

## СХОДЯЩИЕСЯ ДЕТОНАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В РЕЖИМЕ ЧЕПМЕНА — ЖУГЕ В СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННОЙ И ПОСТОЯННОЙ НАЧАЛЬНЫМИ ПЛОТНОСТЯМИ

Я. Г. Сапунков (Саратов)

В работе рассматривается задача о течении газа под действием сходящейся с постоянной скоростью детонационной волны в режиме Чепмена — Жуге в среде с переменной начальной плотностью. Показана зависимость характера течения до и после фокусировки волны от распределения плотности и отношения теплоемкостей.

Во втором параграфе рассматриваются сходящиеся и расходящиеся автомодельные детонационные волны в среде с постоянной начальной плотностью. Определяется показатель автомодельности, который оказывается неединственным.

§ 1. Пусть по газу с переменной плотностью  $\rho_0 = Ar^{-\omega}$  ( $A$  — некоторая постоянная,  $r$  — расстояние до центра симметрии) движется сильная детонационная волна в сторону центра симметрии. Скорость  $D$  детонационной волны зависит от притока энергии  $Q$  к единице массы газа на фронте волны. Будем считать обе эти величины постоянными.

Следуя [1], скорость  $v$ , плотность  $\rho$ , давление  $p$  представим в виде

$$v = \frac{r}{t} V(\lambda), \quad \rho = \frac{A}{r^\omega} R(\lambda), \quad p = \frac{A}{r^{\omega-2t^2}} P(\lambda), \quad \lambda = \frac{r}{D|t|} \quad (1.1)$$

Движение газа в возмущенной области описывается уравнениями [1]

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{Z \{2(V-1)^3 + (v-1)(\gamma-1)V(V-1)^2 - [2(V-1) + \omega(\gamma-1)/\gamma]Z\}}{(V-1)[V(V-1)^2 + (\omega/\gamma - vV)Z]} \quad (1.2)$$

$$\frac{d \ln \lambda}{dV} = \frac{Z - (V-1)^2}{V(V-1)^2 + (\omega/\gamma - vV)Z} \quad \left( Z = \frac{\gamma P}{R} \right) \quad (1.3)$$

$$ZR^{1-\gamma} = C_1 [R(V-1)]^{\frac{\omega(\gamma-1)}{v-\omega}} \lambda^{-2} \quad (1.4)$$

Здесь  $\gamma$  — отношение теплоемкостей,  $v = 1, 2, 3$ , соответственно для плоской, цилиндрической и сферической симметрии, постоянная  $C_1$  определяется из начальных условий.

При выполнении условия Чепмена — Жуге на фронте сильной детонационной волны имеем начальные условия (значения параметров на детонационной волне будут обозначаться индексом 2)

$$V_2 = \frac{1}{\gamma+1}, \quad Z_2 = \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2}, \quad R_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma} \quad \text{при } \lambda_2 = 1 \quad (1.5)$$

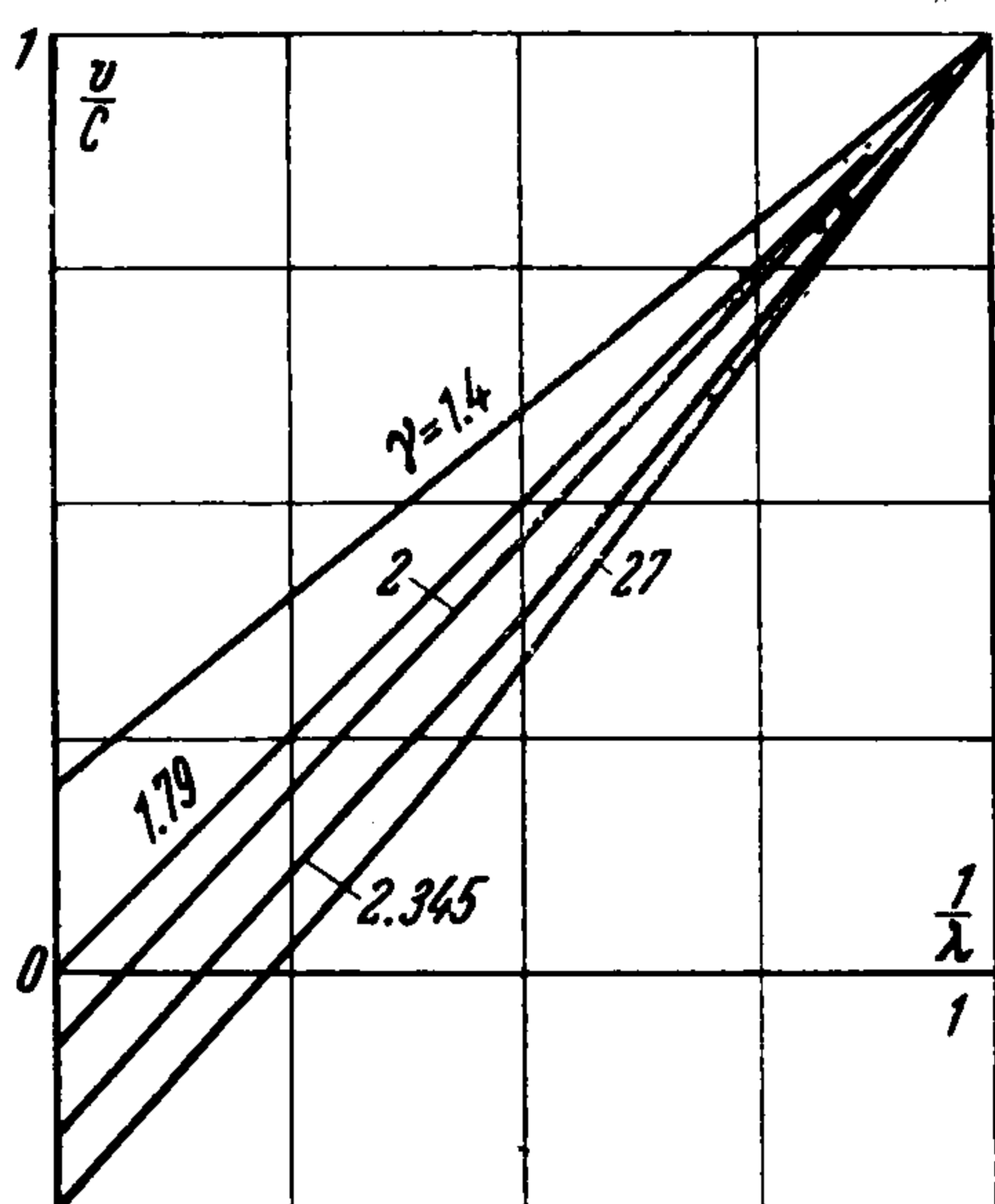
Фокусировке детонационной волны соответствует момент времени  $t = 0$ .

Для решения задачи необходимо построить интегральную кривую на плоскости  $ZV$ , исходящую из начальной точки (1.5) при  $\lambda = 1$  и приходящую в точку  $O(0, 0)$  при  $\lambda = \infty$ , причем  $\lambda$  должна меняться вдоль кривой монотонно. Из анализа уравнений (1.2), (1.3) следует, что сходящаяся детонационная волна в режиме Чепмена — Жуге возможна только при  $\omega \geq (v-1)\gamma/(\gamma \neq 1)$ .

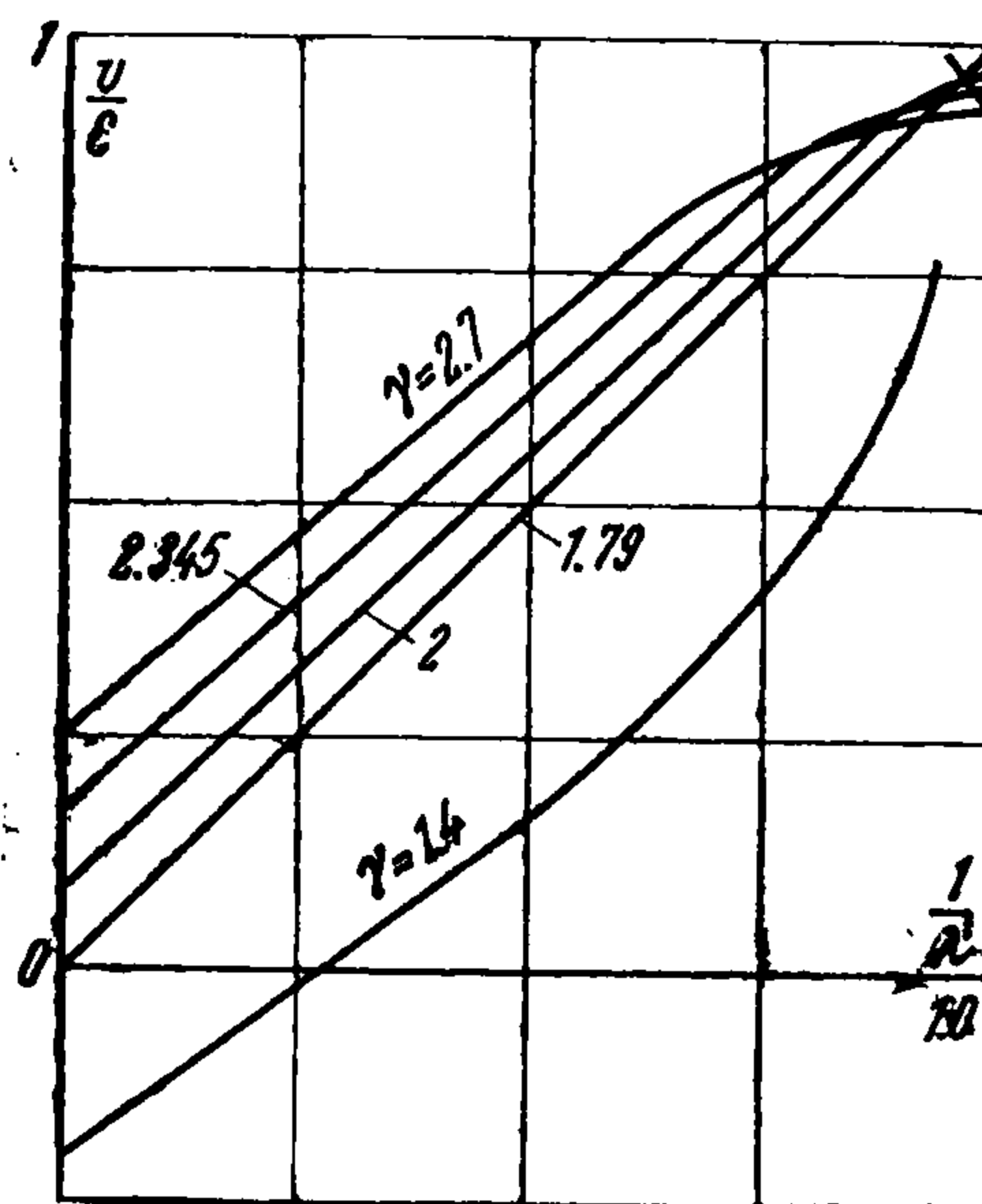
Рассмотрим сферический случай ( $v = 3$ ). При  $\omega > 2\gamma/(\gamma \neq 1)$  в начальной точке (1.5) производная  $dZ/dV > 0$ . При  $\omega = 2\gamma/(\gamma \neq 1)$  начальная точка является особой, и ей соответствуют два значения  $dZ/dV$  положительное и отрицательное. Чтобы случай  $\omega = 2\gamma/(\gamma \neq 1)$  был предельным для  $\omega > 2\gamma/(\gamma \neq 1)$ , выберем из двух значений  $dZ/dV$  только положительное; в этом направлении из особой точки выходит только одна интегральная кривая.

Численным решением уравнений на ЭВМ (1.2), (1.3) установлено, что для случая  $\omega = 2\gamma/(\gamma \neq 1)$  в зависимости от значений  $\gamma$  течение газа до и после момента фокусировки детонационной волны разделяется на пять режимов. Каждый режим определяется расположением интегральной кривой, выходящей из начальной точки (1.5), по отношению к особым точкам уравнения (1.2). Характер особых точек уравнения (1.2) описан в [1].

*Режим А* при  $1 < \gamma < 1.790$ . В момент  $t = 0$  скорость газа одинакова во всем пространстве и направлена к центру. При  $t > 0$  по газу движется от центра симметрии ударная волна. При приближении  $\gamma$  к 1.790 интенсивность ударной волны падает.



Фиг. 1



Фиг. 2

*Режим В* при  $\gamma = 1.790$ . В момент  $t = 0$  скорость газа во всем пространстве обращается в нуль, а ударная волна, возникавшая при  $t = 0$  для меньших значений  $\gamma$  переходит в слабый разрыв.

*Режим В* при  $1.790 < \gamma < 2.345$ . В момент  $t = 0$  скорость газа во всем пространстве одинакова и направлена от центра. Изменение направления скорости происходит под действием градиента давления. Слабый разрыв проявляется в разрыве производных более высокого порядка, чем первый.

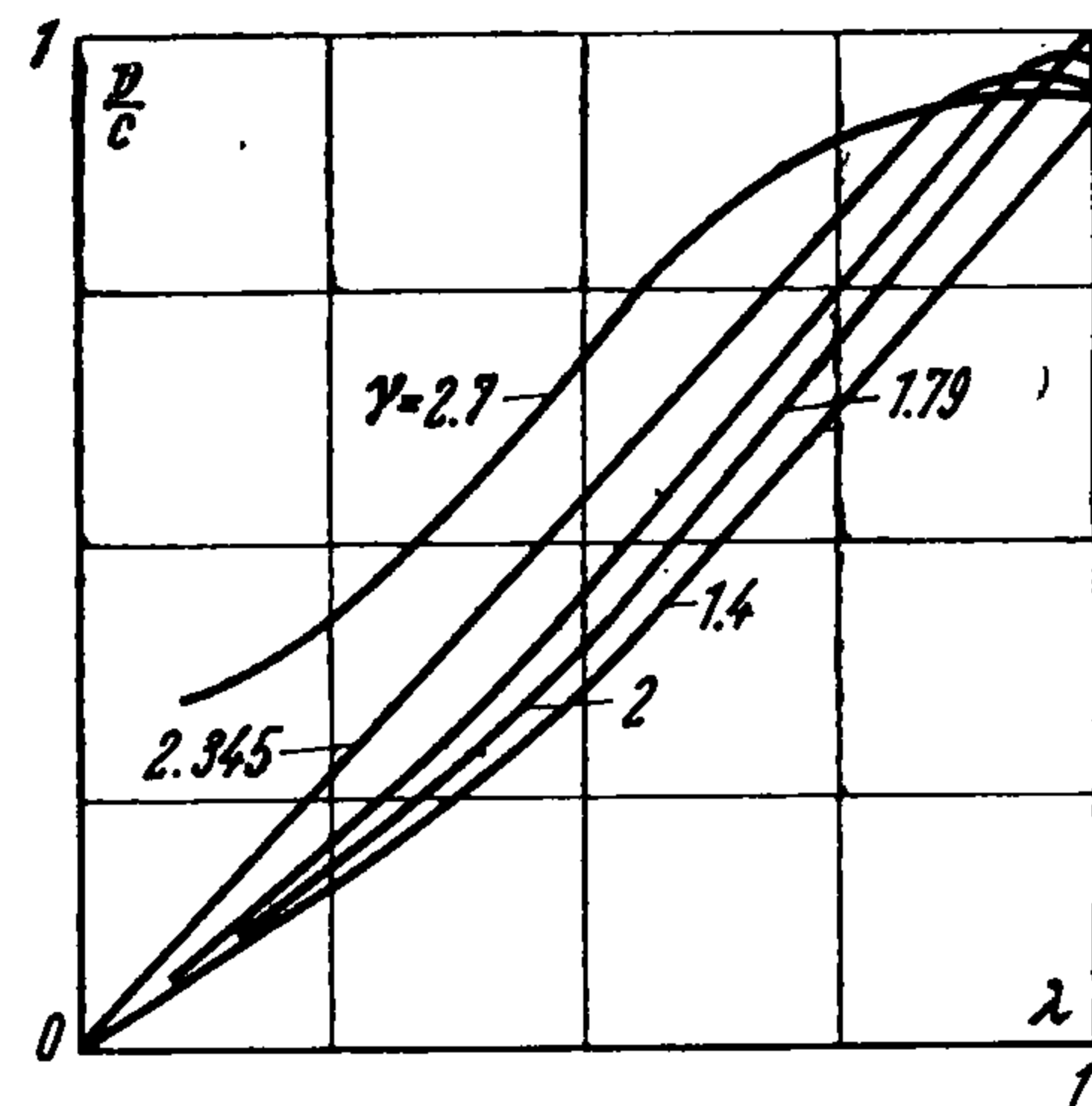
*Режим Г* при  $\gamma = 2.345$ . При  $t = 0$  скорость газа во всем пространстве одинакова и направлена от центра. Если в трех предыдущих случаях фазовая скорость по частицам в пространстве, заполненном газом, при  $t > 0$  была как сверхзвуковой, так и дозвуковой, то в этом случае фазовые скорости только сверхзвуковые.

*Режим Д* при  $\gamma > 2.345$ . При  $t > 0$  в центре симметрии возникает пустота, расширяющаяся с определенной скоростью.

Аналогичное деление режимов течения происходит и при  $\omega > 2\gamma / (\gamma + 1)$ .

Надо отметить, что при  $\omega > 2\gamma / (\gamma + 1)$  на фронте детонационной волны ускорение частиц газа бесконечно большое, а при  $\omega = 2\gamma / (\gamma + 1)$  ускорение конечное.

Графики распределения скоростей в потоке для случая  $\omega = 2\gamma / (\gamma + 1)$  и различных значений  $\gamma$  при  $t < 0$  и  $t > 0$  представлены на фиг. 1—3. По вертикальной оси откладывается  $v/c$ , где  $c = (\gamma + 1)^{-1} D \cdot \text{sgn } t$ , по горизонтальной  $\lambda$  или  $1/\lambda$ . Скорости, направленные к центру симметрии, считаются отрицательными; скорости, направленные от центра симметрии, — положительными. Фиг. 1 соответствует течению до момента фокусировки детонационной волны ( $t < 0$ ), фиг. 2 и 3 — течению после момента фокусировки ( $t > 0$ ).



Фиг. 3

§ 2. Задача о распространении сильной сходящейся детонационной волны в газе с постоянной начальной плотностью рассмотрена в работе [2]. В настоящем параграфе для решения этой задачи применяется метод, изложенный в [1].

Пусть фронт сильной детонационной волны сходится по закону

$$r_2 = a|t|^\delta \tag{2.1}$$

Представим скорость  $v$ , плотность  $\rho$ , давление  $p$  в виде

$$v = \frac{r}{t} V(\xi), \quad \rho = \rho_0 R(\xi), \quad p = \rho_0 \frac{r^2}{t^2} P(\xi), \quad \xi = \frac{r}{a|t|^\delta} \quad (2.2)$$

Тогда уравнения движения [1] примут вид

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{Z \{ [2(V-1) + v(\gamma-1)V](V-\delta)^2 - (\gamma-1)V(V-1)(V-\delta) - [2(V-1) + 2\gamma^{-1}(1-\delta)(\gamma-1)]Z \}}{(V-\delta) \{ V(V-1)(V-\delta) + [2\gamma^{-1}(1-\delta) - vV]Z \}} \quad (2.3)$$

$$\frac{d \ln \xi}{dV} = \frac{Z - (V-\delta)^2}{V(V-1)(V-\delta) + [2\gamma^{-1}(1-\delta) - vV]Z} \quad (2.4)$$

$$ZR^{1-\gamma} = C_1 [R(V-\delta)]^{\frac{2(\delta-1)}{v\delta}} \xi^{-\frac{2}{\delta}} \quad (2.5)$$

Здесь полагается, что  $Q$  пропорциональна  $D^2$ , и обе эти величины переменные и что выполняется режим Чепмена — Жуге. Тогда на фронте сильной детонационной волны выполняются соотношения

$$V_2 = \frac{\delta}{\gamma+1}, \quad Z_2 = \frac{\delta^2 \gamma^2}{(\gamma+1)^2}, \quad R_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma} \quad \text{при } \xi_2 = 1 \quad (2.6)$$

Из анализа уравнений (2.3) и (2.4) следует, что сходящаяся и расходящаяся детонационные волны возможны соответственно при условиях

$$0 < \delta \leq \delta_*, \quad \delta_* \leq \delta \leq 1 \quad \left( \delta_* = \frac{3(\gamma+1)}{\gamma(2+v)+3} \right) \quad (2.7)$$

В плоскости  $ZV$  на параболе  $Z = (V - \delta)^2$  имеются две особые точки. При  $\delta_* \leq \delta \leq 1$ , т. е. в случае расходящейся детонационной волны, начальная точка (2.6) располагается на параболе  $Z = (V - \delta)^2$  между этими особыми точками. Интегральная кривая в этом случае проходит через верхнюю особую точку (узел) параболы  $Z = (V - \delta)^2$ , затем ее надо продолжить, до бесконечно удаленной особой точки (седло,  $Z = \infty$ ,  $V = 2v^{-1}\gamma^{-1}(1-\delta)$ ), которая соответствует центру симметрии в физическом пространстве. При  $\delta = 1$  получается решение Я. Б. Зельдовича. В этом случае  $D = \text{const}$ ,  $Q = \text{const}$ . Остальные показатели могут реализоваться, если считать, что  $Q$  пропорционально  $D^2$  или, что  $Q = Q_0 r^{2m}$ , где  $m = (\delta - 1) / \delta$ .

Надо отметить, что при  $\delta_* < \delta \leq 1$  ускорение частиц газа на фронте детонационной волны бесконечно большое, а при  $\delta = \delta_*$  возможна расходящаяся детонационная волна в режиме Чепмена — Жуге, когда ускорение на фронте детонационной волны конечное.

В случае сходящейся детонационной волны при  $\delta = \delta_*$  начальная точка (2.6) является особой (узел для  $\gamma > 1$ ), и в ней возможны два значения  $dZ/dV$ : положительное и отрицательное. Рассматривая  $V = \delta_*$  как предельное для меньших  $\delta$ , при которых  $dZ/dV > 0$ , выберем положительное значение  $dZ/dV$ . Кроме того, с таким направлением из особой точки выходит только одна интегральная кривая, и только по этой кривой наблюдается монотонное убывание до нуля величины скорости частиц газа за детонационной волной. При  $\delta = \delta_*$  ускорение на фронте детонационной волны конечное. В работе [2] ошибочно полагается, что оно бесконечно большое. В начальной точке выражение для производной будет

$$\frac{d}{d\xi} \frac{v}{v_2} = (1-v) \frac{2\gamma+1+k}{2+k} \quad (2.8)$$

$$k = 1/8 (4\gamma - 5 \pm \sqrt{48\gamma^2 + 104\gamma + 105}) \quad \text{для } v = 2$$

$$k = 1/5 (\gamma - 2 \pm \sqrt{21\gamma^2 + 26\gamma + 54}) \quad \text{для } v = 3$$

Верхний знак в (2.8) относится к сходящейся детонационной волне, нижний — к расходящейся.

При  $\delta > \delta_*$  ускорение на фронте детонационной волны бесконечно большое. Начальная точка (2.6) в этом случае находится на параболе  $Z = (V - \delta)^2$  выше верхней особой точки параболы  $Z = (V - \delta)^2$ .

Следует отметить, что при  $Q$ , пропорциональном  $D^2$ , показатель автомодельности не определяется единственным образом, но если потребовать конечность ускорения частиц газа на фронте детонационной волны, то  $\delta$  единственно. При  $Q = Q_0 r^{2m}$  показатель  $\delta$  определяется однозначно.

Автор благодарит С. В. Фальковича за советы и обсуждение результатов и А. И. Дмитриеву за помощь в проведении расчетов на ЭВМ.

Поступила 2 V 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике М., «Наука», 1965.
2. Нигматулин Р. И. Сходящиеся цилиндрические и сферические детонационные волны. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, стр. 158—163.

### ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ИНВАРИАНТНОГО СООТНОШЕНИЯ ГЕССА

А. Я. Савченко (Донецк)

Решение Гесса [1] задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, обладает своеобразными особенностями, исследованию которых были посвящены работы Жуковского [2], Чаплыгина [3] и многие другие. Недавно выяснено, что не все решения указанной задачи устойчивы к обобщениям [4]. Так, например, решение Ковалевской [5] не имеет аналога с соответствующими свойствами, если к телу приложен гиростатический момент. Однако для решения Гесса, как показал Л. Н. Сретенский [6,7], имеется соответствующий аналог в решении задачи о гиростате. Еще более общий результат получен П. В. Харламовым [8], который указал линейное инвариантное соотношение в задаче о движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью. Частными случаями решения П. В. Харламова оказывается и решение Л. Н. Сретенского и, естественно, решение Гесса.

Рассматривается тело с неподвижной точкой, имеющее эллипсоидальную полость, целиком заполненную идеальной жидкостью, находящейся в однородном вихревом движении. Эта задача изучалась в монографии Н. Н. Моисеева и В. В. Румянцева [9]. В поле силы тяжести движение такого тела описывается системой девяти уравнений. И в этом случае обнаруживается линейное инвариантное соотношение, обобщающее соотношение Л. Н. Сретенского и Гесса, но в отличие от последних найденное здесь соотношение не будет частным случаем инвариантного соотношения П. В. Харламова.

Полагая, что центр тяжести рассматриваемой системы находится на перпендикуляре к круговому сечению гирационного эллипсоида (условие Гесса)

$$z_c = 0, \quad x_c \sqrt{A(C-B)} - y_c \sqrt{B(A-C)} = 0$$

запишем уравнения движения тела в обозначениях работы [9]

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{dt} + A' \frac{d\Omega_1}{dt} + (C-B)\omega_2\omega_3 + C'\omega_2\Omega_3 - B'\omega_3\Omega_2 &= Mgy_c\gamma_3 \\ B \frac{d\omega_2}{dt} + B' \frac{d\Omega_2}{dt} + (A-C)\omega_3\omega_1 + A'\omega_3\Omega_1 - C'\omega_1\Omega_3 &= -Mgx_c\gamma_3 \\ C \frac{d\omega_3}{dt} + C' \frac{d\Omega_3}{dt} + (B-A)\omega_1\omega_2 + B'\omega_1\Omega_2 - A'\omega_2\Omega_1 &= Mg(x_c\gamma_2 - y_c\gamma_1) \\ \frac{d\Omega_1}{dt} &= 2a^2 \left( \frac{\omega_3\Omega_2}{a^2+b^2} - \frac{\omega_2\Omega_3}{c^2+a^2} \right) - 2\Omega_2\Omega_3 \frac{a^2(c^2-b^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= 2b^2 \left( \frac{\omega_1\Omega_3}{b^2+c^2} - \frac{\omega_3\Omega_1}{a^2+b^2} \right) - 2\Omega_3\Omega_1 \frac{b^3(a^2-c^2)}{(b^2+c^2)(a^2+b^2)} \\ \frac{d\Omega_3}{dt} &= 2c^2 \left( \frac{\omega_2\Omega_1}{c^2+a^2} - \frac{\omega_1\Omega_2}{b^2+c^2} \right) - 2\Omega_1\Omega_2 \frac{c^2(b^2-a^2)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} \\ \frac{d\gamma_1}{dt} &= \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2 \end{aligned} \quad (1)$$