

О ДВИЖЕНИИ ГАЗА ЗА РАСХОДЯЩЕЙСЯ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ С ВЫРЕЗАННЫМ КОНУСОМ

Я. М. Каждан

(Москва)

Движения газа за детонационной волной, расходящейся от точки начального воспламенения O (начало координат) в пространстве, заполненном взрывчатым веществом ВВ, с вырезанным полым конусом (ось конуса: $x = 0, y = 0, z \leq 0$), обладает цилиндрической симметрией и автомодельно. Поэтому все газодинамические величины суть функции двух независимых переменных $\xi = r/t, \eta = z/t, r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (t — время), удовлетворяющие уравнениям газодинамики и соответствующим граничным условиям, написанным в этих переменных. Их нахождение требует применения численных методов решения уравнений в частных производных (два независимых переменных ξ и η).

С. К. Годуновым было высказано предположение, что существует в плоскости $\xi\eta$ область, где течение совпадает с соответствующим сферически симметричным течением, найденным Я. Б. Зельдовичем [1]. Последнее возникает при распространении детонационной волны от начала O , если все пространство заполнено ВВ. В этом случае движение газа сферически симметрично, автомодельно и нахождение газодинамических функций сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими краевыми условиями. Исследования, выполненные в настоящей работе, оправдывают высказанное предположение и указывают метод определения этой области.

В работе также приведены асимптотики в окрестности возникающих особых точек решения.

1. Течение за фронтом детонационной волны определяется системой уравнений газодинамики, уравнением состояния продуктов взрыва ПВ, начальными и граничными условиями. Выбор переменных диктуется спецификой задачи. Рассматриваемое течение обладает цилиндрической симметрией, поэтому достаточно рассмотреть движение в некоторой полуплоскости, проходящей через ось симметрии z и ограниченной ею. Ось r проходит через точку O и перпендикулярна к оси z . Так как течение к тому же изэнтропично, то уравнения газодинамики при независимых переменных t, r, z выглядят так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнение состояния продуктов взрыва $p = \kappa p^\kappa$.

Обозначения: ρ — плотность, p — давление, κ — показатель адиабаты, v_r и v_z — компоненты скорости, направленные соответственно вдоль оси r и оси z .

В начальный момент $t = 0$ воспламенения газа в точке O , все пространство вне пустого конуса (вершина в точке O , ось $z < 0$ и угол между осью и образующей γ) заполнено неподвижным ВВ ($v_r = v_z = 0$) с постоянной плотностью $\rho_0 = \kappa / \kappa + 1$ и давлением $p_0 = 0$.

Возникшее течение ограничено, с одной стороны, фронтом детонационной волны, с другой стороны, — свободной поверхностью ($p = 0$).

Фронт детонационной волны удовлетворяет условию Жуге. Поэтому значения функций на фронте должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \rho_1 (D - u_1) = \frac{\kappa}{\kappa + 1} D, \quad \rho_1 (D - u_1)^2 + p_1 = \frac{\kappa}{\kappa + 1} D^2 \\ w_1 = 0, \quad D = u_1 + c_1, \quad c = \kappa \rho^{1/2 (\kappa - 1)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь u — нормальная, а w — касательная к направлению фронта компоненты скорости, D — скорость волны, c — скорость звука. Индекс 1 означает значения функций на фронте. Система (1.2) легко разрешима

$$\rho_1 = 1, \quad u_1 = 1, \quad w_1 = 0, \quad D = \kappa + 1, \quad c_1 = \kappa$$

Таким образом, во всех точках фронта волны скорость волны постоянна. Следовательно, в полуплоскости rz фронт волны (фиг. 1) в момент t представляет собой часть окружности AC с центром в точке O , радиусом Dt ; A и C суть точки пересечения с образующей конуса и осью z . Рассматриваемая задача автомодельна, поэтому перейдем к автомодельным переменным $\xi = r/t$, $\eta = z/t$. В качестве искомым функций возьмем v_r , v_z , c^2 и представим систему (1.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial \xi} (v_r - \xi) + \frac{\partial v_r}{\partial \eta} (v_z - \eta) + \frac{1}{\kappa - 1} \frac{\partial c^2}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial \xi} (v_r - \xi) + \frac{\partial v_z}{\partial \eta} (v_z - \eta) + \frac{1}{\kappa - 1} \frac{\partial c^2}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial c^2}{\partial \xi} (v_r - \xi) + \frac{\partial c^2}{\partial \eta} (v_z - \eta) + (\kappa - 1) \left(\frac{\partial v_r}{\partial \xi} + \frac{\partial v_z}{\partial \eta} + \frac{v_r}{\xi} \right) c^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Фронту волны соответствует дуга AC окружности $\xi^2 + \eta^2 = D^2$ со значениями функций на ней

$$v_r = \xi / D, \quad v_z = \eta / D, \quad c^2 = \kappa^2$$

Заметим, что и в случае сферической симметрии, дуга AC принадлежит фронту волны и значения функций на ней те же.

В виду истечения продуктов взрыва в пустоту возникает центрированная волна разрежения, с вершиной в точке A , оканчивающаяся свободной границей $\eta = \eta(\xi)$, исходящей из точки A , вдоль которой $p = 0$; в главном члене движение в этой волне соответствует решению Прандтля — Майера. Поэтому удобно перейти к полярным координатам α , δ с вершиной в точке A :

$$\xi = D \sin \gamma + \alpha \cos(\gamma + \sqrt{h} \delta), \quad \eta = -D \cos \gamma + \alpha \sin(\gamma + \sqrt{h} \delta) \quad (1.4)$$

и к соответствующим скоростям

$$\begin{aligned} v_r &= D \sin \gamma + v_\alpha \cos(\gamma + \sqrt{h} \delta) - v_\delta \sin(\gamma + \sqrt{h} \delta) \quad \left(h = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \right) \\ v_z &= -D \cos \gamma + v_\alpha \sin(\gamma + \sqrt{h} \delta) + v_\delta \cos(\gamma + \sqrt{h} \delta) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $\sqrt{h} \delta$ — угол, образованный лучом, исходящим из точки A , с направлением фронта в точке A ; α — расстояние по лучу от точки A , а v_α и v_δ — компоненты скорости, направленные соответственно по лучу, исходящему из точки A под углом $\sqrt{h} \delta$ и перпендикулярно ему. Исходная газодинамическая система после перехода к этим переменным и функциям приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} (v_\alpha - \alpha) \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{v_\delta}{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \delta} - v_\delta \right) + \frac{1}{\kappa - 1} \frac{\partial c^2}{\partial \alpha} &= 0 \\ (v_\alpha - \alpha) \frac{\partial v_\delta}{\partial \alpha} + \frac{v_\delta}{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial v_\delta}{\partial \delta} + v_\alpha \right) + \frac{1}{(\kappa - 1) \sqrt{h} \alpha} \frac{\partial c^2}{\partial \delta} &= 0 \\ (v_\alpha - \alpha) \frac{\partial c^2}{\partial \alpha} + \frac{v_\delta}{\sqrt{h} \alpha} \frac{\partial c^2}{\partial \delta} + (\kappa - 1) c^2 \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{v_\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{h} \alpha} \frac{\partial v_\delta}{\partial \delta} + \right. \\ \left. + \frac{v_\alpha \cos(\gamma + \sqrt{h} \delta) - v_\delta \sin(\gamma + \sqrt{h} \delta) + D \sin \gamma}{\alpha \cos(\gamma + \sqrt{h} \delta) + D \sin \gamma} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Уравнение фронта волны

$$\alpha = 2(\kappa + 1) \sin \sqrt{h} \delta \quad \left(0 \leq \delta \leq \frac{\pi - \gamma}{2 \sqrt{h}} \right)$$

На фронте

$$v_\delta = \kappa \cos \sqrt{h} \delta, \quad v_\alpha = (\kappa + 2) \sin \sqrt{h} \delta, \quad c^2 = \kappa^2$$

2. Решение поставленной задачи может быть представлено как возмущение сферически симметричного движения за детонационной волной сильной волной разрежения, возникшей в результате истечения ПВ в пустоту. Из общих соображений следует, что граница между областью сферически симметричного решения и возмущенной средой должна состоять из характеристики и фронта ударной волны, если таковой возникнет. Очевидно, что характеристика должна выходить из точки A (фиг. 1) — вершины волны разрежения. Определяющее ее дифференциальное уравнение

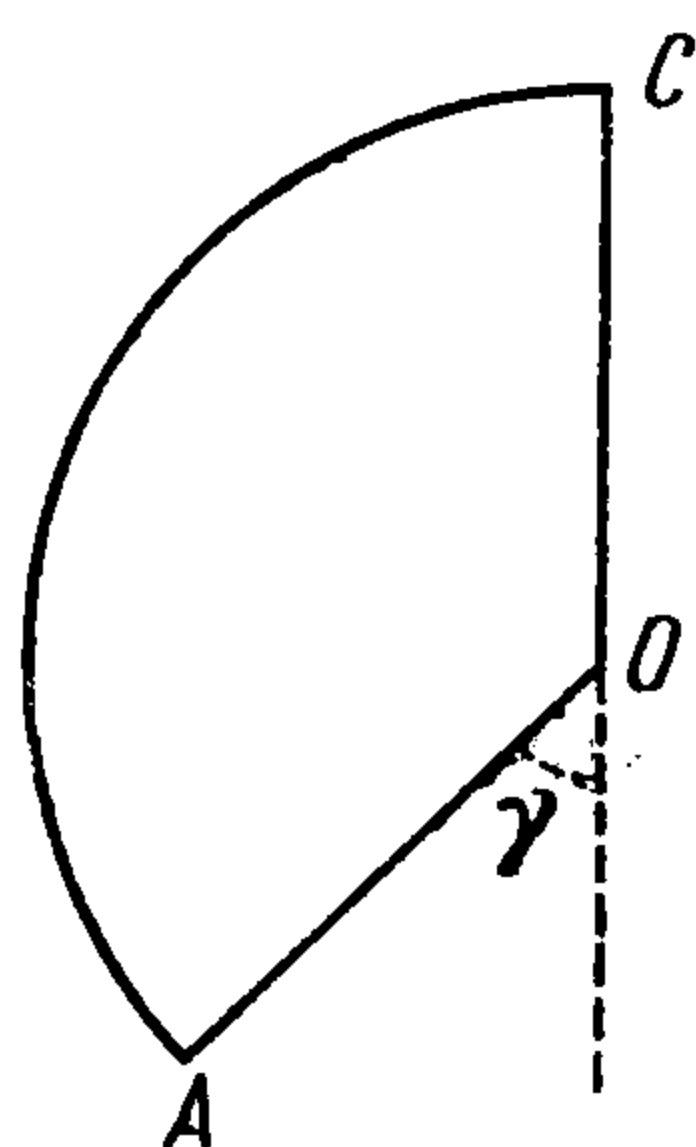
$$\frac{d\zeta}{d\delta} = \frac{\sqrt{h} \zeta a (D \sin \sqrt{h} \delta - y)}{cy - ax} \quad (\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \quad (2.1)$$

$$a = \sqrt{(\zeta - u)^2 - c^2}, \quad x = D \cos \sqrt{h} \delta, \quad y = \begin{cases} \sqrt{\zeta^2 - x^2} & (0 \leq \delta \leq \delta_0) \\ -\sqrt{\zeta^2 - x^2} & (\delta \geq \delta_0) \end{cases}$$

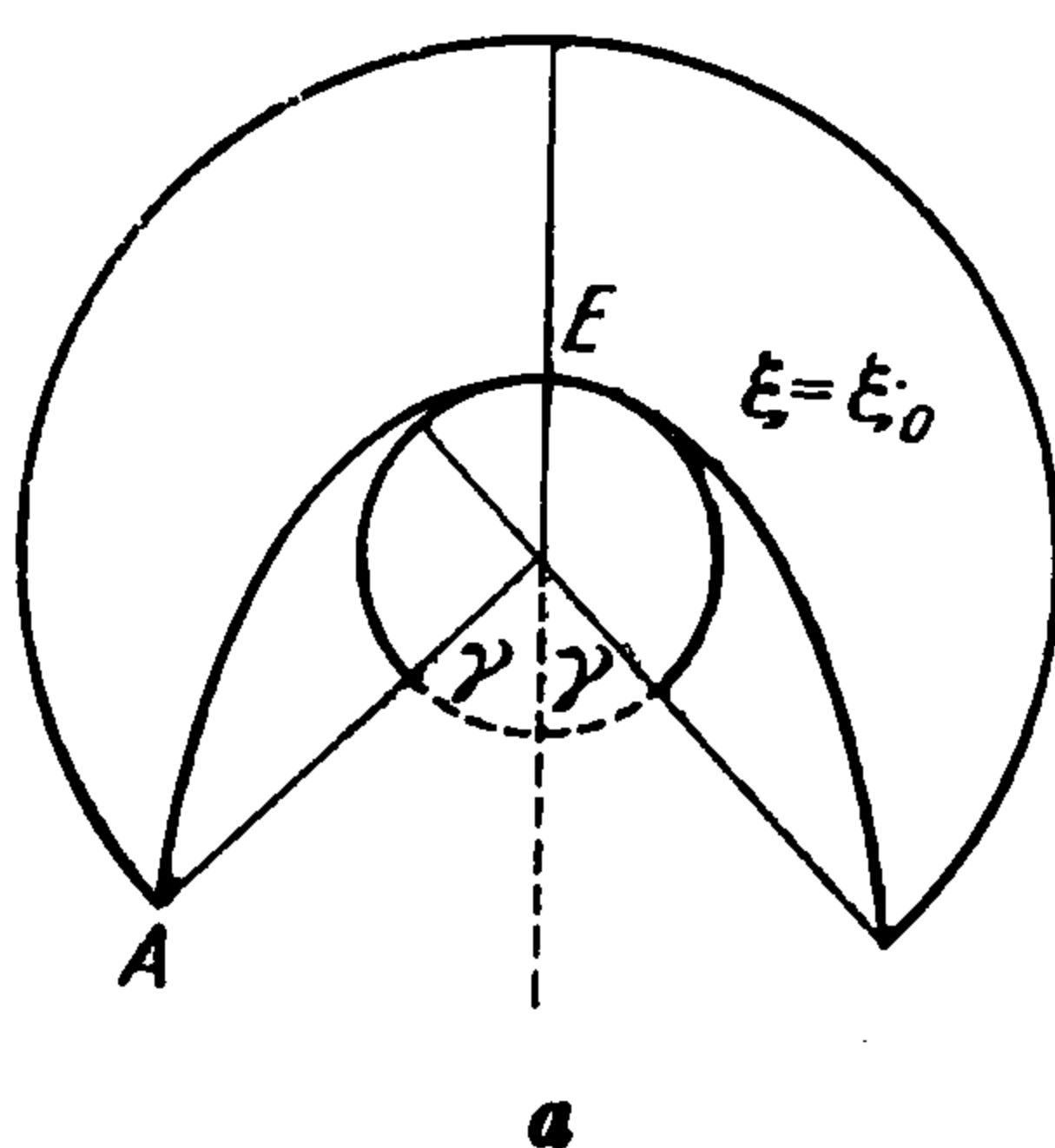
Начальные данные

$$\zeta = (\kappa + 1) \quad \text{при } \delta = 0$$

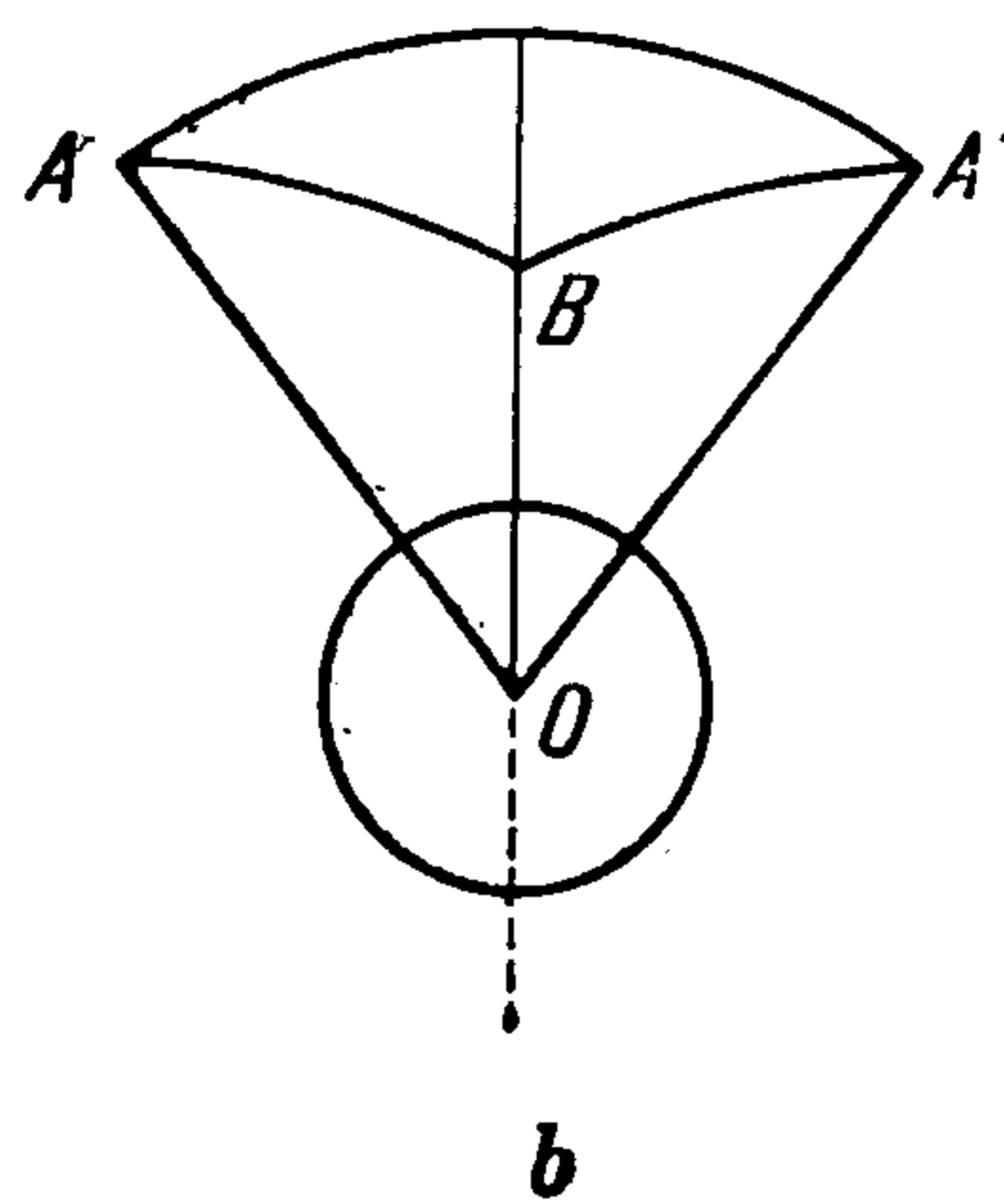
Здесь ζ — автомодельная переменная сферически симметричного решения, $(\delta_0, D \cos \sqrt{h} \delta_0)$ — точка пересечения искомой интегральной кривой с особой инте-



Фиг. 1



Фиг. 2



гральной кривой $y = 0$. Автомодельные функции $u(\zeta)$, $c(\zeta)$ — сферически симметричного решения, определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{du}{d\zeta} = \frac{2uc^2}{\zeta [(\zeta - u)^2 - c^2]} \quad (2.2)$$

$$\frac{dc}{d\zeta} = \frac{(\kappa - 1) uc (\zeta - u)}{\zeta [(u - \zeta)^2 - c^2]} \quad (2.3)$$

с начальными данными

$$\zeta = (\kappa + 1), \quad u = 1, \quad c = \kappa$$

Начальная точка $(\delta = 0, \zeta = \kappa + 1)$ является особой точкой уравнения (2.1). Кривые $\zeta = \kappa + 1$ — фронт детонационной волны, $y = 0$ — интегралы этого уравнения, но не являются характеристиками (не выполнено соотношение вдоль характеристик). Отбор характеристики осуществляется начальной асимптотикой функции $\zeta(\delta)$, полученной из уравнения (2.1) в предположении, что ищутся его решения, отличные от $\zeta = \kappa + 1$ и $\zeta = x$:

$$\zeta = \kappa + 1 - \frac{64}{81} \kappa h^2 \delta^4 \quad (2.4)$$

В работе [1] было показано, что в случае сферической симметрии существует характеристика $\zeta = \zeta_0$, ограничивающая область покоя: при $\zeta \leq \zeta_0$ скорость $u = 0$ и $c = \zeta_0$. Эта характеристика, очевидно, удовлетворяет уравнению (2.1). Оказывается, что при изменении δ от 0 до некоторого значения δ_1 функция $\zeta(\delta)$ меняется монотонно от $\kappa + 1$ до ζ_0 .

Действительно, в силу сферической симметрии, при движении точки A по окружности $\zeta = D$ характеристика будет вращаться вокруг точки O , как жесткая линия, и не монотонность функции $\zeta(\delta)$ привела бы к пересечению характеристик одного и

того же семейства, что не совместимо с автомодельным решением Я. Б. Зельдовича. Численным интегрированием было установлено, что

$$\sqrt{h} \delta_1 < 1/2 \pi - \operatorname{arctg} \zeta_0 / D \quad (\zeta(\delta_1) = \zeta_0)$$

При $\delta > \delta_1$ характеристика до пересечения с осью z совпадает с дугой окружности $\zeta = \zeta_0$. Очевидно, что для каждого значения показателя адиабаты κ существует такое значение угла раствора γ_0 , что при $\gamma > \gamma_0$ на участке характеристики между точкой A и осью η значение ζ будет больше ζ_0 , т. е. характеристика $\zeta = \zeta_0$ не достигается. На фиг. 2, a и b приведены схематические расположения характеристики в плоскости $\zeta\eta$ в зависимости от угла γ . Заметим, что в координатах α и δ уравнение характеристики будет

$$\alpha = \varphi(\delta) = D \sin \sqrt{h} \delta - y \quad (2.5)$$

3. В возмущенной области задача двумерна, потому в дальнейшем искомыми газодинамическими функциями будут $f = c^2$ и две ранее введенные компоненты скорости v_α и v_δ .

В области сферически симметричного решения v_α и v_δ связаны со скоростью u следующими формулами:

$$v_\alpha = \frac{u}{\zeta} + D \sin \sqrt{h} \delta \left(1 - \frac{u}{\zeta}\right), \quad v_\delta = D \left(1 - \frac{u}{\zeta}\right) \cos \sqrt{h} \delta \quad (3.1)$$

Вдоль определенной ранее характеристики значения функций в возмущенной области должны совпадать со значениями сферически симметричного решения. Поэтому вдоль этой линии при малых δ , как это следует из формул (2.3) — (2.5), (3.1), должна быть справедлива асимптотика

$$v_\alpha \approx \kappa \sqrt{h} \left[1 + \left(\frac{208}{81(\kappa+1)} - \frac{1}{6}\right) h \delta^2\right] \delta, \quad v_\delta \approx \kappa \left[1 + \left(\frac{16}{9(\kappa+1)} - \frac{1}{2}\right) h \delta^2\right] \quad (3.2)$$

$$f \approx \kappa^2 \left[1 - \frac{16}{9} \delta^2\right] \quad (f = c^2), \quad \alpha \approx \frac{64}{81} \kappa h^{3/2} \delta^3$$

Решение системы, определяющей главный член в возмущенной области в окрестности точки A (течение Прандтля — Майера)

$$v_{\delta_0} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} v_{\alpha_0}' - v_{\delta_0}\right) = 0, \quad v_{\delta_0} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} v_{\delta_0}' + v_{\alpha_0}\right) + \frac{1}{(\kappa-1) \sqrt{h}} f_0' = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{v_{\delta_0}}{\sqrt{h}} f_0' + (\kappa-1) f_0 \left[v_{\alpha_0} + \frac{1}{\sqrt{h}} v_{\delta_0}'\right] = 0$$

с начальными данными

$$v_{\alpha_0} = 0, \quad v_{\delta_0} = \kappa, \quad f = \kappa^2 \quad \text{при } \delta = 0$$

имеет вид

$$v_{\alpha_0}(\delta) = \kappa \sqrt{h} \sin \delta, \quad v_{\delta_0}(\delta) = \kappa \cos \delta, \quad f_0(\delta) = \kappa^2 \cos^2 \delta \quad (3.4)$$

Очевидно, что асимптотика (3.2) совпадает с асимптотикой функций (3.4) лишь в первом члене. Это означает, что в непосредственной близости к характеристике, когда α порядка δ^3 структура решения несколько иная; для определения асимптотики в этой области возьмем в качестве независимых переменных: δ , $\psi = \alpha \delta^{-3}$, а асимптотическое разложение представим в виде

$$v_\alpha = v_{\alpha_0}(\psi) \delta + v_{\alpha_1}(\psi) \delta^3 + \dots, \quad v_\delta = v_{\delta_0}(\psi) + v_{\delta_1}(\psi) \delta^2 + \dots$$

$$f = f_0(\psi) + f_1(\psi) \delta^2 + \dots$$

Подставив так представленные функции в систему (1.6) и приравняв нулю коэффициенты при степенях δ , получим две системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Начальные значения для них берутся на характеристике, соответствующей линии

$$\psi = \psi_0 = \frac{64}{81} \kappa h^{3/2}$$

из асимптотики (3.2). Таким образом, система и начальные данные для функций с индексом 0 выглядят так:

$$v_{\delta_0} \left[\frac{1}{\sqrt{h}} (v_{\alpha_0} - 3v_{\alpha_0}'\psi) - v_{\delta_0} \right] + \frac{1}{\kappa - 1} f_0' = 0, \quad v_{\delta_0} v_{\delta_0}' + \frac{f_0'}{\kappa - 1} = 0 \quad (3.5)$$

$$v_{\delta_0} f_0' + f_0 v_{\delta_0}' = 0, \quad v_{\alpha_0} = \kappa \sqrt{h}, \quad v_{\delta_0} = \kappa, \quad f = \kappa^2 \quad (\psi = \psi_0)$$

Тогда решением системы (3.5) с соответствующими начальными условиями будет: $v_{\alpha_0} = \kappa \sqrt{h}$, $v_{\delta_0} = \kappa$, $f = \kappa^2$. Система и начальные данные для функций с индексом 1:

$$\kappa \left[\frac{3}{\sqrt{h}} (v_{\alpha_1} - v_{\alpha_1}'\psi) - v_{\delta_1} \right] + \frac{1}{\kappa - 1} f_1' \psi = 0 \quad (3.6)$$

$$2f_1 - 3f_1'\psi + \kappa(\kappa - 1)[2v_{\delta_1} - 3v_{\delta_1}'\psi] = -\kappa^2(\kappa + 1)$$

$$\kappa^2(\kappa - 1) \sqrt{h} v_{\delta_1}'\psi - (\kappa - 1)\kappa^2 v_{\alpha_1}'\psi + f_1'\psi \frac{6\kappa v_{\delta_1} - 3f_1 - \kappa^2 h}{\kappa \sqrt{h}} =$$

$$= \frac{\kappa^2}{h} \psi - \frac{2f_1(f_1 - 2\kappa v_{\delta_1})}{\kappa \sqrt{h}}$$

$$\psi = \psi_0, \quad v_{\alpha_1} = \kappa h^{3/2} \left(\frac{208}{81(\kappa + 1)} - \frac{1}{6} \right), \quad v_{\delta_1} = \kappa h \left(\frac{16}{9(\kappa + 1)} - \frac{1}{2} \right), \quad f_1 = -\frac{16}{9} \kappa^2$$

Заметим, что система (3.6) имеет первый интеграл

$$f_1 + \kappa(\kappa - 1)v_{\delta_1} = -\frac{1}{2}\kappa^2(\kappa + 1) + c\psi^{2/3} \quad (3.7)$$

Из начальных данных следует, что $c = 0$.

Воспользовавшись первым интегралом (3.7) и совершив замену

$$v_{\alpha_1} = V_{\alpha_1} - \psi / \kappa + 1 \quad (3.8)$$

сведем систему (3.6) к системе

$$\frac{dV_{\alpha_1}}{df_1} = \frac{4hf_1(f_1 + \kappa^2) + (3f_1 + 5\kappa^2)[6\kappa(\kappa - 1)V_{\alpha_1} + 2f_1\sqrt{h} + \kappa^2(\kappa + 1)\sqrt{h}]}{12\sqrt{h}\kappa(\kappa - 1)f_1(f_1 + \kappa^2) - (\kappa - 1)\kappa^3[6\kappa(\kappa - 1)V_{\alpha_1} + 2f_1\sqrt{h} + \kappa^2(\kappa + 1)\sqrt{h}]}$$

$$\left(\frac{3\kappa}{\sqrt{h}} \frac{dV_{\alpha_1}}{d\psi} - \frac{1}{\kappa - 1} \frac{df_1}{d\psi} \right) \psi = \frac{3\kappa}{\sqrt{h}} V_{\alpha_1} + \frac{f_1}{\kappa - 1} + \frac{\kappa^2 h}{2}$$

и к первому интегралу (3.7).

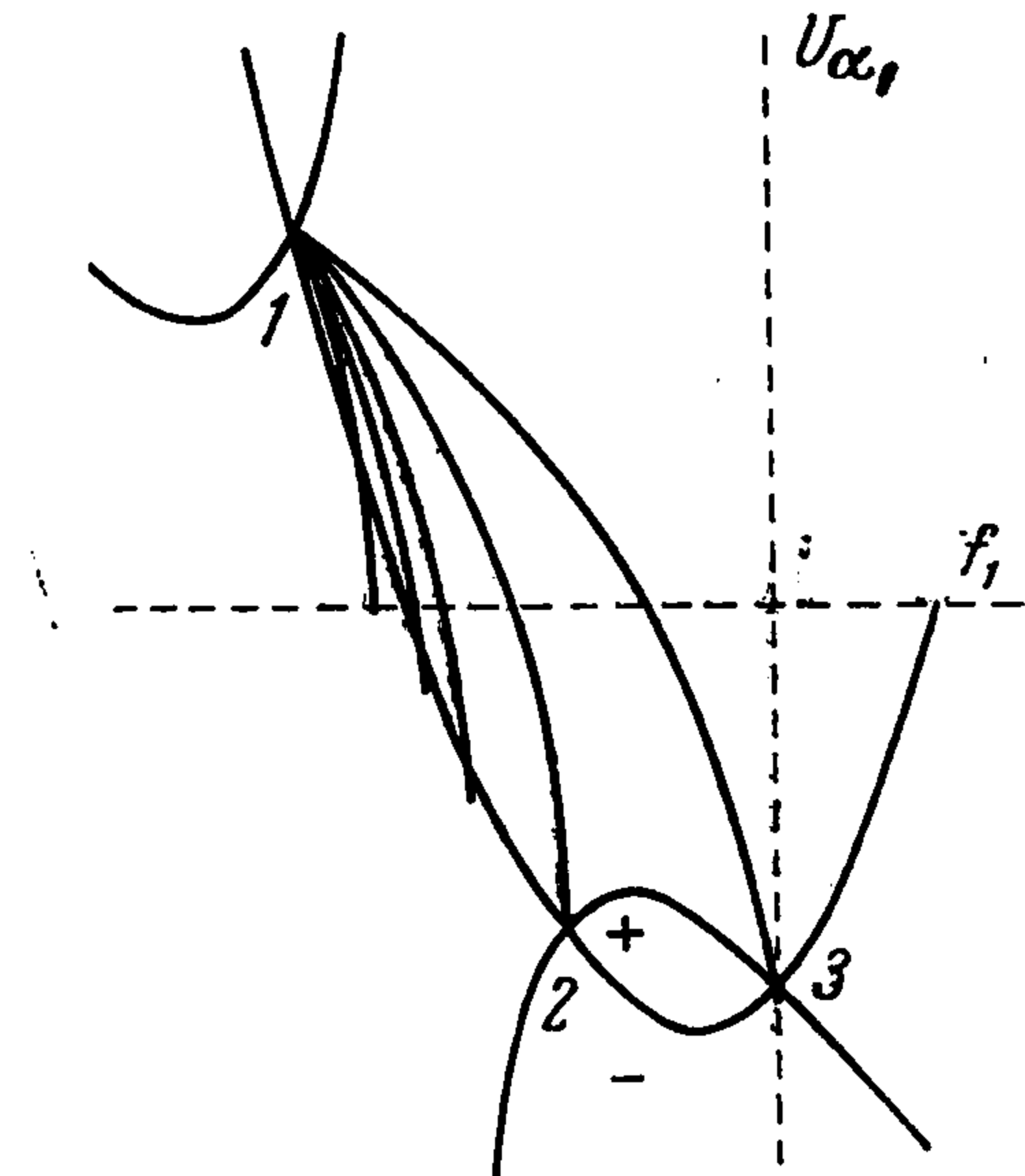
Очевидно, первое уравнение (3.9) может быть изучено независимо от всей системы.

Это уравнение имеет три особые точки:

$$(1) \left(f_1 = -\frac{16}{9} \kappa^2, \quad V_{\alpha_1} = \frac{272}{81} \frac{\kappa \sqrt{h}}{\kappa - 1} - \frac{\kappa h^{3/2}}{6} \right)$$

$$(2) \left(f_1 = -\kappa^2, \quad V_{\alpha_1} = -\frac{\kappa \sqrt{h}}{6} \right)$$

$$(3) \left(f_1 = 0, \quad V_{\alpha_1} = -\frac{\kappa h^{3/2}}{6} \right)$$



Фиг. 3

Первая точка соответствует начальным данным, т. е. значениям функций на характеристике. Она является узлом. Из всех интегральных кривых, выходящих из этой точки, возьмем ту, которая попадает во вторую особую точку (фиг. 3). Значения функций в этой точке соответствуют второму члену асимптотики решения Прандтля — Майера. Вдоль этой кривой значение ψ монотонно падает от ψ_0 до 0. Действительно, она

заключена в область, ограниченную отрезками изоклины ∞ , соединяющей точки 1 и 2, изоклины 0, соединяющей точки 2 и 3 и интегральной кривой

$$V_{\alpha_1} = \frac{h^{3/2} f_1^2}{2\kappa^3 (\kappa + 1)} - \sqrt{h} \frac{f}{\kappa (\kappa - 1)} - \frac{\kappa h^{3/2}}{6}$$

соединяющей точки 1 и 3 и, как легко видеть из фиг. 3, ни одну из них пересечь не может. (Кстати заметим, интегральная кривая, соединяющая точки 1 и 3, соответствует сферически симметричному решению.)

Точка 2 является седлом. Угловым коэффициентом искомой интегральной кривой в этой точке

$$\frac{dV_{\alpha_1}}{df_1} = \frac{-13 \sqrt{h}}{3\kappa (\kappa - 1)} < 0$$

и, следовательно, будет меньше нуля вдоль всего отрезка кривой. Так как интегральная кривая нигде не пересекает изоклины бесконечности, вне точек 1 и 2, то

$$(\kappa - 1) \kappa^2 \left(\frac{3\kappa}{\sqrt{h}} V_{\alpha_1} + \frac{f_1}{\kappa - 1} + \frac{\kappa^2 h}{2} \right) > 6f_1 (f_1 + \kappa^2) > 0$$

Поэтому на всем отрезке кривой $1 \approx 2$

$$\frac{d\psi}{df_1} = \left(\frac{3\kappa}{\sqrt{h}} \frac{dV_{\alpha_1}}{df_1} - \frac{1}{\kappa - 1} \right) \psi \left(\frac{3\kappa}{\sqrt{h}} V_{\alpha_1} + \frac{f_1}{\kappa - 1} + \frac{\kappa^2 h}{2} \right)^{-1} < 0$$

Точке 2 соответствует значение $\psi = 0$ и в ее окрестности справедлива асимптотика

$$\begin{aligned} v_{\alpha} &= \kappa \sqrt{h} \delta + \left(-\frac{1}{6} \kappa \sqrt{h} + C\psi^{3/7} - \frac{\psi}{\kappa + 1} \right) \delta^3 + \dots \\ v_{\delta} &= \kappa + \left(-\frac{\kappa}{2} + \frac{3}{13 \sqrt{h}} C\psi^{3/7} \right) \delta^2 + \dots \\ f &= \kappa^2 - \left(\kappa^2 + \frac{3\kappa (\kappa - 1)}{13 \sqrt{h}} C\psi^{3/7} \right) \delta^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь C — постоянная интегрирования. Что касается особой точки 1, соответствующей направлению характеристики $\psi = \psi_0$, то из фиг. 3 легко видеть, что интегральная кривая (1.3) выходит из этой точки по отдельному усю узла. Следовательно, рассматриваемая интегральная кривая принадлежит пучку кривых, имеющих общую касательную, угловым коэффициентом которой

$$\frac{dV_{\alpha_1}}{df_1} = -\frac{7}{3} \frac{\sqrt{h}}{\kappa (\kappa - 1)}$$

и при ψ , близком к ψ_0 , справедлива асимптотика

$$\begin{aligned} v_{\alpha} &= \kappa \sqrt{h} \delta + \left[\left(\frac{208}{81 (\kappa + 1)} - \frac{1}{6} \right) \kappa h^{3/2} + \frac{41}{8 (\kappa + 1)} (\psi - \psi_0) \right] \delta^3 + \dots \\ v_{\delta} &= \kappa + \left[\kappa h \left(\frac{16}{9 (\kappa + 1)} - \frac{1}{2} \right) + \frac{21}{8 (\kappa + 1) \sqrt{h}} (\psi - \psi_0) \right] \delta^2 \\ f &= \kappa^2 - \left[\frac{16}{9} \kappa^2 + \frac{21}{8} \frac{\kappa}{h^{3/2}} (\psi - \psi_0) \right] \delta^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

4. Характеристика AE и значения газодинамических функций на ней были определены в п.2, исходя из сферически симметричного решения. Для того чтобы убедиться, что отрезок, принадлежащий характеристике AE , будет границей возмущенной области, необходимо показать, что на этом отрезке газодинамические функции не терпят разрыва. Пусть $\alpha = \varphi(\delta)$ — уравнение характеристики AE . В возмущенной области в окрестности характеристики будем искать асимптотику решения

$$\Phi = \Phi_0(\delta) + \Phi_1(\delta)(g - 1) + \Phi_2(\delta)(g - 1)^2 \quad \text{при } 0 \leq \delta \leq \delta_3, \quad g = \alpha / \varphi(\delta) \quad (4.1)$$

$g = 1$ — уравнение характеристики, $\Phi = (v_{\alpha}, v_{\delta}, f)$, $\Phi_0(\delta)$ — значения функций на характеристике.

Для получения уравнений, определяющих функции $v_{\alpha_1}(\delta)$, $v_{\delta_1}(\delta)$, $f_1(\delta)$, понадобится разложение (4.1) подставить в газодинамическую систему (1.6), расписать левые части этих уравнений по степеням $g - 1$ и приравнять нулю коэффициент при нулевой и первой степенях $g - 1$. Приравняв нулю коэффициент при нулевой степени, получим лишь два линейно независимых уравнения. Приравняв нулю коэффициенты при $g - 1$ и оставив в левой части лишь члены, содержащие функции с индексом 2, получим три линейных уравнения для функций v_{α_2} , v_{δ_2} , f_2 с определителем системы равным нулю. Для непротиворечивости этой системы необходимо приравнять нулю линейную комбинацию правых частей, зависящих только от функций с индексом 1, с соответствующими коэффициентами, что дает недостающее третье уравнение. В результате для функций v_{α_1} , v_{δ_1} , f_1 получена следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{d\delta} = & \frac{\zeta(u-\zeta)\sqrt{h}}{2a(cy-ax)} \left\{ -\frac{h(u-\zeta)\zeta}{c(cy-ax)} f_1^2 + \left[\frac{u\varphi}{\zeta} \left[\frac{(\kappa+2)(ax+2cy)}{cy-ax} + \right. \right. \right. \\ & + \frac{c(a^2+4c^2)(ay+cx)}{a(u-\zeta)^2(cy-ax)} - (\kappa-1) \frac{(u-\zeta)^2}{a^2} - \frac{c^2(2c^2-a^2)}{a^2(u-\zeta)^2} - (\kappa-1) \left(2 + \frac{x(a^2-2c^2)}{a(cy-ax)} \right) \left. \right. \left. \right] + \\ & + \varphi \left[2 + \frac{c}{\zeta(u-\zeta)} \left(\frac{(\kappa+1)\cos\gamma - \varphi\sin(\gamma + \sqrt{h}\delta)}{(\kappa+1)\sin\gamma + \varphi\cos(\gamma + \sqrt{h}\delta)} a + c \right) \right] \right\} f_1 - \\ & - (\kappa-1) \left[\frac{ack\zeta}{u-\zeta} \left(\frac{a\zeta^2k}{cy-ax} + \varphi \right) + \frac{c^2(a^2+4c^2)u\varphi ky}{a(u-\zeta)(cy-ax)} + ck \left[\frac{2(a^2-c^2)}{a} \varphi + ay + cx + \right. \right. \\ & + \frac{2c\varphi y(\zeta-u)}{a^3(ax+2cy)} (a^2\zeta - 2uc^2 - (\kappa-1)u(a^2+c^2)) + \\ & + \left. \frac{ac\zeta^2 - x[(\varphi+y)(\zeta-u)^2 + c(cy-ax) - c(ay+cx)\varphi]}{ax+2cy} \right] + \\ & + c^2\varphi \frac{[(\kappa+1)\cos\gamma - \varphi\sin(\gamma + \sqrt{h}\delta)]k + (\kappa+1)u\zeta^{-1}\sin\gamma}{(\kappa+1)\sin\gamma + \varphi\cos(\gamma + \sqrt{h}\delta)} \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} v_{\alpha_1} = & \frac{ax-cy}{(\kappa-1)c\zeta(\zeta-u)} f_1 + kx, \quad v_{\delta_1} = -\frac{ay+cx}{(\kappa-1)c\zeta(\zeta-u)} f_1 + ky \\ & k = \frac{u\varphi}{a\zeta^3} (ax+2cy) \end{aligned}$$

Обозначения здесь те же, что и в п. 2. Функции, стоящие в правых частях, получены в результате интегрирования системы (2.1), (2.2). Как следует из асимптотики (3.11), $f_1(0) = 0$ и при малых δ :

$$f_1 \approx -28/27 \kappa^2 \delta^2$$

Первое уравнение системы (4.2) представляет собой уравнение Риккати; частный интеграл этого уравнения известен, он соответствует сферически симметричному решению

$$F_1 = -\frac{2(\kappa-1)uc^2\varphi(\zeta-u)}{a^2\zeta^2} \quad (4.3)$$

Следовательно, его можно свести к линейному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\delta} = & -\frac{\zeta(u-\zeta)\sqrt{h}}{2a(cy-ax)} \left\{ \left\{ \frac{u\varphi}{\zeta} \left[\frac{6c^2}{a^2+c^2} - 5\kappa + 4 - 5(\kappa+1)\frac{c^2}{a^2} - \right. \right. \right. \\ & - 2x \frac{(\kappa+1)c^2 + (\kappa-2)a^2}{a(cy-ax)} \left. \right. \left. \right\} + \varphi \left[2 + \frac{c^2}{\zeta(u-\zeta)} + \frac{ac}{\zeta(u-\zeta)} \times \right. \\ & \left. \left. \times \frac{(\kappa+1)\cos\gamma - \varphi\sin(\gamma + \sqrt{h}\delta)}{(\kappa+1)\sin\gamma + \varphi\cos(\gamma + \sqrt{h}\delta)} \right] \right\} z - \frac{h(u-\zeta)\zeta}{c(cy-ax)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$z = \left(f_1 + \frac{2(\kappa-1)c^2u(\zeta-u)\varphi}{a^2\zeta^2} \right)^{-1}$$

Если $\gamma < \gamma_0$, то на характеристике AE существует точка D ($\delta = \delta_2$):

$$u = 0, \quad a^2 = (\zeta - u)^2 - c^2 = 0$$

В окрестности этой точки D :

$$a^2 \sim u \ln u, \quad a \approx \sqrt{h} \varphi (\zeta^2 / cy) (\delta - \delta_2)$$

Поэтому, оставляя главные члены в уравнения (4.4), получим

$$\frac{dz}{d\delta} + \frac{1}{2} \frac{z}{\delta - \delta_2} + \frac{h}{2y\varphi(\delta - \delta_2)} = 0 \quad (4.5)$$

Общий интеграл этого уравнения

$$z = -h / y\varphi + c (\delta - \delta_2)^{1/2}$$

Следовательно,

$$z = -\frac{h}{y\varphi}, \quad f_1 = -\frac{y\varphi}{h} \quad \text{при } \delta = \delta_2$$

Таким образом, любая интегральная кривая первого уравнения системы (4.2), которая может быть доведена до значения $\delta = \delta_2$, кроме частного интеграла (4.3), принимает при $\delta = \delta_2$ значение $f_1 = -y\varphi / h < 0$. Учитывая, что в окрестности точки $\delta = 0$:

$$f_1 < F_1 \quad (f_1 \approx -28/27\kappa^2\delta^2, F_1 \approx -8/9\kappa^2\delta^2)$$

приходим к выводу, что на интервале $0 < \delta < \delta_2$ существует значение δ_3 , где f_1 обращается в бесконечность.

Из системы (4.2) следует, что при $\delta \rightarrow \delta_3$ функции с индексом 1 из разложения (4.1) растут, как $(\delta - \delta_3)^{-1}$, точнее

$$\Phi_1 \approx \frac{\Phi_{10}}{\delta - \delta_3} + \Phi_{11}$$

причем

$$f_{10} = \left[\frac{2ac}{h^{3/2}} \left(\frac{cy - ax}{\zeta(\zeta - u)} \right)^2 \right]_{\delta=\delta_3}, \quad v_{\alpha_{10}} = \left[\frac{2a}{(\kappa + 1)\sqrt{h}} \left(\frac{ax - cy}{\zeta(\zeta - u)} \right)^3 \right]_{\delta=\delta_3} \quad (4.6)$$

$$v_{\delta_{10}} = \left[\frac{2a(ax - cy)^2(ay + cx)}{(\kappa + 1)\sqrt{h}\zeta^3(u - \zeta)^3} \right]_{\delta=\delta_3}$$

(Формулы для значений Φ_{11} ввиду их громоздкости выписывать не будем.) Аналогично могут быть получены уравнения для функций с индексом 2. Асимптотика этих функций при $\delta \rightarrow \delta_3$ выглядит следующим образом:

$$\Phi_2 \approx \frac{\Phi_{20}}{(\delta - \delta_3)^3} + \frac{\Phi_{21}}{(\delta - \delta_3)^2} \quad (4.7)$$

Заметим, что значения Φ_{20} могут быть получены лишь в результате интегрирования. Таким образом, при $\delta < \delta_3$ и достаточно малом значении $(\alpha - \varphi) / (\delta - \delta_3)^2$ справедлива асимптотика

$$\Phi \approx \Phi_0(\delta) + \left[\frac{\Phi_{10}}{\delta - \delta_3} + \Phi_{11} \right] \frac{\alpha - \varphi}{\varphi} + \left[\frac{\Phi_{20}}{(\delta - \delta_3)^3} + \frac{\Phi_{21}}{(\delta - \delta_3)^2} \right] \left(\frac{\alpha - \varphi}{\varphi} \right)^2 + \dots \quad (4.8)$$

Приведенное выше исследование справедливо, если точка $[\delta_3, \varphi(\delta_3)]$ не лежит на оси симметрии. На ось симметрии она может попасть лишь при $\gamma > \gamma_0$. Точнее для каждого κ существует значение $\gamma_\kappa > \gamma_0$, такое, что при $\gamma > \gamma_\kappa$ точка $[\delta_3, \varphi(\delta_3)]$ попадает на ось симметрии и асимптотика в этой точке будет

$$\Phi_1 \approx \frac{\psi_{10}}{\sqrt{\delta - \delta_3}} \quad (4.9)$$

5. Точка $[\delta_3, \varphi(\delta_3)]$ — особая точка нашего решения, поэтому предстоит исследовать поведение газодинамических функций в полной окрестности этой точки. Прежде всего отметим, что в области, где применима асимптотика (4.8), характеристики принадлежащие тому же семейству, что и $\alpha = \varphi(\delta)$ сходятся в точке $[\delta_3, \varphi(\delta_3)]$. Уравнение этого семейства характеристик в переменных α, δ выглядит так:

$$\frac{d\alpha}{d\delta} = -\sqrt{h}\alpha \frac{(v_\alpha - \alpha)^2 - f}{f[v_\delta^2 + (v_\alpha - \alpha)^2 - f]^{1/2} - v_\delta(v_\alpha - \alpha)} \quad (5.1)$$

В указанной области можем вместо функций, входящих в это уравнение, подставить их асимптотическое представление, данное формулами (4.8). В результате получим

$$\frac{d(\alpha - \varphi)}{d\delta} \approx \frac{\alpha - \varphi}{\delta - \delta_3} \quad (5.2)$$

т. е. $\alpha - \varphi \approx C(\delta - \delta_3)$: характеристики проходят через точку $(\delta_3, \varphi(\delta_3))$. Следовательно, в этой точке образуется ударная волна, определение которой будет возможно лишь при более полном исследовании всей окрестности этой точки.

Формулы (4.8) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \Phi = & \Phi_0(\delta_3) + \left[\Phi_0'(\delta_3) + \frac{\Phi_{10}}{\varphi(\delta_3)} \frac{\alpha - \varphi(\delta)}{(\delta - \delta_3)^2} + \frac{\Phi_{20}}{\varphi^2(\delta_3)} \left(\frac{\alpha - \varphi(\delta)}{(\delta - \delta_3)^2} \right)^2 \right] (\delta - \delta_3) + \\ & + \left[\Phi_0''(\delta_3) + \left(\frac{\Phi_{11}}{\varphi(\delta_3)} - \frac{\Phi_{10}\varphi'(\delta_3)}{\varphi^2(\delta_3)} \right) \frac{\alpha - \varphi(\delta)}{(\delta - \delta_3)^2} + \left(\frac{\Phi_{21}}{\varphi^2(\delta_3)} - \frac{2\Phi_{20}\varphi'(\delta_3)}{\varphi^3(\delta_3)} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\alpha - \varphi(\delta)}{(\delta - \delta_3)^2} \right)^2 \right] (\delta - \delta_3)^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

Поэтому представляется правильным искать решения в окрестности этой точки в виде

$$F = F_0(\chi) + (\delta - \delta_3) F_1(\chi) + (\delta - \delta_3)^2 F_2(\chi) + \dots \quad \left(\chi = \frac{\alpha - \varphi}{(\delta - \delta_3)^2}, \quad F = (v_\alpha, v_\delta, f) \right) \quad (5.4)$$

Для определения функций с индексом 0 получим три однородных дифференциальных уравнения¹

$$\begin{aligned} \left(v_{\alpha_0} - \varphi - \frac{\varphi'}{\sqrt{h}\varphi} v_{\delta_0} \right) v_{\alpha_0}' + \frac{1}{\kappa - 1} f_0' &= 0 \\ \left(v_{\alpha_0} - \varphi - \frac{\varphi'}{\sqrt{h}\varphi} v_{\delta_0} \right) v_{\delta_0}' - \frac{1}{\kappa - 1} \frac{\varphi'}{\sqrt{h}\varphi} f_0' &= 0 \\ \left(v_{\alpha_0} - \varphi - \frac{\varphi'}{\sqrt{h}\varphi} v_{\delta_0} \right) f_0' + (\kappa - 1) f_0 \left(v_{\alpha_0}' - \frac{\varphi'}{\sqrt{h}\varphi} v_{\delta_0}' \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

с начальными данными

$$v_{\alpha_0} = \varphi + \left(1 - \frac{u}{\xi} \right) y, \quad v_{\delta_0} = \left(1 - \frac{u}{\xi} \right) x, \quad f_0 = c^2 \quad \text{при } \chi = 0$$

Решением этой системы будут константы, соответствующие начальным данным. Заметим, что определитель системы при этом обратится в нуль. Для функций с индексом 1 получаем однородную систему с тем же самым равным нулю определителем. Начальные данные для этой системы определяются асимптотикой (5.3). Очевидно, этой системе удовлетворяют константы, совпадающие с начальными данными. Система имеет лишь два линейно независимых уравнения. Недостающее уравнение можно получить, заметив, что для функций с индексом $i + 1$ ($i \geq 1$) получаются уже неоднородные уравнения, с определителем системы, равным нулю. Следовательно, существует линейное соотношение между правыми частями уравнений. Система, определяющая функции с индексом i , дополненная этим линейным соотношением, имеет решение, склеивающееся с асимптотикой (5.3).

Так для функций с индексом 1 получается система

$$\begin{aligned} \left(v_{\alpha_0} - \varphi - \frac{\varphi'}{\sqrt{h}\varphi} v_{\delta_0} \right) v_{\alpha_1}' + \frac{1}{\kappa - 1} f_1' &= 0, \quad \left(v_{\alpha_0} - \varphi - \frac{\varphi'}{\sqrt{h}\varphi} v_{\delta_0} \right) v_{\delta_1}' - \\ - \frac{\varphi'}{\sqrt{h}\varphi(\kappa - 1)} f_1' &= 0, \quad f_1' = \frac{1}{2} \left(f_1 - \frac{df}{d\delta} \right) \left[\chi - \frac{\varphi}{2f_{10}} \left(f_1 - \frac{df}{d\delta} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (5.6)$$

¹ Все встречающиеся здесь величины, не снабженные индексом, будут значениями соответствующих функций сферического автомодельного решения при $\delta = \delta_3, \alpha = \varphi(\delta_3)$.

Решение, имеющее асимптотику (5.3) при $\chi \rightarrow 0$:

$$f_1 = \frac{f_{10}^2}{2f_{20}} \left[1 - \left(1 - \frac{4f_{20}}{f_{10} \varphi} \chi \right)^{1/2} \right] + \frac{df}{d\delta}$$

$$\left[v_{\alpha_0} - \varphi - \frac{\varphi'}{\sqrt{h} \varphi} v_{\delta_0} \right] v_{\alpha_1} = -\frac{1}{\kappa - 1} f_1 + \left(v_{\alpha_0} - \varphi - \frac{\varphi'}{\sqrt{h} \varphi} v_{\delta_0} \right) \frac{dv_{\alpha}}{d\delta} +$$

$$+ \frac{1}{\kappa - 1} \frac{df}{d\delta}, \left[v_{\alpha_0} - \varphi - \frac{\varphi'}{\sqrt{h} \varphi} v_{\delta_0} \right] v_{\delta_1} = \frac{\varphi'}{(\kappa - 1) \sqrt{h} \varphi} f_1 +$$

$$+ \left(v_{\alpha_0} - \varphi - \frac{\varphi'}{\sqrt{h} \varphi} v_{\delta_0} \right) \frac{dv_{\delta}}{d\delta} - \frac{\varphi'}{(\kappa - 1) \sqrt{h} \varphi} \frac{df}{d\delta} \quad (5.7)$$

Точно так же могут быть получены функции с индексом 2. Зная $F_0(\chi)$, $F_1(\chi)$, $F_2(\chi)$, можно определить асимптотику уравнения волны и значений функций на волне вблизи точки $(\delta_3, \varphi(\delta_3))$. Пусть $F^+(\chi, \delta)$ — значения функций на волне, а $F^-(\chi, \delta)$ — перед волной, $F^-(\chi, \delta)$ соответствует сферически симметричному решению, которое в окрестности точки $\delta_3, \varphi(\delta_3)$ может быть записано в виде (5.4). Для примера приведем запись функции

$$f^- = f_0^- + \frac{df_0^-}{d\delta} (\delta - \delta_3) + \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 f_0^-}{d\delta^2} + \frac{F_1(\delta_3)}{\varphi} \chi \right] (\delta - \delta_3)^2 + \dots \quad (5.8)$$

Здесь значения функции и производных берутся вдоль характеристики $\alpha = \varphi(\delta)$ в точке $\delta = \delta_3$, а $F_1(\delta_3)$ определено формулой (4.3). Аналогично могут быть записаны функции v_{α}^- , v_{δ}^- . Уравнения волны будем искать в виде

$$\chi = \chi_b + c_b (\delta - \delta_3) \quad (5.9)$$

Условия на ударной волне

$$\rho^+ (D - u^+) = \rho^- (D - u^-), \quad p^+ + \rho^+ (D - u^+)^2 = p^- + \rho^- (D - u^-)^2, \quad w^+ = w^- \quad (5.10)$$

Если обозначить через β угол между касательной к волне и горизонтальным направлением, то нормальная к волне скорость u и касательная скорость w определяются следующими формулами:

$$u = -v_{\alpha} \sin[(\gamma + \sqrt{h} \delta) - \beta] - v_{\delta} \cos[(\gamma + \sqrt{h} \delta) - \beta] + (\kappa + 1) \cos(\gamma - \beta)$$

$$w = v_{\alpha} \cos[(\gamma + \sqrt{h} \delta) - \beta] - v_{\delta} \sin[(\gamma + \sqrt{h} \delta) - \beta] - (\kappa + 1) \sin(\gamma - \beta) \quad (5.11)$$

Пусть $\alpha = \alpha(\delta)$ — уравнение волны тогда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\gamma + \sqrt{h} \delta) d\alpha/d\delta + \cos(\gamma + \sqrt{h} \delta) \alpha \sqrt{h}}{\cos(\gamma + \sqrt{h} \delta) d\alpha/d\delta - \sin(\gamma + \sqrt{h} \delta) \alpha \sqrt{h}} \quad (5.12)$$

и, следовательно,

$$\alpha \sqrt{h} \operatorname{ctg}(\gamma + \sqrt{h} \delta - \beta) = -d\alpha/d\delta \quad (5.13)$$

Воспользовавшись равенствами, полученными из уравнения состояния $p = \kappa \rho^x$:

$$\rho = \left(\frac{f}{\kappa^2} \right)^{1/\kappa-1}, \quad p = \kappa \left(\frac{f}{\kappa^2} \right)^{\kappa/\kappa-1}$$

можно переписать второе и третье условия на волне в виде

$$\frac{d\alpha}{d\delta} = \frac{v_{\delta}^+ - v_{\delta}^-}{v_{\alpha}^+ - v_{\alpha}^-} \alpha \sqrt{h}, \quad [v_{\delta}^+ - v_{\delta}^-]^2 + [v_{\alpha}^+ - v_{\alpha}^-]^2 = \frac{f^+}{\kappa} \left[\left(\frac{f^+}{f^-} \right)^{\kappa/(\kappa-1)} - 1 \right] \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{f^+}{f^-} \right)^{-1/(\kappa-1)} \right] \quad (5.14)$$

Очевидно, что $\delta = \delta_3 + (\delta - \delta_3)$ и согласно (5.9) вблизи точки $(\delta_3, \varphi(\delta_3))$ уравнение волны имеет следующую асимптотику:

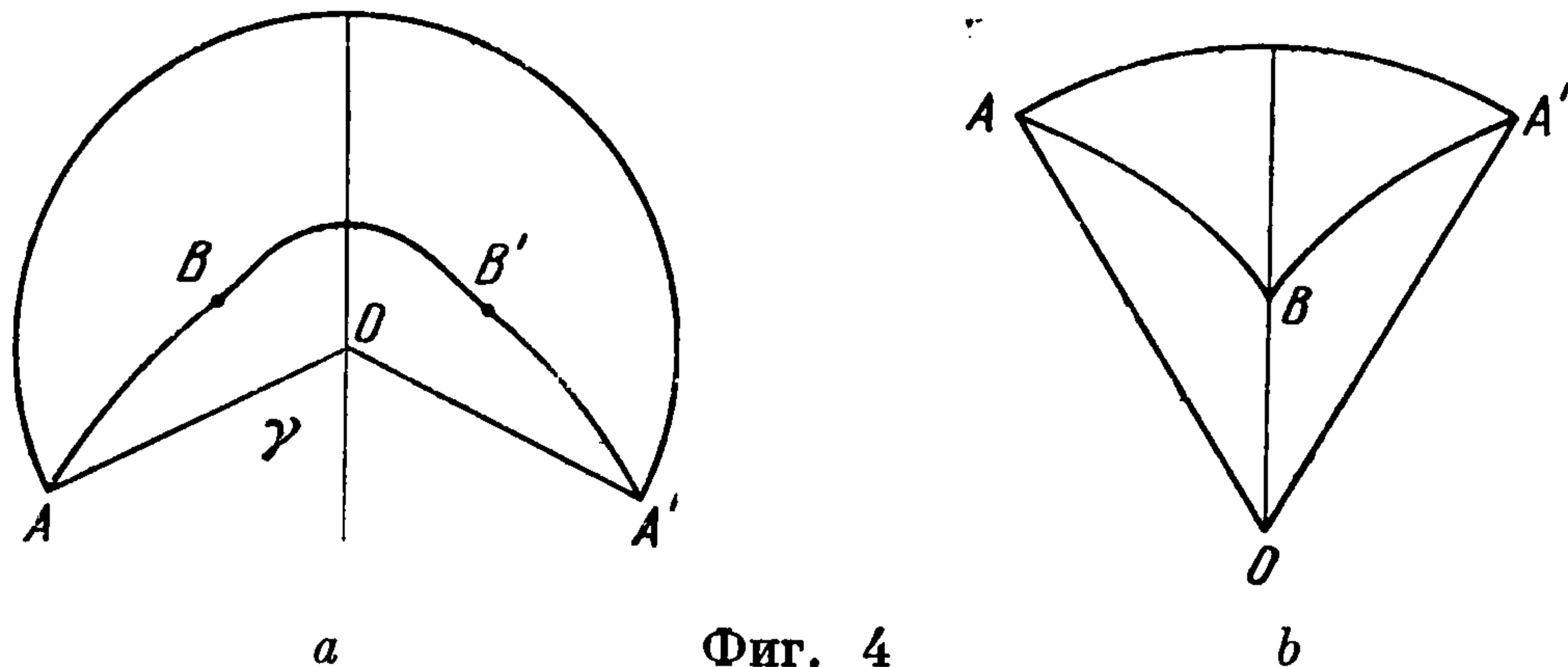
$$\alpha = \varphi(\delta_3) + \varphi'(\delta_3)(\delta - \delta_3) + \left[\chi_b + \frac{1}{2} \varphi''(\delta_3) \right] (\delta - \delta_3)^2 + \dots$$

$$\frac{d\alpha}{d\delta} = \varphi'(\delta_3) + [2\chi_b + \varphi''(\delta_3)] (\delta - \delta_3) \quad (5.15)$$

Формулы (5.4) вдоль волны переписываются следующим образом:

$$F = F_0(\chi_b) + (\delta - \delta_3) F_1(\chi_b) + (\delta - \delta_3)^2 [c_b F_1'(\chi_b) + F_2(\chi_b)] + \dots \quad (5.16)$$

Подставив в уравнения (5.14) асимптотики (5.8), (5.15), (5.16) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $\delta - \delta_3$, получим два уравнения для величин χ_b и c_b . Заметим, что формулы (5.14) перестают быть тождествами, лишь после подстановки трех членов формул (5.8) и (5.16) и, соответственно, двух членов формулы (5.15). Таким образом, определена волна, имеющая в окрестности точки $\delta_3, \varphi(\delta_3)$ бесконечно малую



Фиг. 4

амплитуду. Очевидно, полное определение волны от точки $\delta_3, \varphi(\delta_3)$ до встречи с осью симметрии приведенными здесь асимптотическими методами, невозможно. Для этого потребуются численное интегрирование уравнений в частных производных. Естественно ожидать, что фронт волны будет и в дальнейшем не слишком удаляться от характеристики $\alpha = \varphi(\delta)$. Заметим, что на оси симметрии фронт ударной волны имеет горизонтальную касательную. Действительно, касательная к фронту скорость w представляется через скорости v_r и v_z (см. п. 1) по формуле

$$w = v_r \cos \beta + v_z \sin \beta, \quad u = v_r \sin \beta - v_z \cos \beta \quad (5.17)$$

Так как на оси симметрии $v_r = 0$, то условия на фронте в этой точке дают

$$(v_z^+ - v_z^-) \sin \beta = 0, \quad (p^+ - p^-) \left(\frac{1}{\rho^-} - \frac{1}{\rho^+} \right) = (v_z^+ - v_z^-)^2 \cos^2 \beta \quad (5.18)$$

При наличии волны ненулевой амплитуды эти условия могут быть выполнены, лишь при условии $\sin \beta = 0$.

Таким образом, область, где решение нашей задачи совпадает со сферически симметричным решением, при $\gamma < \gamma_x$ ограничена отрезками характеристик $\alpha = \varphi(\delta)$, идущих из симметричных относительно оси η точек A и A' до симметричных точек B и B' ($\delta_3, \varphi(\delta_3)$), фронтом ударной волны BB' и фронтом детонационной волны AA' (фиг. 4, а).

Замечание. Линия $\chi = f_{10}\Phi / 4f_{20}$ в полученном приближении является характеристикой, принадлежащей тому же семейству, что и $\alpha = \varphi(\delta)$. Возмущенная окрестность точки $[\delta_3, \varphi(\delta_3)]$ описывается значениями χ , меняющимися в направлении: $0 \rightarrow -\infty \rightarrow \chi_b$. Если характеристика $\chi = f_{10}\Phi / 4f_{20}$ принадлежит возмущенной окрестности, то за этой характеристикой при $(4f_{20} / f_{10}\Phi)\chi > 1$ правые части асимптотических формул (5.7) становятся комплексными. По-видимому, это связано с существованием за волной области дозвукового течения и определить решение в этом случае можно, лишь интегрируя уравнения в частных производных.

При $\gamma > \gamma_x$ характеристики $\alpha = \varphi(\delta)$, выходящие из точек A и A' , встречаются на оси η в точке B под углом $> \pi$ (фиг. 4, в). Как следует из асимптотики (4.9), характеристики одного и того же семейства не пересекаются, следовательно, ударной волны в точке B не образуется. Исходя из той же асимптотики (4.9), решение в окрестности точки B будем искать в виде

$$F = F_0 + F_1(l) |\delta - \delta_3|^{1/2}, \quad l = \frac{\alpha - \varphi}{\delta - \delta_3} \quad (5.19)$$

Здесь δ_3 — значение угла δ , соответствующее точке B . Оси η соответствует значение

$$l = l_0 = \frac{-\sqrt{h} \varphi(\delta_3) c(x^2 + y^2)}{x(ax - cy)} \quad (5.20)$$

Радиальная скорость v_r на оси η равна 0, т. е.

$$v_\alpha \cos(\gamma + \sqrt{h} \delta) - v_\delta \sin(\gamma + \sqrt{h} \delta) + (\kappa + 1) \sin \gamma = 0 \quad (5.21)$$

Это условие автоматически удовлетворяется при подстановке значений функций на характеристике $\alpha = \varphi(\delta)$ в точке $\delta = \delta_3$ (функции с индексом 0). Для функций с индексом 1 возникает требование

$$xv_{\alpha_1}(l_0) - yv_{\delta_1}(l_0) = 0 \quad (5.22)$$

Система уравнений для функций с индексом 1:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{u}{\zeta}\right) \left[y - x \frac{\varphi' + l}{\sqrt{h} \varphi} \right] v_{\alpha_1}' + \frac{1}{\kappa - 1} f_1' &= - \frac{(1 - u/\zeta)x}{2\sqrt{h} \varphi} v_{\alpha_1} \\ \left(1 - \frac{u}{\zeta}\right) \left[y - x \frac{\varphi' + l}{\sqrt{h} \varphi} \right] v_{\delta_1}' - \frac{1}{\kappa - 1} \frac{\varphi' + l}{\sqrt{h} \varphi} f_1' &= \\ &= - \frac{1}{2\sqrt{h} \varphi} \left[\left(1 - \frac{u}{\zeta}\right) xv_{\delta_1} + \frac{f_1}{\kappa - 1} \right] \\ \left(1 - \frac{u}{\zeta}\right) \left[y - x \frac{\varphi' + l}{\sqrt{h} \varphi} \right] f_1' - (\kappa - 1) c^2 \left[\frac{\varphi' + l}{\sqrt{h} \varphi} v_{\delta_1}' - v_{\alpha_1}' \right] &= \\ = - \frac{1}{2\sqrt{h} \varphi} \left[\left(1 - \frac{u}{\zeta}\right) xf_1 + (\kappa - 1) c^2 v_{\delta_1} \right] - (\kappa - 1) c^2 \frac{v_{\alpha_1} - (y/x) v_{\delta_1}}{\zeta + \varphi' - \sqrt{h} \varphi y/x} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Характеристике $\alpha = \varphi(\delta)$ соответствует линия $l = 0$. Точка ($l = 0, F = F_0$) — особая точка системы (5.23). Выход из нее может быть осуществлен согласно асимптотике (4.9), которая может быть переписана в следующем виде:

$$l \rightarrow 0, \quad F \approx F_0 + (\psi_{10} / \varphi(\delta_3)) l (\delta - \delta_3)^{1/2} \quad (5.24)$$

Система (5.23) имеет первый интеграл. Учитывая асимптотику (5.24), он выписывается так:

$$(1 - u/\zeta) [v_{\alpha_1} y + v_{\delta_1} x] + f_1 / (\kappa - 1) = 0 \quad (5.25)$$

Асимптотика решения при $l \rightarrow l_0$:

$$\begin{aligned} v_{\alpha_1} y + v_{\delta_1} x \approx A, \quad v_{\alpha_1} x - v_{\delta_1} y \approx B |l - l_0|^{-1} + \frac{a^2 x^2 A}{4\pi \sqrt{h} \varphi c^2 (x^2 + y^2)} (l - l_0) \\ (A, B = \text{const}) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Особой точкой системы (5.23) является также точка $l = l_1$:

$$l_1 = - \frac{2\sqrt{h} ac \varphi (x^2 + y^2)}{(ax - cy)(ax + cy)}$$

Это значение l соответствует характеристике (она и $\alpha = \varphi(\delta)$ принадлежат разным семействам). Значения функций в этой точке связаны соотношением

$$v_{\alpha_{10}} (ay + 3cx) = v_{\delta_{10}} (3cy - ax) \quad (5.27)$$

Асимптотика при $l \rightarrow l_1$

$$v_{\alpha_1} \approx v_{\alpha_{10}} + A_1(l - l_1), \quad v_{\delta_1} \approx v_{\delta_{10}} + B_1(l - l_1) \quad (5.28)$$

где A_1 и B_1 связаны лишь одним линейным соотношением:

$$\frac{ay - cx}{ax + cy} A_1 + B_1 = \frac{v_{\alpha_{10}}}{2 \sqrt{h} \varphi} \quad (5.29)$$

Согласно требованию (5.22) необходимо, чтобы значение B в асимптотике (5.26) равнялось нулю. Учитывая, что l меняется в направлении $0 \rightarrow \infty$, $-\infty \rightarrow l_1 \rightarrow l_{0\infty}$ этого можно добиться, варьируя значения A_1 и B_1 в пределах уравнения (5.29), т. е. допускается слабый разрыв на характеристике $l = l_1$ при ее прохождении.

Вопросы, затронутые в этой работе, обсуждались с С. К. Годуновым. Многие из приведенных формул проверялись И. Л. Киреевой. Численное интегрирование уравнений было выполнено на ЭВМ И. Л. Киреевой и Н. И. Куранчевой. Пользуюсь случаем выразить всем названным лицам свою глубокую благодарность.

Поступила 16 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. З е л ь д о в и ч Я. Б. О распределении давления и скорости в продуктах детонационного взрыва, в частности, при сферическом распространении детонационной волны. ЖЭТФ, 1942, т. 12, № 9, стр. 389.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Г. И. Назаров, А. А. Пучков

(Томск)

В отличие от решения Гарабедяна [1] и решения, построенного методом Бергмана в [2], дается точное общее решение для пары функций φ и ψ (φ — потенциал скорости, ψ — функция тока), системы уравнений в частных производных осесимметрического течения несжимаемой идеальной жидкости, зависящее от произвольной аналитической функции комплексного переменного и ограниченное на оси симметрии.

Решения, построенные в [1] и [2] неограниченно возрастают при приближении к оси симметрии.

Пространственные установившиеся течения несжимаемой жидкости с осевой симметрией характеризуются системой уравнений [3]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1)$$

Здесь потенциал скорости φ и функция тока ψ зависят только от двух переменных цилиндрической системы координат x, y ($y > 0$, x — параллельно оси симметрии).

Интегралы системы уравнений (1) будем искать в виде рядов

$$\varphi = \Omega(y) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(y) \frac{\partial^k \Phi}{\partial y^k}, \quad \psi = A + Bx + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(y) \frac{\partial^k \Psi}{\partial y^k} \quad (2)$$

Здесь Φ, Ψ — произвольные гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши — Римана

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3)$$