О ЗАТУХАНИИ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ВОЛНОВОДОМ

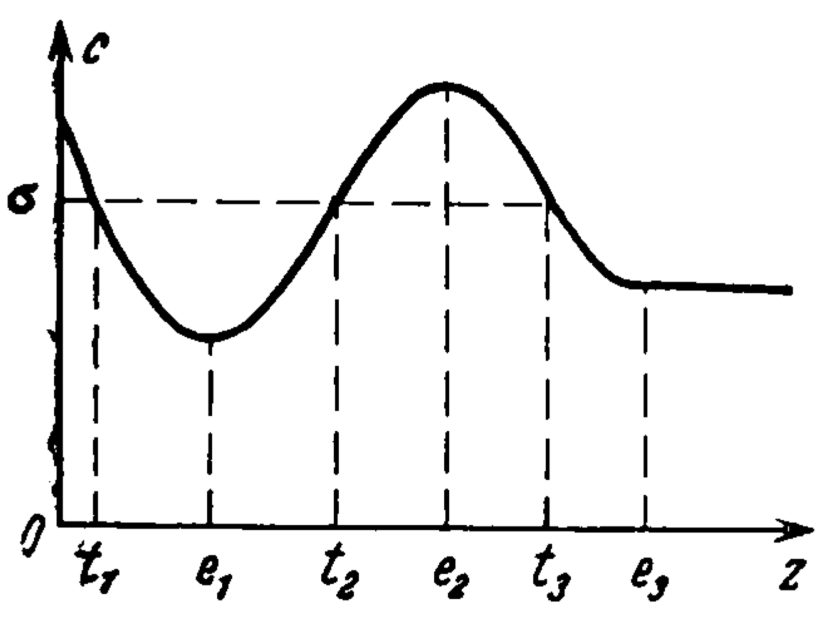
А. Г. Аленицын (Ленинград)

Рассматриваются решения типа поверхностных волн в задаче о собственных высокочастотных колебаниях слоисто-неоднородного полупространства, внутри которого показатель преломления имеет сначала максимум, далее минимум, а начиная с некоторой глубины постоянен. На поверхности поставлено краевое условие третьего рода, на бесконечности — условие излучения, что приводит к квазипересечению дисперсионных кривых и смещению собственных чисел в комплексную плоскость. Это смещение вызывает затухание волн при их распространении вдоль границы, причем скорость затухания существенно различна для разных типов волн. При исследовании применялось сшивание решений, имеющих известную асимптотику на промежутках монотонности показателя преломления.

Рассмотрим распространение волн в вертикально-неоднородной среде, заполняющей полупространство $z \geqslant 0$ и описываемой волновым уравнением

$$\Delta U = \frac{1}{c^2(z)} U_{tt} \tag{1}$$

Здесь скорость объемных волн $c(z)$ — достаточно гладкая функция координаты z, имеющая минимум при $z = e_1$, максимум при $z = e_2$ $(0 < e_1 < e_2)$ и постоянная при $z > e_3 > e_2$, причем $c'(z) \neq 0$ на промежутках монотонности $c(z)$ (фиг. 1). Будем искать решения уравнения (1) типа плоской волны с фазовой скоростью σ:



$$U(x, y, z, t) = e^{ik(x-t\sigma)} V(z, k, \sigma) \tag{2}$$

Введем обозначения

$$n(z) = 1 / c(z), \qquad m^2(z, \sigma) = 1 - n^2(z)\sigma^2$$

Для V имеем при $z \geqslant 0$ уравнение

$$V'' - k^2 m^2(z, \sigma) V = 0 \qquad \left(' = \frac{d}{dz} \right) \tag{3}$$

В качестве граничного условия при $z = 0$ возьмем условие третьего рода

$$V' + k\alpha V = 0 \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{4}$$

С физической точки зрения, такому условию удовлетворяют волны на границе твердого и жидкого полупространств[1]; в аналогичных квантово-механических задачах такое условие эквивалентно дополнительному введению связанного состояния.

В данной работе изучается асимптотика при $k \to \infty$ некоторых корней на плоскости σ характеристического уравнения задачи, получаемой из (3), (4) присоединением условия при $z \to \infty$ (ясно, что дискретный спектр лежит в интервале $0 < \sigma^2 < c^2(e_3)$, интервал $\sigma^2 > c^2(e_3)$ занимает непрерывный спектр). Подробное рассмотрение предполагается в отдельной статье, здесь рассмотрим только область фазовых скоростей $\sigma \approx \sigma_0$, где $\sigma_0 = c(0)\sqrt{1 - \alpha^2}$ — скорость поверхностной волны в однородном полупространстве с $c(z) \equiv c(0)$ (такая волна, аналогичная релеевской волне в упругой среде, порождается условием (4)). Кроме того, пусть

$$\max\{c(e_1),\ c(e_3)\} < \sigma_0 < \min\{c(0),\ c(e_2)\}$$

Как будет показано, в рассматриваемом случае наблюдаются резонансные явления (квазипересечение) со сдвигом собственных чисел в комплексную область.

Пусть I_j — интервал монотонности $c(z)$ с правым концом e_j; t_j — точка поворота на I_j $(i = 1, 2, 3)$.

---

[1] См. кандидатскую диссертацию В. Ю. Завадского, Акустический ин-т, М., 1965.

Введем обозначения

$$\varphi_j = \left(\frac{3}{2}\int\limits_{t_j(\sigma)}^{z} m(\zeta, \sigma)\, d\zeta\right)^{2/3}, \quad z \in I_j; \quad \varphi_j > 0 \quad \text{при } c(z) > \sigma$$

$$W_j = \begin{pmatrix} w_{j1} & w_{j2} \\ k^{-1}w_{j1}' & k^{-1}w_{j2}' \end{pmatrix}, \qquad w_{j\nu} = \frac{1}{\sqrt{\varphi_j'}} A_\nu (k^{2/3}\varphi_j)$$

где $A_\nu(\tau)$ — функции Эйри, $\nu = 1, 2$.

Заменим уравнение (3) системой

$$\mathrm{Y}' = kB\mathrm{Y}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} V \\ k^{-1}V' \end{pmatrix} \tag{5}$$

Фундаментальную матрицу Y системы (5) на полуоси $z \geqslant 0$ получаем сшиванием фундаментальных матриц Y_j, определенных на I_j и имеющих там асимптотику

$$Y_j = [E + O(k^{-1})]\, W_j, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Отметим, что здесь сшиваются именно точные решения (а не главные члены асимптотики, как обычно), что позволяет учесть все погрешности асимптотических формул. Решение системы (5), удовлетворяющее условию излучения при $\sigma > c(e_3)$, $z \to +\infty$, получаем из комплексной линейной комбинации столбцов матрицы Y. Граничное условие при $z = 0$ дает дисперсионное уравнение для $\sigma(k)$ вида

$$\Phi + i\Psi = 0 \tag{7}$$

Здесь обозначено

$$\Phi = 2R(\cos kf_2 + O_1) + Se^{-2kf_1}(\sin kf_2 + O_1)$$

$$\Psi = -e^{-2kf_3}[R(\sin kf_2 + O_1) - {}^1/_2 Se^{-2kf_1}(\cos kf_2 + O_1)]$$

$$R = \alpha - m(0, \sigma) + O_1, \qquad S = \alpha + m(0, \sigma) + O_1, \qquad O_1 = O(k^{-1})$$

$$f_1 = \int\limits_0^{t_1} m\, dz, \qquad f_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{n^2\sigma^2 - 1}\, dz, \qquad f_3 = \int\limits_{t_2}^{t_3} m\, dz, \qquad f_j > 0$$

Если в (7) опустить Ψ, получаем семейство вещественных дисперсионных кривых с квазипересечением такого же вида, что и в [1,2]. Наличие Ψ вызывает смещение корней дисперсионного уравнения в комплексную плоскость, причем $\varepsilon \equiv \operatorname{Im}\sigma < 0$, что влечет за собой затухание волн, распространяющихся вдоль оси x. При этом различным участкам дисперсионных кривых соответствует различная скорость затухания: для волн, порожденных характером граничного условия

$$\varepsilon(k) = -(a + O_1)\exp(-2kf_1 - 2kf_3), \qquad a > 0 \tag{8}$$

а для волн, порожденных волноводом, т. е. интервалом (t_1, t_2)

$$\varepsilon(k) = -(b + O_1)\exp(-2kf_3), \qquad b > 0 \tag{9}$$

Примененный метод допускает обобщение на случай большего числа экстремумов функции $c(z)$. Заметим, что затухающие волны в случае монотонной $c(z)$ рассматривались ранее В. Ю. Завадским. В квантово-механической трактовке решения такого типа описывают квазистационарные состояния [3].

Поступила 29 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Аленицын А. Г. Волны Рэлея в неоднородном упругом слое. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
2. Аленицын А. Г. Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве волноводного типа. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
3. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., «Наука», 1966.