ЦИКЛЫ И КВАЗИИНДЕКСЫ ОСОБЫХ ТОЧЕК КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

И. М. Беленький

(Москва)

Анри Пуанкаре [1] заметил, что замкнутые траектории (циклы) при исследовании в целом играют примерно ту же роль, что и особые точки при исследовании поведения траекторий в малом.

Однако сама задача отыскания циклов представляет большие трудности. Из известных критериев существования периодических траекторий для двумерных автономных систем, в первую очередь, следует указать критерии, основанные на рассмотрении вращения векторного поля (индексы особых точек Пуанкаре).

Достаточный критерий существования периодических траекторий на плоскости, основанный на так называемом принципе кольца, когда вектор скорости на границе области направлен всюду внутрь или наружу кольца, был указан Бендиксоном [2,3].

Существуют и другие методы исследования в целом, в частности, метод функций Ляпунова [4].

Критерий существования периодических траекторий для консервативных систем в так называемом обратимом случае, основанный на рассмотрении вариации интеграла действия, был указан Уиттекером [5]. Ниже изучение циклов для консервативных систем основано на другом принципе, а именно на рассмотрении квазииндексов, как структурных характеристик особых точек [6].

1. Пусть механическая система с двумя степенями свободы движется в консервативном поле с потенциалом $V(q_1, q_2)$, а ее функция Гамильтона $H(p_i, q_i)$ имеет вид

$$H(p_i, q_i) = {}^1\!/_2 (p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2)$$

Для рассматриваемого обратимого случая уравнения Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

допускают интеграл энергии $H(p_i, q_i) = h$. Относительно потенциала $V(q_i)$ будем полагать, что он имеет изолированные особые точки O_j ($j = 1, \ldots, k$), в которых функция $V(q_i)$ обращается в бесконечность.

Во многих важных случаях, например, для полей образованных притягивающими (отталкивающими) центрами, особые точки O_j будут просто полюсами различной кратности.

Выясним необходимые условия существования (отсутствия) замкнутых траекторий (циклов) для рассматриваемой механической системы (1.1). Для этого выпишем дифференциальное уравнение траекторий системы (1.1), воспользовавшись принципом стационарного действия в форме Якоби.

В декартовой системе ($q_1 = x$, $q_2 = y$) уравнение траекторий имеет вид [7]

$$d\psi = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dy \qquad \left(\Phi = \ln \sqrt{2(h - V(x, y))}\right) \tag{1.2}$$

Здесь $\psi(x, y) = \operatorname{arc\,tg} y'$ — угол, образованный вектором скорости v с положительным направлением оси x, h — постоянная энергии, а масса изображающей точки M системы принята равной единице ($m = 1$).

Таким образом, первоначально поставленная задача отыскания условий существования циклов системы (1.1) сводится к нахождению условий существования соответствующих периодических решений у дифференциального уравнения траекторий (1.2).

2. Для качественной теории траекторий консервативных систем важную роль играет пфаффова форма

$$\omega = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dy \tag{2.1}$$

где $\Phi(x, y)$ определяется согласно (1.2), а переменные dx и dy могут быть выбираемы произвольно и не обязательно должны удовлетворять гамильтоновой системе (1.1). Придадим форме ω (2.1) другой вид. Так как при перемещении по некоторому контуру (C) имеем $dx = \cos(\mathrm{n}y)\,ds$, $dy = -\cos(\mathrm{n}x)\,ds$, где n — направление внутренней нормали к контуру (C), а ds — элемент дуги, то

$$\omega = (\partial\Phi\,/\,\partial n)\,ds \tag{2.2}$$

В том случае когда контур (C) является циклом и, следовательно, dx и dy удовлетворяют гамильтоновой системе (1.1), в силу (1.2) и (2.1) имеем $\omega = d\psi$, а потому

$$\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{(C)}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,ds = 1 \tag{2.3}$$

Пусть точка O_j, которую примем за начало координат, является изолированной особой точкой потенциала $V(x, y)$, а следовательно, и функции Гамильтона H.

Рассмотрим криволинейный интеграл от дифференциальной формы ω (2.1), взятый по некоторому замкнутому (без самопересечений) контуру (γ_j), окружающему особую точку O_j.

Отнесенное к 2π предельное значение этого интеграла, когда контур (γ_j) будем стягивать к нулю, не пересекая при этом особую точку O_j, назовем квазииндексом J_j особой точки O_j

$$J_j = \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 0}\oint\limits_{(\gamma_j)}\omega \qquad \left(r = \sqrt{x^2+y^2}\right) \tag{2.4}$$

Для регулярной точки квазииндекс всегда равен нулю. Это следует непосредственно из (2.2) и (2.4), если только заметить, что в окрестности регулярной точки $\partial\Phi\,/\,\partial n$ является функцией ограниченной. В зависимости от структуры особых точек O_j квазииндексы J_j могут принимать любые действительные значения, что отличает их от индексов Пуанкаре, которые могут принимать лишь целочисленные значения.

Теорема 1. Квазииндекс J_j не зависит от выбора кривой (γ_j) и от способа перехода к пределу лишь бы при деформации контура (γ_j) последний не пересекал особую точку O_j.

Для доказательства проведем вокруг точки O_j два произвольных замкнутых (без самопересечений) контура (C) и (γ_j), из которых (γ_j) находится внутри (C). Криволинейный интеграл от дифференциальной формы ω (2.1), взятый по сложному контуру $(\Gamma) = (C) + (\gamma_j)$, так чтобы область (σ^*), ограниченная этим контуром, оставалась слева, преобразуем с помощью теоремы Грина, в интеграл по площади (σ^*).

Далее, переходя к пределу путем стягивания контура (γ_j) в точку, в силу (2.4) получаем

$$J_j = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{(C)}\omega + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\sigma)}\Delta\Phi\,dx\,dy \tag{2.5}$$

Здесь (σ) — область, ограниченная контуром (C), а Δ — оператор Лапласа.

Так как при другом выборе (γ_j), окружающего особую точку O_j и перехода к пределу при $r \to 0$ правая часть (2.5) не изменится, то это и доказывает, что квазииндекс J_j не зависит от выбора контура (γ_j) и от способа перехода к пределу, а зависит исключительно от структуры самой особой точки O_j. Теорема доказана.

В дальнейшем в качестве кривых (γ_j), окружающих особые точки O_j, будем брать окружности малого радиуса r, с центрами в точках O_j.

Заметим, что двойной интеграл в правой части (2.5) является сингулярным, поэтому квазииндекс J_j будет иметь конечное значение лишь в том случае, если указанный интеграл существует.

При наличии циклов можно установить простую связь между индексом Пуанкаре I_j и квазииндексом J_j. Действительно, пусть (C) является циклом. Тогда в силу (1.2) и (2.5) получаем

$$J_j = I_j + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\sigma)}\Delta\Phi\,dx\,dy \tag{2.6}$$

Для цикла индекс Пуанкаре равен единице ($I_j = 1$). Это приводит к следующему фундаментальному соотношению:

$$J_j = 1 + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\sigma)} \triangle \Phi \, dx \, dy \tag{2.7}$$

Соотношение (2.7) легко обобщить на тот случай, когда внутри цикла (C) находятся k особых точек O_j ($j = 1, 2, \ldots, k$).

Окружив особые точки O_j окружностями (γ_j) малого радиуса r и рассматривая сложный контур $(\Gamma) = (C) + (\gamma_1) + \ldots + (\gamma_k)$ с помощью рассуждений, аналогичных выше для случая одной особой точки, получаем

$$J = 1 + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\sigma)} \triangle \Phi \, dx \, dy \qquad \left(J = \sum_{j=1}^{k} J_j\right) \tag{2.8}$$

Здесь J — сумма квазииндексов J_j особых точек O_j, находящихся внутри цикла (C), а (σ) — область, с выколотыми точками O_j и ограниченная контуром (C).

В случае, когда дифференциальная форма ω (2.1) является полным дифференциалом [8] и, следовательно, выполняется условие $\triangle \Phi (x, y) = 0$, при наличии циклов квазииндекс J_j в силу (2.6) будет совпадать со значением индекса Пуанкаре I_j и будет равен $J_j = I_j = 1$.

Заметим, что квазииндекс J_j, в силу (2.1) и (2.4), может быть представлен в комплексной форме

$$J_j = -\operatorname{Re}\left(\lim_{|z|\to 0} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(\gamma_j)} \Omega \, dz\right) \qquad \left(\Omega = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \tag{2.9}$$

Пусть $\Omega (z)$ — аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$ и, следовательно, в силу условий Коши — Римана $\triangle \Phi (x, y) = 0$.

Если особая точка $z = z_j$ является полюсом кратности n, то разложение в ряд Лорана имеет вид

$$\Omega (z) = \frac{a_{-n}}{z^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

и, следовательно, в силу (2.9) квазииндекс будет равен $J_j = -\operatorname{Re}(a_{-1})$.

3. Для важного класса полей с потенциалами вида $V = V(r)$ квазииндексы особых точек будут иметь весьма простой вид.

Пусть точка O ($r = 0$), которую примем за начало координат, есть особая точка потенциала $V(r)$.

Тогда в силу (2.2) и (2.4) квазииндекс J точки O будет равен

$$J = -\lim \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) \qquad (r \to 0) \tag{3.1}$$

Следовательно, чтобы квазииндекс J имел конечное и притом отличное от нуля значение, разложение $\Phi (r)$ в окрестности нуля необходимо имеет вид

$$\Phi (r) = a_0 \ln r + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots \qquad (a_0 \neq 0)$$

а потому, в силу (3.1) квазииндекс будет равен $J = -a_0$. Так, например, для потенциала

$$V (r) = A_1 r^{-1} + A_2 r^{-2} + \cdots + A_n r^{-n}$$

в силу (1.2) находим

$$\Phi (r) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{r^n} \left(h r^n - \sum A_k r^{n-k}\right)\right) = -\frac{n}{2} \ln r + F (r)$$

где $F(r)$ — целая функция от r. В рассматриваемом случае $a_0 = -n/2$ и квазииндекс $J = {}^1\!/_2 n$. Можно указать случай, когда квазииндекс J не будет иметь конечного значения. Это, в частности, будет когда точка $O(r = 0)$ является существенно особой и разложение $V(r)$ в окрестности нуля имеет вид

$$V(r) = A_1 r^{-1} + A_2 r^{-2} + \ldots$$

Такой вид, в частности, имеет потенциал кольца [9], а также потенциал сфероида для точек, лежащих в экваториальной плоскости [10]. В указанных случаях имеем

$$J = \lim (^1/_2 n) = \infty \qquad (n \to \infty)$$

Для логарифмического потенциала $V = A \ln r$, квазииндекс J особой точки $r = 0$ будет равен нулю. Действительно, в окрестности нуля имеет место разложение

$$\Phi(r) = {}^1/_2 \ln (2(h - A \ln r)) = {}^1/_2 \ln \ln {}^1/r + F(r)$$

где $F(r)$ — целая функция. Следовательно,

$$J = -{}^1/_2 \lim (r \ln \ln {}^1/r) = 0 \qquad (r \to 0)$$

4. Рассматривая движение на проективной плоскости введем понятие квазииндекса J^* бесконечно удаленной точки. Пусть точка O ($r=0$), которую примем за начало координат, является особой. Окружим точку O некоторым замкнутым (без самопересечения) контуром (γ). Предельное значение интеграла

$$J^* = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \to \infty} \oint_{(\gamma)} \omega \qquad \left(\omega = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) \tag{4.1}$$

и назовем квазииндексом бесконечно удаленной точки. Здесь n — направление внешней нормали к контуру (γ), а обход контура (γ) совершается так, чтобы область (σ_1), содержащая бесконечно удаленную точку, оставалась слева (обход точки O будет при этом совершаться по ходу часовой стрелки).

В частности, для центрального поля с потенциалом $V = V(r)$, окружив особую точку O ($r = 0$) кругом (γ) радиуса r, получим

$$J^* = \lim \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) \qquad (r \to \infty) \tag{4.2}$$

Так, например, для поля с потенциалом $V = -A/r^n$ ($A, n > 0$) и при постоянной энергии $h = 0$ квазииндекс J^* бесконечно удаленной точки будет равен

$$J^* = \frac{1}{2} \lim \left(r \frac{\partial}{\partial r} \ln \left(2\left(h + \frac{A}{r^n}\right)\right)\right) = -\frac{n}{2}$$

Напомним, что квазииндекс особой точки O ($r = 0$) в данном случае был равен $J = n/2$.

Укажем, что к тем же результатам можно прийти, в частности, получить формулу (4.2), если выполнить преобразование $r = 1/\rho$, а потенциал $V = -A/r^n$ преобразовать в потенциал $V_1 = -A\rho^n$. При этом бесконечно удаленная точка и особая точка O ($r = 0$) обменяются местами.

5. Функцию $\delta(x, y) = (1/2\pi)\triangle\Phi(x, y)$, будем называть плотностью распределения $\Phi(x, y)$. Эту функцию в силу (1.2) можно представить в следующем виде:

$$\delta(x, y) = -\frac{(h - V)\triangle V + (V_x{}^2 + V_y{}^2)}{4\pi (h - V)^2} \tag{5.1}$$

а для центральных полей, когда $V = V(r)$

$$\delta(r) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) \qquad (\Phi = \ln \sqrt{2(h - V(r))}) \tag{5.2}$$

Линию, при переходе через которую плотность $\delta(x, y)$ меняет знак, назовем линией нулевой плотности. Уравнение этой линии имеет вид

$$F(x, y, h) = (h - V)\triangle V + (V_x{}^2 + V_y{}^2) = 0 \tag{5.3}$$

Может оказаться, что при заданном потенциале $V(x, y)$ при некоторых значениях параметра h линии нулевой плотности не существует. В этом случае в рассматриваемой области (σ) плотность δ будет функцией знакоопределенной.

Плотность $\delta(x, y)$ будет также функцией знакоопределенной в тех областях (σ), где выполняется условие $\triangle V \geqslant 0$. При этом $\operatorname{sign}(\delta) = -1$ при любых значениях постоянной энергии h.

Может оказаться, что линия нулевой плотности будет замкнута (она может быть и с самопересечением) или же будет распадаться на n замкнутых ветвей $(C_1), \ldots, (C_n)$. В последнем случае знакоопределенность плотности $\delta(x, y)$ внутри каждой из кривых (C_i) будет одна и та же. Это следует из факта непрерывности плотности $\delta(x, y)$ при переходе через линию нулевой плотности.

В качестве примера рассмотрим линию нулевой плотности в задаче двух неподвижных центров в предположении, что притягивающие массы одинаковы, а закон притяжения произволен.

Полагая, что притягивающие центры находятся в точках O_1 ($x_1 = {}^1/_2 a$, $y_1 = 0$) и O_2 ($x_2 = -{}^1/_2 a$, $y_2 = 0$) напишем потенциал V рассматриваемого поля

$$V = -\left(\frac{A}{r_1^{\,n}} + \frac{A}{r_2^{\,n}}\right) \qquad (A,\ n > 0,\ r_{1,2} = \sqrt{(x \pm a/2)^2 + y^2})$$

Здесь плотность $\delta(x, y)$ в силу (5.1) равна

$$\delta(x, y) = \frac{Ahn^2\,(r_1^{\,n+2} + r_2^{\,n+2}) + A^2a^2n^2}{4\pi\,(h - V)^2\,(r_1 r_2)^{n+2}}$$

и, следовательно, для гиперболо-параболических типов движения ($h \geqslant 0$) линий нулевой плотности не существует. В случае же эллиптического типа движения ($h < 0$) линия нулевой плотности существует, и ее уравнение имеет вид

$$r_1^{\,n+2} + r_2^{\,n+2} = B \qquad (B = -Aa^2 / h) \tag{5.4}$$

Для случая ньютонианского притяжения ($n = 1$) получаем $r_1^3 + r_2^3 = B$. Несложный анализ показывает, что при этом выполняется неравенство $r_1 r_2 < C^2$ ($C = (B/2)^{1/3}$), и, следовательно, линия нулевой плотности находится внутри овала Кассини $r_1 r_2 = C^2$.

6. Условия существования (отсутствия) циклов сформулируем в терминах весов $P(\sigma)$ функции $\Phi(x, y)$

$$P = \iint\limits_{(\sigma)} \delta(x, y)\,dx\,dy \qquad \left(\delta = \frac{1}{2\pi}\triangle\Phi\right) \tag{6.1}$$

где (σ) — область, ограниченная контуром (C), а $\delta(x, y)$, по-прежнему, плотность распределения $\Phi(x, y)$ Основное соотношение (2.8) принимает при этом следующий вид:

$$1 - J = -P \qquad (J = J_1 + J_2 + \ldots + J_k) \tag{6.2}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть в рассматриваемой области (σ) сумма квазииндексов J_j особых точек O_j принимает одно из следующих значений:

$$\text{а) } -\infty < J < 1, \qquad \text{б) } J = 1, \qquad \text{в) } 1 < J < \infty \tag{6.3}$$

Тогда, если в рассматриваемой области (σ) отсутствует линия нулевой плотности (или какая-либо ее часть) и притом имеет место следующая знакоопределенность весов P функции $\Phi(x, y)$:

$$\text{а) } P \geqslant 0, \qquad \text{б) } P \neq 0, \qquad \text{в) } P \leqslant 0 \tag{6.4}$$

то это является достаточным условием отсутствия циклов в области (σ).

Эта теорема может быть сформулирована и в терминах плотностей $\delta(x, y)$ (см. работу [6]).

Теорема 3. Пусть в рассматриваемой области (σ) выполняется одно из условий (6.3). Тогда, если в указанной области (σ) отсутствует линия нулевой плотности (или какая-либо ее часть), то необходимым (но не достаточным) условием существования циклов является следующая знакоопределенность весов P:

$$\text{а) } P < 0, \qquad \text{б) } P = 0, \qquad \text{в) } P > 0 \tag{6.5}$$

Теорема 4. Пусть в рассматриваемой области (σ), за исключением особых точек, плотность $\delta(x, y)$ равна нулю. Если при этом никакая комбинация значений квазииндексов J_j особых точек O_j, находящихся в (σ), не равна единице, то это является достаточным условием отсутствия циклов в области (σ).

Заметим, что равенство нулю плотности $\delta = (1/2\pi) \triangle\Phi$ в некоторой области соответствует условию полного дифференциала пфаффовой формы ω (2.1).

Теорема 5. Пусть в замкнутой области (σ), представляющей круг радиуса R с центром в изолированной особой точке O ($r = 0$), плотность $\delta(x, y)$ будет знакопеременна, и, следовательно, существует линия нулевой плотности.

Тогда, если для любого погруженного в область (σ) круга радиуса $r \leqslant R$, с центром в точке O вес P будет равен нулю, а квазииндекс J_0 особой точки O ($r = 0$) не равен единице, то это является достаточным условием отсутствия циклов в области (σ).

Доказательство указанных выше теорем вытекает непосредственно из рассмотрения основного соотношения (6.2).

7. Известно [11], что для консервативных систем периодические движения не существуют изолированно, т. е. если существует периодическое движение при некотором значении постоянной энергии h, то существует периодическое движение и при постоянной h_1, близкой к h.

Рассмотрим вопрос существования нескольких циклов в окрестности изолированной особой точки, при одном и том же значении постоянной энергии h.

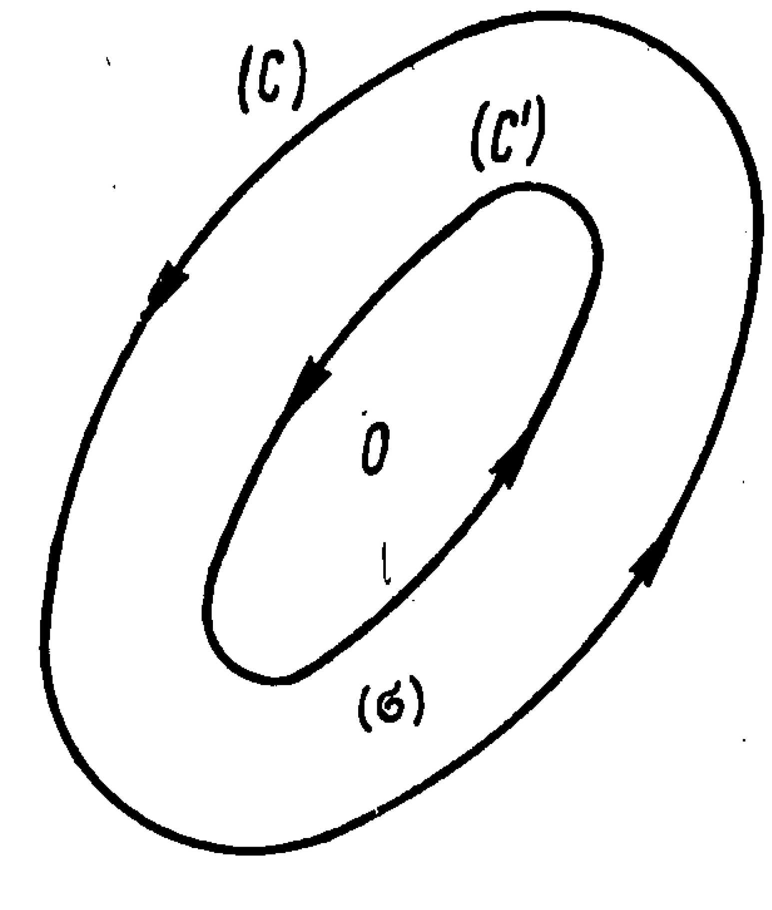
Пусть при заданном потенциале $V(x, y)$ и при некотором значении h существуют, образуя кольцо, два цикла (C) и (C') (фиг. 1).

Криволинейный интеграл от пфаффовой формы (2.1), взятый по сложному контуру $(\Gamma) = (C) + (C')$, преобразуем с помощью теоремы Грина в интеграл по площади

$$\oint\limits_{(C)} \omega - \oint\limits_{(C')} \omega = -\iint\limits_{(\sigma)} \triangle\Phi \, dx\, dy$$

Так как по предположению (C) и (C') циклы, то в силу (2.2) и (2.3) получаем

$$P = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\sigma)} \triangle\Phi \, d\sigma = 0 \tag{7.1}$$



Фиг. 1

т. е. равенство нулю веса (P) функции Φ на площади кольца (σ), является необходимым условием существования циклов (C) и (C').

Таким образом, имеет место теорема.

Теорема 6. Знакопостоянство плотности $\delta(x, y)$ в некоторой области (σ) является достаточным условием отсутствия, при одном и том же значении постоянной энергии h, двух, вложенных одно в другое, циклов.

8. Рассмотрим условия существования круговых циклов в центральном силовом поле с потенциалом $V = V(r)$.

Написав дифференциальное уравнение траекторий в полярных координатах [12]

$$-r\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right)^2\right]\frac{\partial V}{\partial r} + 2(h - V)\left[r^2 + 2\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right)^2 - r\frac{\partial^2 r}{\partial\alpha^2}\right] = 0 \tag{8.1}$$

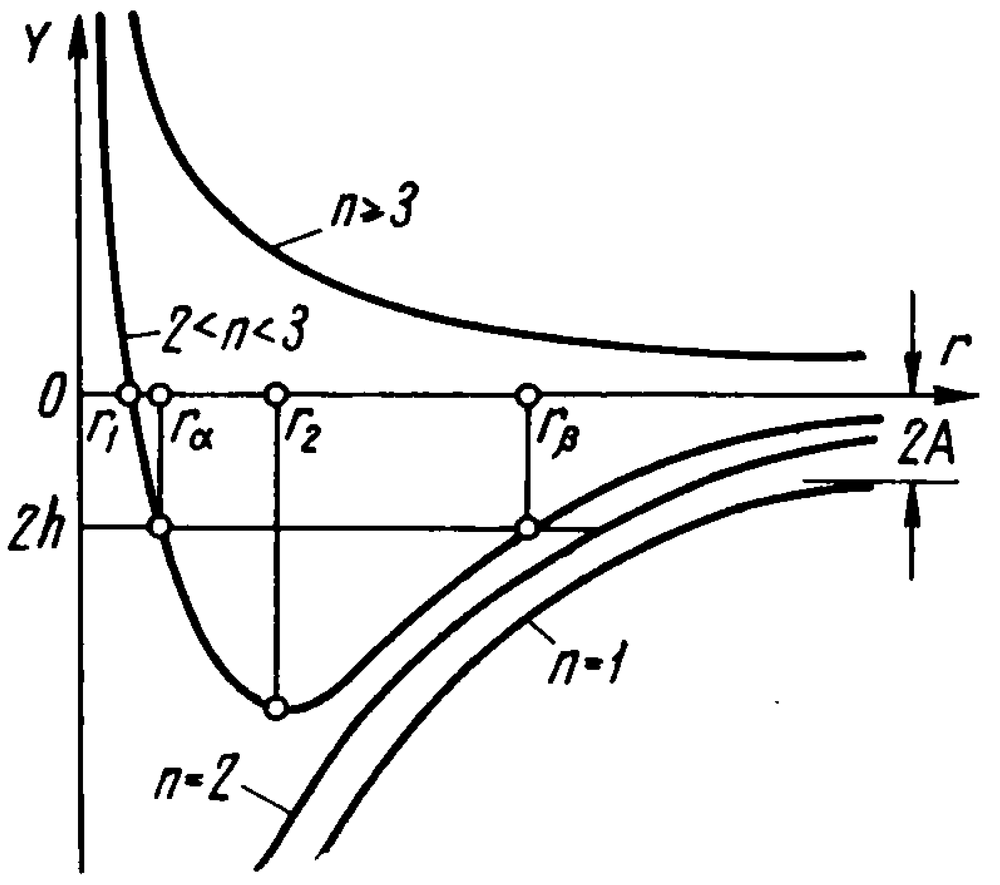
и полагая производные r по α равными нулю, после сокращения на неравный нулю множитель r^2, получим условие на контуре кругового цикла (C)

$$Y(r) = 2h \qquad (Y(r) = r\partial V / \partial r + 2V) \tag{8.2}$$

Условие (8.2) может быть получено и непосредственно с помощью принципа Даламбера, в чем нетрудно убедиться, если воспользоваться при этом интегралом энергии.

Значения r_j циклов (C_j), соответствующих заданной величине постоянной энергии h, будут корнями уравнения $Y(r) = 2h$. Может оказаться, что одному и тому же значению постоянной h будет соответствовать несколько циклов. В качестве примера рассмотрим суперпозицию потенциалов двух притягивающих центров (8.3)

$$V(r) = \frac{A}{r^{n-1}} + \frac{B}{r^n} \qquad (A,\ B < 0,\ n \geqslant 1)$$



Фиг. 2

Для рассматриваемого случая имеем

$$Y(r) = \frac{A(3-n) + B(2-n)}{r^n} \tag{8.4}$$

Анализ хода кривых $Y = Y(r)$ (фиг. 2) для различных n показывает, что при заданном значении постоянной энергии h два цикла могут существовать лишь для $2 < n < 3$. При заданном n из указанного интервала $2 < n < 3$, значения $h_1 = 0$ и $h_2 = {}^1/_2\, Y(r_2)$ являются бифуркационными.

Именно при $0 \leqslant h < \infty$ будет существовать один цикл радиуса r $(0 < r \leqslant r_1)$, а при $h_2 < h < h_1$ будут существовать два цикла (C_α) и (C_β) с радиусами r_α $(r_1 < r_\alpha < r_2)$ и r_β $(r_2 < r_\beta < \infty)$. При $h = h_2$ будет существовать один цикл с радиусом $r = r_2$. Здесь

$$r_1 = \frac{B(n-2)}{A(3-n)}, \qquad r_2 = \frac{n}{n-1} r_1, \qquad Y(r_2) = \frac{B(n-2)}{(n-1) r_2^{\,n}} \tag{8.5}$$

Укажем, что необходимое условие существования двух циклов (7.1) здесь выполняется полностью.

9. Рассмотрим поведение траекторий консервативной системы в окрестности точки покоя и, в частности, вопрос о рождении циклов из состояния равновесия.

Координаты точки покоя $O(x_0, y_0)$ можно найти из условия стационарности потенциала

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = 0 \tag{9.1}$$

Не нарушая общности примем, что для положения равновесия $x_0 = y_0 = 0$, $V(x_0, y_0) = 0$.

Разложение $V(x, y)$ в окрестности нуля, будет иметь вид

$$V = V_n(x,y) + V_{n+1}(x,y) + \cdots \qquad (n \geqslant 2) \tag{9.2}$$

где $V_k(x, y)$ — однородная форма переменных x и y степени k.

Для нахождения квазииндекса J точки покоя воспользуемся (2.4), (2.1), а также значением $\Phi(x, y)$ согласно (1.2). Это дает

$$J = \frac{1}{2\pi} \lim_{r\to 0} \oint_{(\gamma)} \frac{-V_y\,dx + V_x\,dy}{2(h-V)} \tag{9.3}$$

где (γ) — окружность малого радиуса r с центром в точке покоя, а постоянная энергии h должна быть принята равной нулю, что следует из интеграла энергии, так как по условию $V_0 = V(0, 0) = 0$.

На контуре (γ) имеем $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, $dx = -y\,d\alpha$, $dy = x\,d\alpha$ и, следовательно, в силу теоремы Эйлера об однородных функциях получаем

$$-V_y\,dx + V_x\,dy = (yV_y + xV_x)\,d\alpha = (nV_n + (n+1)V_{n+1} + \cdots)\,d\alpha$$

В полярных координатах $V_k(r, \alpha) = r^k\sigma_k(\alpha)$, где $\sigma_k(\alpha)$ — однородная тригонометрическая форма степени k. Следовательно, в силу известной теоремы анализа о переходе к пределу под знаком интеграла, получим

$$J = \frac{1}{2\pi} \lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi} \frac{(n\sigma_n(\alpha) + r(n+1)\sigma_{n+1}(\alpha) + \cdots)\, d\alpha}{-2(\sigma_n(\alpha) + r\sigma_{n+1}(\alpha) + \cdots)} = -\frac{n}{2} \tag{9.4}$$

где n — показатель наинизшей однородной формы V_n в разложении $V(x, y)$ согласно (9.2).

Ограничиваясь, в дальнейшем, в разложении V (9.2) наинизшей однородной формой V_2 $(n = 2)$, которая при малых значениях x и y будет определять знак $V(x, y)$, получим следующее разложение в окрестности нуля:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) \tag{9.5}$$

$$A = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0, \quad B = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}\right)_0, \quad C = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 \tag{9.6}$$

Из выражения для плотности δ (5.1) следует, что

$$\operatorname{sign}\delta = -\operatorname{sign}\mu, \qquad \mu = (h - V)\triangle V + (V_x^2 + V_y^2).$$

Определив входящие производные и положив $h = 0$, получим

$$\mu = {}^1\!/_2\,(ay^2 + 2bxy + cx^2) \tag{9.7}$$

$$a = C^2 - AC + 2B^2, \qquad b = B(A + C), \qquad c = A^2 - AC + 2B^2 \tag{9.8}$$

Дискриминант полученной формы μ (9.7) будет равен

$$\Delta = b^2 - ac = (AC - B^2)((A - C)^2 + 4B^2) \tag{9.9}$$

Докажем следующие теоремы.

Теорема 7. Пусть в положении равновесия потенциальная энергия V (9.5) имеет изолированный минимум, т. е. выполняется условие теоремы Лагранжа, и система, следовательно, находится в положении устойчивого равновесия по Ляпунову.

Тогда в окрестности этой точки необходимые условия существования циклов выполняются, и циклы могут существовать.

Доказательство. Так как дискриминант квадратичной формы (9.5) отрицателен ($B^2 - AC < 0$, A, $C > 0$), а $\triangle V = (A + C) > 0$ и $h - V > 0$ — в силу интеграла энергии, то плотность $\delta(x, y)$ (5.1) будет знакоотрицательна ($\operatorname{sign}\delta = -1$) и, следовательно, вес $P < 0$.

Переходя к полярным координатам (r, α) и полагая $h > 0$ (при $h \leqslant 0$, движение в области $V(x, y) > 0$ невозможно), вычислим значение квазииндекса J (9.3) точки покоя. Имеем

$$J = \frac{1}{2\pi} \lim_{r\to 0} r^2 \int_0^{2\pi} \frac{(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)\, d\alpha}{2(h - {}^1\!/_2\, r^2(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha))} = 0$$

Итак в случае положения устойчивого равновесия $J = 0$, $P < 0$, и, следовательно, необходимые условия существования циклов, в силу теоремы 3, выполняются.

Теорема 8. Пусть в положении равновесия потенциальная энергия $V(x, y)$ (9.5) имеет изолированный максимум и вследствие теоремы обращения Ляпунова [13] положение равновесия будет неустойчивым. Тогда в окрестности положения равновесия при том же значении постоянной энергии $h = 0$ циклы существовать не могут.

Доказательство. Пусть в положении неустойчивого равновесия $V_0 = V(0, 0) = 0$ и, следовательно, $h = 0$.

Рассматривая движение при постоянной энергии $h = 0$ найдем квазииндекс J_0 (9.4) точки покоя O ($r = 0$).

Полагая $n = 2$, получаем $J_0 = -1$.

Так как дискриминант квадратичной формы (9.5), $B^2 - AC < 0$ ($A, C < 0$), то дискриминант $\Delta = b^2 - ac$ квадратичной формы μ (9.7) в силу (9.9) будет положителен. Следовательно, форма μ будет знакопеременна, а это означает, что и плотность $\delta(x, y)$ будет знакопеременна, поскольку $\operatorname{sign} \delta = -\operatorname{sign} \mu$.

Переходя к полярным координатам (r, α) и полагая постоянную энергию $h = 0$, можно показать, что вес P функции Φ, на площади круга (σ) произвольного радиуса r будет равен нулю.

Для этого достаточно показать, что интеграл

$$K = \int_0^{2\pi} \frac{(a \sin^2 \alpha + 2b \sin \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha)\, d\alpha}{(A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha)}$$

обращается в нуль. Вводя комплексную переменную $\tau = e^{i\alpha}$, в результате получаем

$$K = M \oint_{(\gamma)} \frac{\psi(\tau)\, d\tau}{(\tau - \tau_1)^2 (\tau - \tau_2)^2} \qquad \left(M = \text{const}, \quad \tau_{1,2} = \frac{-(A+C) \pm 2\sqrt{AC - B^2}}{A - C - 2iB} \right)$$

где интегрирование производится по единичному кругу (γ), а

$$\psi(\tau) = (c - a - 2ib)\tau^2 + 2(a + c)\tau + (c - a + 2ib)$$

Опуская промежуточные вычисления, укажем, что $|\tau_1\tau_2| = 1$, $|\tau_2| < 1$, $\operatorname{Res}(\tau_2) = 0$ и, следовательно, в силу теоремы Коши о вычетах получаем $K = 2\pi i M \operatorname{Res}(\tau_2) = 0$. Это и доказывает утверждение, что $P = 0$.

Итак, в рассматриваемом случае выполняются условия теоремы 5 ($P = 0$ при любом $r > 0$, а $J_0 = -1$) и, следовательно, выполняются достаточные условия отсутствия циклов. Теорема доказана.

Поступила 19 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.— Л., Гостехиздат, 1947, стр. 231.
2. Bendixon J. Sur les courbes définies par des équations diffèerentielles. Acta Math., 1901, vol. 24, pp. 1—88.
3. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 102—103.
4. Немыцкий В. В. Некоторые современные проблемы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. н., 1965, т. 20, № 4.
5. Whittaker E. T. On periodic orbits. Monthly Notices, Roy. Astron. Soc., 1902, vol. 62, pp. 186—196.
6. Беленький И. М. О достаточных условиях отсутствия периодических траекторий для консервативных систем. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
7. Беленький И. М. Введение в аналитическую механику. М., «Высшая школа», 1964, стр. 78—80.
8. Беленький И. М. Об одной новой аналогии в механике. Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 6.
9. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. М., Физматгиз, 1961, стр. 253.
10. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. М., «Мир», 1964, стр. 115—116.
11. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Изд. 2-е, М., Физматгиз, 1959, стр. 149.
12. Беленький И. М. К задаче о траекториях. Уч. зап. Моск. заоч. пед. ин-та. Сер. физ.-матем., 1959, вып. 3, стр. 235.
13. Ляпунов А. М. О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум.— В кн.: Соб. сочинений. т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1956, стр. 391—400.