения спутника с точностью до обозначений совпадают с уравнениями вращения тяжелого твердого тела.

Случай, аналогичный случаю Эйлера, получается, если I равно нулю. Динамически симметричный спутник с магнитным моментом, направленным по оси его динамической симметрии, движется так же, как тяжелое твердое тело в случае Лагранжа — Пуассона; если же магнитный момент лежит в экваториальной плоскости центрального эллипсоида инерции спутника и выполнено условие $A_1 = A_2 = 2A_3$, то движение такого спутника аналогично движению тяжелого твердого тела в случае Ковалевской.

В работах [9–11] подробно рассмотрены стационарные вращения тяжелого твердого тела.

В случае постоянно намагниченного спутника уравнение конуса, аналогичного конусу Штауде, имеет вид

$$(A_2 - A_3)\,\eta_1\gamma_{23}\gamma_{33} + (A_3 - A_1)\,\eta_2\gamma_{13}\gamma_{33} + (A_1 - A_2)\,\eta_3\gamma_{13}\gamma_{23} = 0$$

Рассмотрим, например, такое частное решение системы (1.1), (1.2)

$$p_j = 0, \qquad \gamma_{j3} = \eta_j$$

Этому частному решению соответствует равновесие спутника в абсолютных осях, при котором его магнитный момент коллинеарен вектору магнитной напряжённости (аналогия в движении твердого тела — равновесие, при котором центр тяжести занимает наинизшее положение). Очевидно, что такое равновесие должно быть устойчивым.

Докажем это, используя интеграл (1.5). Обозначим угол между вектором магнитного момента спутника **I** и вектором **H** через ν и разложим $\cos\nu$ в ряд Тейлора. Вставляя разложение в (1.5), получаем

$$A_1 p_1^2 + A_2 p_2^2 + A_3 p_3^2 + IH\nu^2 + \Delta = h^\circ \qquad (h^\circ = h + 2\,IH)$$

Здесь Δ — сумма членов порядка выше третьего относительно ν. В этой форме интеграл представляет собой положительно определенную функцию своих аргументов. Следовательно, рассматриваемое равновесие действительно устойчиво по p_j и ν.

Очевидно, что другое возможное равновесие, при котором векторы **I** и **H** антипараллельны, неустойчиво (аналогия в движении твердого тела — равновесие, при котором центр тяжести занимает наивысшее положение).

§ 3. Движение спутника при взаимодействии магнитного и гравитационного полей. Предположим, что вектор **I** совпадает с осью y_3 спутника.

Исследуем возможность равновесия спутника в абсолютных осях. Как это следует из системы (1.1), для осуществления такого равновесия необходимо одновременное выполнение следующих равенств:

$$(IH + \zeta\gamma_{33})\,\gamma_{23} - 3\delta\,(A_3 - A_2)\,\alpha_{23}\alpha_{33} = 0$$
$$(IH + \zeta\gamma_{33})\,\gamma_{13} + 3\delta\,(A_1 - A_3)\,\alpha_{13}\alpha_{33} = 0$$
$$(A_2 - A_1)\,\alpha_{13}\alpha_{23} = 0$$

Это значит, что абсолютное равновесие возможно только, если ось y_3 является осью динамической симметрии спутника и совпадает с нормалью к плоскости орбиты.

Рассмотрим теперь прецессии спутника, при которых он сохраняет неизменное положение в орбитальных осях. Из системы (1.1) получаем необходимые условия существования такого относительного равновесия (круговая орбита)

$$\{IH + [\zeta + (A_3 - A_2)\,\omega^2]\,\alpha_{32}\}\,\alpha_{22} - 3\omega^2\,(A_3 - A_2)\,\alpha_{23}\alpha_{33} = 0$$

$$\{IH + [\zeta - (A_1 - A_3)\,\omega^2]\,\alpha_{32}\}\,\alpha_{12} + 3\omega^2\,(A_1 - A_3)\,\alpha_{13}\alpha_{33} = 0$$

$$(A_2 - A_1)\,(-\alpha_{12}\alpha_{23} + 3\,\alpha_{13}\alpha_{23}) = 0$$

Отметим некоторые возможные режимы прецессии.

Режим $\alpha_{13} = \pm 1, \alpha_{32} = \pm 1$. Ось y_3 вертикальна.

Режим $\alpha_{12} = \alpha_{13} = 0$. Ось y_3 находится в плоскости z_2z_3, а ось y_1 нормальна к этой плоскости. При этом

$$\cos\nu = -IH \,/\, [4\omega^2\,(A_3 - A_2) + \zeta]$$

Режим $\alpha_{12} = \alpha_{23} = 0$. Ось y_3 находится в плоскости z_1z_2, а ось y_1 нормальна к этой плоскости. При этом

$$\cos\nu = -IH \,/\, [4\omega^2(A_3 - A_2) + \zeta]$$

Режим $\alpha_{22} = \alpha_{13} = 0$. Ось y_3 находится в плоскости z_1z_2, а ось y_2 нормальна к этой плоскости. При этом

$$\cos\nu = -IH \,/\, [\omega^2\,(A_3 - A_1) + \zeta]$$

Режим $\alpha_{22} = \alpha_{23} = 0$. Ось y_3 находится в плоскости z_2z_3, а ось y_2 нормальна к этой плоскости. При этом

$$\cos\nu = -IH \,/\, [4\omega^2\,(A_3 - A_1) + \zeta]$$

Исследуем устойчивость относительного равновесия спутника, при котором его магнитный момент коллинеарен вектору магнитной напряженности (режим $\alpha_{13} = 1$)

Используем интеграл (1.6), записанный в виде

$$A_1\,q_1^2 + A_2q_2^2 + A_3q_3^2 - 2IH\gamma_{33} + \zeta\,(\gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2) + 3\omega^2\,[(A_2 - A_1)\,\alpha_{23}^2 + (A_3 - A_1)\,\alpha_{33}^2] + \omega^2\,[(A_3 - A_1)\,\gamma_{13}^2 + (A_3 - A_2)\,\gamma_{23}^2] = h_1$$

Разлагая γ_{33} в ряд Тейлора, устанавливаем, что это равновесие устойчиво, если $A_3 > A_2 > A_1$. Таким образом, если ось y_3 спутника нормальна к плоскости орбиты и ей соответствует наибольший из моментов инерции, условия устойчивости относительного равновесия имеют такой же вид, как и в отсутствие магнитного поля [2]. Моменты магнитных сил улучшают практическую устойчивость (условие $A_3 > A_2$ можно заменить более слабым $\zeta + \omega^2\,(A_3 - A_2) > 0$).

Режимы регулярной прецессии динамически симметричного спутника в гравитационном поле рассмотрены в работе [12].

Автор благодарит В. В. Белецкого за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fischell R. E. Passive Magnetic Attitude Control for Earth Satellites. 8 Annual Meet. of the Am. Astr. Soc., 1962.
2. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
3. Хентов А. А. Пассивная стабилизация искусственных спутников по магнитному полю Земли. Космические исследования, 1967, вып. 4
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 2. Теория поля. М., Изд. 4-е, Физматгиз, 1962.
5. Colombo G. On the Motion of Explorer XI around its Center of Mass. Prep. Amer. Ast. Soc., 1962, N 45.
6. Hagihara Y. Rotation of an Earth Satellite in Flight along its Orbit. Smithsonian Contr., Astr., 1961, vol. 5, N 9.
7. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М., Физматгиз. 1960.
8. Пожарицкий Г. К. О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
9. Staude O. Über permanente Rotationsachen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt. J. für die reine und ang. Mat., 1894, Bd. 113.
10. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. т. 1, М., Изд-во иностр. лит., 1952.
11. Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
12. Черноусько Ф. Л. Об устойчивости регулярной прецессии спутника. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.