Асимптотика при $l \to l_1$

$$v_{\alpha_1} \approx v_{\alpha_{10}} + A_1(l - l_1), \qquad v_{\delta_1} \approx v_{\delta_{10}} + B_1(l - l_1) \tag{5.28}$$

где A_1 и B_1 связаны лишь одним линейным соотношением:

$$\frac{ay - cx}{ax + cy} A_1 + B_1 = \frac{v_{\alpha_{10}}}{2\sqrt{h}\,\varphi} \tag{5.29}$$

Согласно требованию (5.22) необходимо,чтобы значение B в асимптотике (5.26) равнялось нулю. Учитывая, что l меняется в направлении $0 \to \infty$, $- \infty, \to l_1 \to l_0$, этого можно добиться, варьируя значения A_1 и B_1 в пределах уравнения (5.29), т. е. допускается слабый разрыв на характеристике $l = l_1$ при ее прохождении.

Вопросы, затронутые в этой работе, обсуждались с С. К. Годуновым. Многие из приведенных формул проверялись И. Л. Киреевой. Численное интегрирование уравнений было выполнено на ЭВМ И. Л. Киреевой и Н. И. Куранчевой. Пользуюсь случаем выразить всем названным лицам свою глубокую благодарность.

Поступила 16 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. О распределении давления и скорости в продуктах детонационного взрыва, в частности, при сферическом распространении детонационной волны. ЖЭТФ, 1942, т. 12, № 9, стр. 389.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Г. И. Назаров, А. А. Пучков

(Томск)

В отличие от решения Гарабедяна [1] и решения, построенного методом Бергмана в [2], дается точное общее решение для пары функций φ и ψ (φ — потенциал скорости, ψ — функция тока), системы уравнений в частных производных осесимметрического течения несжимаемой идеальной жидкости, зависящее от произвольной аналитической функции комплексного переменного и ограниченное на оси симметрии.

Решения, построенные в [1] и [2] неограниченно возрастают при приближении к оси симметрии.

Пространственные установившиеся течения несжимаемой жидкости с осевой симметрией характеризуются системой уравнений [3]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{y}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{y}\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1}$$

Здесь потенциал скорости φ и функция тока ψ зависят только от двух переменных цилиндрической системы координат x, y ($y > 0$, x — параллельно оси симметрии).

Интегралы системы уравнений (1) будем искать в виде рядов

$$\varphi = \Omega(y) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(y) \frac{\partial^k \Phi}{\partial y^k}, \qquad \psi = A + Bx + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(y) \frac{\partial^k \Psi}{\partial y^k} \tag{2}$$

Здесь Φ, Ψ — произвольные гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши — Римана

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{3}$$

Ω, α_k, β_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — искомые функции от одного аргумента y.

Составляем соответствующие производные от (2), вносим их в (1) и учитываем равенства (3) и вытекающие из (3) соотношения вида

$$\frac{\partial^{k+1}\Phi}{\partial x \partial y^k} = \frac{\partial^{k+1}\Psi}{\partial y^{k+1}}, \quad \frac{\partial^{k+1}\Psi}{\partial x\, \partial y^k} = -\frac{\partial^{k+1}\Phi}{\partial y^{k+1}} \tag{4}$$

Тогда получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\partial^{k+1}\Psi}{\partial y^{k+1}} = -\frac{1}{y}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\beta_k' \frac{\partial^k \Psi}{\partial y^k} + \beta_k \frac{\partial^{k+1}\Psi}{\partial y^{k+1}}\right)$$

$$\Omega' + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha'_k \frac{\partial^k\Phi}{\partial y^k} + \alpha_k \frac{\partial^{k+1}\Phi}{\partial y^{k+1}}\right) = \frac{1}{y}\left(B - \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k \frac{\partial^{k+1}\Phi}{\partial y^{k+1}}\right)$$

Эта система удовлетворится, если наложить условия вида:

$$\alpha'_0 = 0, \quad \beta'_0 = 0, \quad \Omega' = \frac{B}{y}$$

$$\alpha_{k-1} = -\frac{1}{y}(\beta_k' + \beta_{k-1}), \quad \alpha_k' + \alpha_{k-1} = -\frac{\beta_{k-1}}{y} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

Отсюда видно, что $\alpha_0 = \alpha$ и $\beta_0 = \beta$ могут быть только произвольными постоянными, а α_k и β_k $(k = 1, 2, \ldots)$ определяются через комбинацию от предыдущих функций α_{k-1}, β_{k-1} и, в конечном счете, все они могут быть выражены только через α, β и y и затабулированы раз и навсегда по формулам

$$\alpha_k = -\int_{y_0}^{y}\left(\frac{\beta_{k-1}}{y} + \alpha_{k-1}\right)dy, \quad \beta_k = -\int_{y_0}^{y}(y\alpha_{k-1} + \beta_{k-1})\,dy \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

Выделим класс решений, который в отличие от [1,2] не обращается в бесконечность на оси симметрии ($y = 0$). Для этого, пользуясь произволом, положим $B = 0$, $\beta_0 = 0$ и $\beta = 0$. Тогда из (5) $\Omega = c = \text{const}$. Не нарушая общности, положим $\alpha_0 = \alpha = 1$. Беря в (6) за нижний предел $y_0 = 0$, придем к рекуррентным зависимостям:

$$\alpha_k = a_k y^k, \qquad \beta_k = b_k y^{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

$$a_k = \frac{k+1}{k} b_k, \; b_k = -\frac{1}{k+1}(a_{k-1} + b_{k-1}) \quad (a_0 = 1, \; b_0 = 0) \tag{8}$$

Из (2), (7) и (8) приходим к формулам

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k \frac{\partial^k \Phi}{\partial y^k}, \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y^{n+1}\frac{\partial^n \Psi}{\partial y^n} \tag{9}$$

$$a_k = (-1)^{k+1}\frac{(2k-1)!!}{k!k!}, \quad b_n = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(n-1)!\,(n+1)!}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots; \quad (-1)!! = -1) \tag{10}$$

Формулы (9) в комплексной форме имеют вид

$$\varphi = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty} a_k (iy)^k \frac{d^k w}{dz^k}, \quad \psi = y \operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty} b_n (iy)^n \frac{d^n w}{dz^n} \tag{11}$$

Здесь $w(z) = \Phi + i\Psi$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$. Известна формула Коши

$$\frac{d^k w}{dz^k} = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{w(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \tag{12}$$

(γ — произвольный замкнутый контур, внутри которого находится точка z).

Вносим (12) в (11) и, предполагая ряды равномерно сходящимися, поменяем местами знаки суммирования и интегрирования (область сходимости будет указана ниже).

В результате с учетом (10) получим

$$\varphi = -\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\sum_{k=0}^{\infty} C_k \left(\frac{2iy}{z-\zeta}\right)^k d\zeta, \quad \left(C_k = \frac{(2k-1)!!}{k!\,2^k}\right)$$

$$\psi = -y^2 \operatorname{Im}\frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{w'(z)}{(\zeta - z)^2}\sum_{n=1}^{\infty} nD_n \left(\frac{2iy}{z-\zeta}\right)^{n-1} d\zeta, \quad \left(D_n = \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!\,2^n}\right) \qquad (13)$$

Замечаем, что коэффициенты

$$C_{k+1} = \frac{(k+{}^1/_2)(k+1)}{(k+1)(k+1)} C_k, \qquad D_{n+1} = \frac{(n+{}^1/_2)(n+1)}{(n+1)(n+2)} D_n$$

изменяются так же, как в гипергеометрическом ряде. Это позволяет формулы (13) представить в виде

$$\varphi = -\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} F\left({}^1/_2, 1, 1, \frac{2yi}{z-\zeta}\right) d\zeta$$

$$\psi = -y \operatorname{Im}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma w(\zeta)\frac{d}{d\zeta} F\left({}^1/_2, 1, 2, \frac{2yi}{z-\zeta}\right) d\zeta \qquad (14)$$

Из (14) легко видеть, что ряды, входящие в (11), сходятся в области

$$\left|\frac{2yi}{z-\zeta}\right| \leqslant a < 1$$

Или, полагая $\rho = |z-\zeta|$, имеем $\rho > 2y$ $(y > 0)$. То есть

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 > 4y^2 \quad (z = x + iy, \ \zeta = \xi + i\eta) \qquad (15)$$

На линии $y = 0$ условие (15) всегда выполняется. Из (14) при $y = 0$, $\psi = 0$ (нулевая линия тока). Интегралы (9) или, что то же самое, (11) и (14) конечны на оси симметрии. Этим они существенно отличаются от известных решений Гарабедяна [1] и [2].

Таким образом мы доказали теорему: комплексный потенциал $w(z)$ при помощи линейных операторов (11) или (14) определяет некоторое осесимметрическое течение идеальной несжимаемой жидкости.

Задавая в (11) произвольно аналитическую функцию $w(z)$, можно получить разнообразные частные решения и, таким образом, сделать набор элементарных осесимметрических течений несжимаемой жидкости.

В силу линейности системы (1), всякая линейная комбинация частных решений также будет решением. Такой подход аналогичен известному обратному методу из теории плоских течений несжимаемой жидкости. При решении же прямых граничных задач функция $w(z)$ должна быть найдена тем или иным путем. Эта задача несравненно сложнее первой.

Приведем несколько примеров, основанных на выборе функции $w(z)$.

1. Положим $w(z) = Uz$ (U — действительная постоянная). Тогда из (10), (11) находим

$$\varphi = Ux, \ \psi = -{}^1/_2 U y^2$$

Это известные формулы, характеризующие однородный осесимметрический поток, движущийся со скоростью U параллельно оси симметрии [3].

2. Положим $w = Q/z$ (плоский диполь). Тогда

$$w^{(k)}(z) = Q(-1)^k \frac{k!}{z^{k+1}} \qquad (16)$$

Для функции (16) формулы (10) и (11) дадут

$$\varphi = -Q \operatorname{Re} \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} C_k \zeta^k, \quad \psi = -2y^2 \operatorname{Im} \frac{i}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} n D_n \zeta^{n-1} \tag{17}$$

Здесь

$$C_k = \frac{(2k-1)!!}{k!\, 2^k}, \quad D_n = \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!\, 2^n}, \quad \zeta = \frac{2iy}{z} \tag{18}$$

С учетом (18) формулы (17) можно записать в виде

$$\varphi = -Q \operatorname{Re} \frac{1}{z} F(1/2, 1, 1, \zeta), \qquad \psi = -2y^2 \operatorname{Im} \frac{i}{z^2} \frac{d}{d\zeta} F\left(\frac{1}{2}, 1, 2, \zeta\right) \tag{19}$$

Известны равенства [4]:

$$F\left(\frac{1}{2}, 1, 1, \sin^2\xi\right) = \frac{1}{\cos\xi}, \quad F\left(\alpha - \frac{1}{2}, \alpha, 2\alpha, \zeta\right) = \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\zeta}}\right)^{2\alpha-1} \tag{20}$$

В рассматриваемом случае $\zeta = \sin^2\xi, \alpha = 1$. Тогда

$$\cos\xi = \sqrt{1-\zeta} = \sqrt{1 - \frac{2iy}{z}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

$$\frac{dF}{d\zeta} = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta}\,(1+\sqrt{1-\zeta})^2} = \frac{z^3}{\sqrt{x^2+y^2}\,(z+\sqrt{x^2+y^2})^2} \tag{21}$$

Формулы (19) — (21), после упрощений приводятся к виду ($Q = q / 4\pi$)

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \psi = \frac{q}{4\pi}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right) \tag{22}$$

Формулы (22) характеризуют пространственный источник обильности q, расположенный в начале отсчета цилиндрической системы координат [3].

Линейные операторы (11), (14) с комплексным потенциалом $w = Uz + q / 4\pi z$ характеризуют обтекание полутела Фурмана (полубесконечное тело вращения) [3].

3. Если положить $w = z^2$, то из (10) и (11) легко придем к формулам

$$\varphi = x^2 - \frac{y^2}{2}, \qquad \psi = -xy^2 \tag{23}$$

В плоском случае функция $w = z^2$ характеризует течение в координатных углах по равнобочным гиперболам со скоростью в точке z, равной $v \doteq 2\sqrt{x^2+y^2}$, а в осесимметрическом случае, как видно из (23), эта функция в меридиональном сечении x, y дает также обтекание угла, но в качестве линий тока здесь выступают неравнобочные гиперболы и скорость в точке z равна $v = \sqrt{4x^2+y^2}$.

Эти примеры показывают, что между осесимметрическими и плоскими течениями несжимаемых жидкостей не существует непосредственной связи: один и тот же комплексный потенциал в общем случае характеризует не идентичные течения.

Поступила 4 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Gerabedian P. R. An example of axially simmetric flow with a free surface. In studies Math. and Mech., N. Y. Acad. Press Inc., 1954.
2. Назаров Г. И. Точное решение осесимметрической задачи идеальной жидкости. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. I, Л.— М., Гостехиздат, 1948.
4. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.— Л., Гостехиздат, 1948.