Из (3.3) следует, что при отражении от границы $z = h(x)$ волны единичной амплитуды последняя уменьшается на малую величину $2\cos\theta\, g^{-1}(x)$. Ясно, что поле такой волны должно плавно меняться вдоль слоя. Тогда на единице расстояния по оси x единичная амплитуда уменьшится на величину

$$\cos^2\theta \,/\, h(x)\, g(x)$$

так как $\Delta = 2h(x)\operatorname{tg}\theta$. Предполагая,что потеря амплитуды пропорциональна ее абсолютной величине и пройденному пути по оси x, элементарным интегрированием приходим к множителю (2.5), описывающему затухание.

Если теперь уточнить изменение интенсивности с глубиной в слое, учитывая влияние изменения амплитуды по оси x на изменение амплитуды в направлении z, то придем к полному косинусному множителю из (2.4).

Лучевой подход, таким образом, позволяет получить главные члены формул (2.4) и (2.6) при аналогичных предположениях о свойствах среды и частоте колебаний.

Результаты данного исследования в первую очередь должны представлять интерес в геофизике. Например, они дают определенное оправдание широко используемого метода установления переменной мощности земной коры по локальным значениям фазовых скоростей волн Лява. Возможно, эти результаты представят интерес и в механике тонких слоев и пластин в связи с все возрастающей ролью ударных и высокочастотных воздействий.

Поступила 15 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В. М., Молотков И. А. О распространении волн Лява в упругом полупространстве, неоднородном по двум координатам. Изв. АН СССР, Физика Земли, 1966, № 6, стр. 34—38.
2. Пресс Ф., Ивинг М. Придонный слой с малой скоростью.— В сб.: Вопросы сейсмической разведки. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
3. Озеров Д. К. Теоретико-экспериментальное исследование волн Лява, ч. 1.— В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, сб. 2, Изд-во Ленингр. ун-та, 1959, стр. 52—78.

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ И ПОМЕЩЕННОЙ В УПРУГУЮ СРЕДУ

Л. А. Молотков, П. В. Крауклис

(Ленинград)

Использование точных решений трехмерных нестационарных задач теории упругости для ряда слоистых сред позволяет единым способом выяснить особенности распространения волн в низкочастотной области. В настоящее время уже рассмотрены задачи, относящиеся к плоскопараллельным слоям, которые либо ограничены свободными поверхностями, либо находятся в контакте с упругими или жидкими средами. В результате исследований удалось обосновать и уточнить известные классические уравнения колебаний тонких пластин [1], а также получить соответствующие уравнения в случае многослойных пластин [2]. Кроме того, изучение точных решений для упругого слоя, расположенного между жидкостями, и для пластины, лежащей на упругом основании, позволило исследовать низкочастотные процессы распространения в этих средах [3,4].

Ниже исследуется задача о колебаниях слоя с неплоскими границами. Рассматривается распространение волн в цилиндрической оболочке, ограниченной снаружи упругой средой и заполненной жидкостью. Интерес к этой задаче связан, в частности, с изучением сейсмических волн вблизи обсаженных скважин и выделением волн-помех, обусловленных наличием скважины.

1. Пусть в цилиндрической системе координат r, θ, z задан упругий цилиндрический слой 1 ($r_1 < r < r_2$), окруженный упругой средой 2 ($r > r_2$) и жидким цилиндром 0 ($r < r_1$). Все среды предполагаются однородными и изотропными, при этом i-я

среда ($i = 0, 1, 2$) характеризуется плотностью ρ_i и скоростями v_{pi}, v_{si} распространения продольных и поперечных волн ($v_{s0} = 0$). Вектор смещения в упругих средах удовлетворяет уравнению Ламе, а в жидкости описывается линейными уравнениями гидроакустики.

На границе упругих сред условия сопряжения рассматриваются двух типов: 1) жесткий контакт, при котором нормальные и касательные смещения и напряжения непрерывны; 2) нежесткий контакт, когда непрерывны только нормальные напряжения и смещения, а тангенциальные напряжения обращаются в нуль. Что касается упруго-жидкой границы $r = r_1$, то на ней непрерывны нормальные смещения, а разность нормальных напряжений и касательное напряжение равны внешним силам, определяющим источник. Последний начинает действовать при $t = 0$, приложен к поверхности $r = r_1$ и является осесимметричным.

Задача об определении поля смещений сводится к решению уравнения Ламе и линейной гидроакустики с нулевыми начальными данными и с краевыми условиями, характеризующими источник и сопряжение на границах $r = r_1$ и $r = r_2$. Для решения поставленной задачи используются интегральные преобразования Фурье и Лапласа. Составляющие вектора смещения $u_{ri}(t, z, r)$ и $u_{zi}(t, z, r)$ ($u_{\theta i} \equiv 0$) в i-й среде выражаются равенствами

$$\left.\begin{matrix} u_{ri} \\ u_{zi} \end{matrix}\right\} = \int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix} \cos kz \\ \sin kz \end{matrix}\right\} \frac{dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left.\begin{matrix} U_{ri}(k, \eta, r) \\ U_{zi}(k, \eta, r) \end{matrix}\right\} \exp(kt\eta v_{s1})\, d\eta \tag{1.1}$$

при этом функции $U_{ri}(k, \eta, r)$ и $U_{zi}(k, \eta, r)$ представляют собой линейные комбинации цилиндрических функций со значками 0 и 1.

Коэффициенты этой линейной комбинации находятся из системы семи алгебраических уравнений, записанных на основании граничных условий. Так как выражения для $U_r(k, \eta, r)$ и $U_z(k, \eta, r)$ чрезвычайно громоздки, то их приводить не будем.

2. Для исследования полученных полей смещения необходимо вначале вычислить внутренние интегралы. Для этого были исследованы на плоскости η особенности подынтегральных функций. Последние имеют существенно особую точку $\eta = \infty$, точки ветвления $\pm i\gamma_2^{-1}$, $\pm i\delta_2^{-1}$ ($\gamma_2 = v_{s1}v_{p2}^{-1}$, $\delta_2 = v_{s1}v_{s2}^{-1}$) и полюса, лежащие в левой полуплоскости и на мнимой оси. Положение этих полюсов совпадает с корнями уравнения

$$\Delta(kr_1, kr_2, \eta) = 0 \tag{2.1}$$

в котором Δ — определитель упомянутой системы алгебраических уравнений. Так как корни располагаются симметрично относительно вещественной оси, то изучение корней можно производить лишь в верхней полуплоскости.

При исследовании уравнения (2.1) полезно начинать с рассмотрения области

$$kr_2 \ll 1 \tag{2.2}$$

в которой цилиндрические функции, входящие в определитель Δ, могут быть при конечных η заменены первыми членами разложения в ряды. Корни уравнения (2.1) при условии (2.2) находятся либо на конечном расстоянии от начала координат, либо представляются формулами вида $\eta = O[(kr_2 - kr_1)^{-1}]$. В соответствие с этим решения уравнения (2.1) разделим на два класса.

Для вычисления корней первого класса (расположенных на конечном расстоянии) в области (2.2) могут быть записаны приближенные уравнения

$$(p\eta^2 + \alpha_0^2)(1 - \gamma_1^2 + \sigma\gamma_1^2) + x(1 - \sigma)(p\eta^2\gamma_1^2 - \alpha_0^2 + \gamma_1^2\alpha_0^2) = 0 \tag{2.3}$$

$$(A + \sigma\alpha_1^2)(p\eta^2 + \alpha_0^2) + x(1 - \sigma)(p\eta^2\alpha_1^2 - A\alpha_0^2) = 0 \tag{2.4}$$

относящиеся к случаям жесткого и нежесткого контактов. В равенствах (2.3) и (2.4) введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered} p = \rho_0\rho_1^{-1}, \qquad \sigma = \mu_2\mu_1^{-1}, \qquad \gamma_0 = v_{s1}v_{p0}^{-1}, \qquad \gamma_1 = v_{s1}v_{s1}^{-1} \\ \mu_1 = \rho_1 v_{s1}^2, \qquad \mu_2 = \rho_2 v_{s2}^2, \qquad x = r_1^2 r_2^{-2}, \qquad \alpha_0^2 = 1 + \gamma_0^2\eta^2 \\ \alpha_1^2 = 1 + \gamma_1^2\eta^2, \qquad A = 3 - 4\gamma^2 + \eta^2(1 - \gamma_1^2) \end{gathered} \tag{2.5}$$

Несложный анализ уравнений (2.3) и (2.4) показывает, что относительно η^2 первое уравнение является линейным, а второе — квадратным. Корни обоих уравнений расположены на мнимой оси и с ростом параметра x монотонно перемещаются. Крайние положения корней могут быть определены из уравнений (2.3) и (2.4) при $x = 0$ и $x = 1$. На основании проведенных исследований можно для реальных сред (в которых $3v_{p0} < V_{p1}$, $\sigma \sim 0.1$, $p \sim 0.1$) указать интервалы:

$$\left(\frac{i\sqrt{\sigma}}{\sqrt{p+\sigma\gamma_0^2}},\ \frac{i}{\sqrt{p+\gamma_0^2}}\right), \qquad \left(i\,\frac{\sqrt{3-4\gamma_1^2+\sigma}}{\sqrt{1-\gamma_1^2+\sigma\gamma_1^2}},\ i2\sqrt{1-\gamma_1^2}\right) \tag{2.6}$$

расположения корней уравнения (2.4). Что касается уравнения (2.3) то его корень в случае реальных сред лежит в первом интервале (2.6) и близок к меньшему по модулю корню уравнения (2.4).

Остановимся теперь на изучении движения корней уравнения (2.1) с ростом kr_1 и kr_2. Для исследования перемещения корней первого класса необходимо в разложениях цилиндрических функций учитывать дополнительные члены. Характер перемещения корней определяется соотношением между начальным положением $\operatorname{Im}\eta_0$ корня и δ_2^{-1}. В случае $\operatorname{Im}\eta_0 < \delta_2^{-1}$ корень с ростом kr_1 и kr_2 остается на мнимой оси, а при обратном соотношении корень смещается в левую полуплоскость.

3. После качественного исследования особенностей подынтегральных функций интеграл Меллина может быть представлен суммой вычетов и интегралов по контурам, охватывающим точки ветвления $\pm i\gamma_2^{-1}$, $\pm i\delta_2^{-1}$. В соответствии с этим поле смещений выражается в виде суммы, слагаемые которой описывают интерференционные волны. Интегралы Фурье от интегралов по разрезам характеризуют волны, распространяющиеся во всех средах вдоль оси z с постоянными скоростями v_{s2} или v_{p2}. Эти волны не представляют особого интереса при изучении колебаний, связанных со скважинами. Скорости остальных интерференционных волн оказываются зависящими от частоты

Волны, обладающие дисперсией, представляются интегралами типа

$$\int_0^\infty F(k, r)\, e^{i[\omega(k)t - kz]} e^{-\alpha(k)t}\, dk \tag{3.1}$$

при этом функции $\omega(k)$ и $\alpha(k)$ выражаются

$$\omega(k) = kv_{s1}\operatorname{Im}\eta, \qquad \alpha(k) = kv_{s1}\,|\operatorname{Re}\eta| \tag{3.2}$$

через величину η, определяющую положение корня на плоскости η. Функция $F(k, r)$ может быть легко найдена на основании явного вида решения и функциональной зависимости $\eta(k)$. Если в выражении (3.1) переменную интегрирования k заменить на ω, то вместо (3.1) получим интеграл

$$\int_{\omega_0}^\infty F_1(\omega, r)\, e^{i[\omega t - k(\omega)z]} e^{-\beta(\omega)t}\, d\omega \tag{3.3}$$

в котором $k(\omega)$ — функция, обратная $\omega(k)$,

$$F_1(\omega, r) = F[k(\omega), r]\, k'(\omega), \qquad \beta(\omega) = \alpha[k(\omega)] \tag{3.4}$$

Выражение (3.3) при $\beta(\omega) \equiv 0$ представляет собой интеграл Фурье и описывает наложение незатухающих колебаний, частотный спектр которых лежит в интервале $[\omega_0, \infty)$. Фазовые скорости v_φ этих колебаний определяются по формуле

$$v_\varphi = v_{s1}\operatorname{Im}\eta \tag{3.5}$$

Если же $\beta(\omega) \not\equiv 0$, то интеграл (3.3) характеризует группу экспоненциально затухающих колебаний, которые распространяются со скоростями (3.5). При условии $\beta(\omega)\, t \ll 1$ спектр приближенно определяется функцией $F_1(\omega, r)$, а частоты колебаний лежат в интервале $[\omega_0, \infty)$.

Величина ω_0 в выражении (3.3), согласно первому равенству (3.2), отлична от нуля только для интегралов, связанных с корнями первого класса. Анализ уравнения (2.1) показывает, что в случае корней второго класса $\omega_0 \lesssim v_{s1}(r_2 - r_1)^{-1}$. Поэтому, если интересоваться областью низких частот

$$\omega \ll v_{s1} (r_2 - r_1)^{-1} \tag{3.6}$$

то можно учитывать только те выражения (3.3), которые соответствуют корням первого класса.

4. Дальнейшее изучение поля смещений будем производить в области (3.6), где согласно результатам исследования корней наблюдаются одна или две волны. Эти волны регистрируются в сейсмических экспериментах [5] и в сейсмике их называют водной и трубной волнами. Скорость v_1 трубной волны при $\omega = 0$ удовлетворяет неравенствам

$$v_{s1}^- < v_1 < v_{s1}^+ \qquad \left(v_{s1}^- = \left(\frac{3 - 4\delta_1^2 + \sigma}{1 - \gamma_1^2 + \sigma\gamma_1^2}\right)^{1/2}, \ v_{s1}^+ = 2v_{s1}\sqrt{1 - \gamma_1^2}\right) \tag{4.1}$$

Исследование нижнего предела v_{s1}^- показывает, что последний с ростом σ в промежутке [0,1] возрастает от значения скорости распространения в стержне $v_{s1}\sqrt{(3 - 4\gamma_1^2)(1 - \gamma_1^2)^{-1}}$ до пластинчатой скорости v_{s1}^+. Пластинчатая и стержневая скорости обычно мало отличаются одна от другой, поэтому скорость трубной волны меняется слабо в зависимости от отношения σ модулей сдвига и толщины оболочки. Рассматриваемая трубная волна существует также и при отсутствии сред 0 и 2. Поэтому трубная волна связана с колебаниями самой оболочки. Если оболочка находится в жестком контакте с упругой средой, то этот тип колебаний в оболочке подавляется.

В противоположность трубной волне водная волна существует также и при жестком контакте. Скорость v_2 этой волны при $\omega = 0$ заключена для обоих контактов в интервале

$$\frac{v_{s1}\sqrt{\sigma}}{\sqrt{p + \sigma\gamma_0^2}} \leqslant v_2 \leqslant \frac{v_{s1}}{\sqrt{p + \gamma_0^2}} \tag{4.2}$$

и, как показывают числовые расчеты, мало зависит от контакта. Однако зависимость скорости от толщины оболочки оказывается заметной. В сейсмических экспериментах Ригса [6] введение в скважину даже тонкой трубы ($r_1 r_2^{-1} = 0.97$) увеличивало скорость водной волны на 40%. Это увеличение скорости подтверждается числовыми расчетами, произведенными по формулам (2.3), (2.4), (3.5).

Водная и трубная волны могут распространяться вдоль оси z с затуханием и без затухания. Характер распространения связан с расположением корней на плоскости η и определяется соотношением между скоростью v_{s2} и скоростями водной и трубной волн. Трубная волна при условии $v_1 < v_{s2}$ и водная волна в случае $v_2 < v_{s2}$ распространяются вдоль оси z без экспоненциального затухания. При этих условиях волны в упругой среде экспоненциально ослабляются по мере удаления от оболочки. Если выполняются обратные соотношения, то волна является объемной и распространяется во всех направлениях. Спектральные функции смещений, как и в случае плоскопараллельных слоев [3,4], имеют максимумы, которые с ростом времени смещаются в сторону более низких частот.

В заключение отметим, что используемые методы позволяют рассматривать также низкочастотные колебания и в других оболочках, для которых можно построить точные решения.

Поступила 20 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Петрашень Г. И. Проблемы инженерной теории колебаний вырожденных систем. «Исследования по упругости и пластичности», сб. 5, Изд. Ленингр. ун-та, 1966.
2. Молотков Л. А. Об инженерных уравнениях колебаний пластин, имеющих слоистую структуру. Сб. «Вопр. динам. теории распр. сейсм. волн», 1961, т. V.
3. Молотков Л. А. О распространении низкочастотных колебаний в жидких полупространствах, разделенных упругим тонким слоем. Сб. «Вопр. динам. теории распр. сейсм. волн», 1966, т. V.
4. Крауклис П. В., Молотков Л. А. О низочастотных колебаниях пластины на упругом полупространстве. ПММ, 1963, № 5.
5. Пузырев Н. Н. Измерение сейсмических скоростей в скважинах. М., Гостоптехиздат, 1957.
6. Riggs D. Seismic waves types in borehole. Geophisics, 1955, vol. 20, No. 1.