Следует отметить, что при $Q$, пропорциональном $D^2$, показатель автомодельности не определяется единственным образом, но если потребовать конечность ускорения частиц газа на фронте детонационной волны, то $\delta$ единственно. При $Q = Q_0 r^{2m}$ показатель $\delta$ определяется однозначно.

Автор благодарит С. В. Фальковича за советы и обсуждение результатов и А. И. Дмитриеву за помощь в проведении расчетов на ЭВМ.

Поступила 2 V 1967

## ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике М., «Наука», 1965.
2. Нигматулин Р. И. Сходящиеся цилиндрические и сферические детонационные волны. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, стр. 158—163.

---

# ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ИНВАРИАНТНОГО СООТНОШЕНИЯ ГЕССА

**А. Я. Савченко** (Донецк)

Решение Гесса [1] задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, обладает своеобразными особенностями, исследованию которых были посвящены работы Жуковского [2], Чаплыгина [3] и многие другие. Недавно выяснено, что не все решения указанной задачи устойчивы к обобщениям [4]. Так, например, решение Ковалевской [5] не имеет аналога с соответствующими свойствами, если к телу приложен гиростатический момент. Однако для решения Гесса, как показал Л. Н. Сретенский [6,7], имеется соответствующий аналог в решении задачи о гиростате. Еще более общий результат получен П. В. Харламовым [8], который указал линейное инвариантное соотношение в задаче о движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью. Частными случаями решения П. В. Харламова оказывается и решение Л. Н. Сретенского и, естественно, решение Гесса.

Рассматривается тело с неподвижной точкой, имеющее эллипсоидальную полость, целиком заполненную идеальной жидкостью, находящейся в однородном вихревом движении. Эта задача изучалась в монографии Н. Н. Моисеева и В. В. Румянцева [9]. В поле силы тяжести движение такого тела описывается системой девяти уравнений. И в этом случае обнаруживается линейное инвариантное соотношение, обобщающее соотношение Л. Н. Сретенского и Гесса, но в отличие от последних найденное здесь соотношение не будет частным случаем инвариантного соотношения П. В. Харламова.

Полагая, что центр тяжести рассматриваемой системы находится на перпендикуляре к круговому сечению гирационного эллипсоида (условие Гесса)

$$z_c = 0, \qquad x_c \sqrt{A(C-B)} - y_c \sqrt{B(A-C)} = 0$$

запишем уравнения движения тела в обозначениях работы [9]

$$\begin{gathered}
A \frac{d\omega_1}{dt} + A' \frac{d\Omega_1}{dt} + (C-B)\,\omega_2\omega_3 + C'\omega_2\Omega_3 - B'\omega_3\Omega_2 = Mg y_c \gamma_3 \\
B \frac{d\omega_2}{dt} + B' \frac{d\Omega_1}{dt} + (A-C)\,\omega_3\omega_1 + A'\omega_3\Omega_1 - C'\omega_1\Omega_3 = -Mg x_c \gamma_3 \\
C \frac{d\omega_3}{dt} + C' \frac{d\Omega_3}{dt} + (B-A)\,\omega_1\omega_2 + B'\omega_1\Omega_2 - A'\omega_2\Omega_1 = Mg\,(x_c\gamma_2 - y_c\gamma_1) \\
\frac{d\Omega_1}{dt} = 2a^2 \left( \frac{\omega_3\Omega_2}{a^2+b^2} - \frac{\omega_2\Omega_3}{c^2+a^2} \right) - 2\Omega_2\Omega_3 \frac{a^2(c^2-b^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} \\
\frac{d\Omega_2}{dt} = 2b^2 \left( \frac{\omega_1\Omega_3}{b^2+c^2} - \frac{\omega_3\Omega_1}{a^2+b^2} \right) - 2\Omega_3\Omega_1 \frac{b^3(a^2-c^2)}{(b^2+c^2)(a^2+b^2)} \\
\frac{d\Omega_3}{dt} = 2c^2 \left( \frac{\omega_2\Omega_1}{c^2+a^2} - \frac{\omega_1\Omega_2}{b^2+c^2} \right) - 2\Omega_1\Omega_2 \frac{c^2(b^2-a^2)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} \\
\frac{d\gamma_1}{dt} = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $A, B, C$ — измененные моменты инерции системы; $A'$, $B'$, $C'$ — разности между моментами инерции жидкости и эквивалентного твердого тела; $a$, $b$, $c$ — полуоси полости эллипсоида, а $M$ — масса системы.

Сделаем замену переменных

$$A\omega_1 = x_1 - AA'c_0(Cb_0 + Bc_0)N\Omega_1, \qquad B\omega_2 = x_2 - BB'c_0(Ca_0 + Ac_0)N\Omega_2 \qquad (2)$$

$$a_0 = \frac{c^2 - b^2}{c^2 + b^2}, \qquad b_0 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}, \qquad c_0 = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$$

$$N^{-1} = ABc_0^2 + C^2 - AC - BC$$

и наложим на параметры системы условия

$$\begin{vmatrix} A^2 & B^2 & C^2 \\ A & B & C \\ a_0^2 & b_0^2 & c_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_0(Cb_0 + Bc_0)\,[B(Ca_0^2 - Ac_0^2) + a_0b_0C(C - A)]\,N - $$
$$- 0.8\,MC\,[(Cb_0 + Bc_0) - (Ab_0 - Ba_0)] = 0$$

$$c_0(Ca_0 + Ac_0)[A(Cb_0^2 - Bc_0^2) + a_0b_0C(C - B)]\,N -$$
$$- 0.8\,MC\,[(Ca_0 + Ac_0) + (Ab_0 - Ba_0)] = 0$$

Затем, переходя к специальным осям поворотом системы координат на угол $\alpha$, равный

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{A(C - B)}{B(A - C)}\right)^{1/2}$$

получим первое уравнение системы (1) в виде

$$dy_1/dt = my_1(\omega_3 + n\Omega_3), \qquad y_1 = x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha \qquad (3)$$

$$n = \frac{B(Ca_0^2 - Ac_0^2) + a_0b_0C(C - A)}{(C - A)}N, \qquad m = C\left(\frac{(A - C)(C - B)}{AB}\right)^{1/2}$$

Уравнение (3) вместе с системой (1) допускает частный интеграл вида

$$y_1 = 0$$

или в главных осях

$$Ax_c[\omega_1 + A'c_0(Cb_0 + Bc_0)N\Omega_1] + By_c[\omega_2 + B'c_0(Ca_0 + Ac_0)N\Omega_2] = 0$$

Это линейное инвариантное соотношение обобщает соотношение Гесса и обращается в него при $a = b = c$.

Поступила 10 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Hess W. Über die Euler schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Zösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einem festen Punkt. Math. Ann., 1890, Bd. 37, Hft. 2, pp. 153—181.
2. Жуковский Н. Е. Локсодромический маятник Гесса. Собр. соч., т. 1. М.— Л., Гостехиздат, 1948, стр. 257—274.
3. Чаплыгин С. А. По поводу локсодромического маятника Гесса. Собр. соч., т. 1, М.— Л., Гостехиздат, 1948, стр. 133—135.
4. Харламова Е. И. Некоторые решения задачи о движении тела, имеющего закрепленную точку. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, стр. 733—737.
5. Ковалевская С. В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки.— В кн. «Научные работы», Изд-во АН СССР, 1948, стр. 153—220.
6. Сретенский Л. И. О некоторых случаях интегрируемости уравнения движения гиростата. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 2, стр. 292—294
7. Сретенский Л. И. О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гиростатом. Вестн. Моск. ун-та, сер. матем., механ., 1963, № 3, стр. 60—71.
8. Харламов П. В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью. ПМТФ, 1963, № 4.
9. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965, стр. 68—125.