ОДИН СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

Л. Г. Гликман, Е. М. Якушев

(Алма-Ата)

Рассмотрим уравнение Гамильтона — Якоби, имеющее вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+F=0 \tag{1}$$

Здесь S — функция действия, а F — заданная функция переменных r и t. Решение этого уравнения будем искать в виде

$$S=S_0+S_1,\quad S_0=X_0(x)T_0(t),\quad S_1=X_1(x)+T_1(t) \tag{2}$$

Здесь введена новая переменная $x=rf(t)$, где $f(t)$ — любая дважды дифференцируемая функция. Подставив (2) в (1), получим

$$\frac{\partial S_0}{\partial t}+\frac{\partial S_0}{\partial x}\frac{x}{f(t)}\frac{df(t)}{dt}+\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 f^2(t)+$$
$$+\frac{\partial S_1}{\partial x}\left[\frac{x}{f(t)}\frac{df(t)}{dt}+2\frac{\partial S_0}{\partial x}f^2(t)\right]+\frac{\partial S_1}{\partial t}+\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 f^2(t)+F=0 \tag{3}$$

В последнем уравнении коэффициент при $\partial S_1/\partial x$ равен нулю, если

$$S_0=-\frac{x^2}{4f^3(t)}\frac{df(t)}{dt} \tag{4}$$

При таком S_0 из (3) следует

$$x^2\left[\frac{1}{2f(t)^6}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)^2-\frac{1}{4f(t)^5}\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]+\frac{dT_1(t)}{dt}\frac{1}{f(t)^2}+\left(\frac{dX_1(x)}{dx}\right)^2+\frac{1}{f(t)^2}F=0 \tag{5}$$

В этом уравнении переменные разделяются, если

$$F=f^2(t)\Psi(x)+f^2(t)\eta(t)+x^2\left[\frac{1}{4f^3(t)}\frac{d^2f(t)}{dt^2}-\frac{1}{2f(t)^4}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)^2\right] \tag{6}$$

Здесь $\Psi(x)$ и $\eta(t)$ — произвольные функции. При выполнении этого условия полный интеграл уравнения (1) имеет вид

$$S=-\frac{x^2}{4f^3(t)}\frac{df(t)}{dt}\pm\int\sqrt{C_1-\Psi(x)}\,dx-\int f^2(t)(C_1+\eta(t))\,dt+C_2$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

В частности, разделение переменных в уравнении (5) возможно, если

$$\frac{1}{2f^6(t)}\left(\frac{df}{dt}\right)^2-\frac{1}{4f^5(t)}\frac{d^2f}{dt^2}=k,\qquad f=\frac{1}{\sqrt{a(t-b)^2+4k/a}} \tag{7}$$
$$F=f^2(t)X(x)$$

Здесь $X(x)$ — произвольная функция, k, a и b — постоянные.

Решение уравнения (1) при условиях (7) было получено в работе [1] методом Лагранжа — Шарпи [2].

На основании теоремы Якоби [3] по найденному полному интегралу уравнения (1) можно найти решение соответствующей ему канонической системы дифференциальных уравнений. Заметим, что из этой системы следует дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-2\frac{\partial F}{\partial r}$$

Таким образом, последнее уравнение может быть решено для функции F, удовлетворяющей условию (6).

Поступила 27 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Гликман Л. Г., Кельман В. М., Якушев Е. М. Решение уравнений движения нерелятивистских заряженных частиц в переменных электромагнитных полях определенного класса. ЖТФ, 1965, т. 35, вып. 11.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4. Физматгиз, 1958, стр. 361.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4, Физматгиз, 1958, стр. 358.