ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОГО УПРУГОГО СЛОЯ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

И. А. Молотков, Д. К. Озеров

(Ленинград)

Рассматриваются сдвиговые колебания тонкого упругого слоя $0 \leqslant z \leqslant h(x)$ переменной толщины, где $h(x)$ — достаточно гладкая функция. Одна граница слоя — свободная, другая — находится в контакте с неоднородной упругой средой, причем контакт задается импедансным граничным условием. Колебания считаются высокочастотными

$$\Omega \equiv \frac{\omega h(x)}{b} \gg 1$$

где ω — частота, b — скорость распространения сдвиговых волн. Вектор смещения направлен параллельно оси Y.

Решение задачи построено в виде специальных асимптотических рядов по степеням $\Omega^{-1/3}$. Смещения слоя выражены через $h(x)$ и характеристики контактирующей со слоем упругой среды. Найдены выражения для фазовой и групповой скорости в слое. Окончательные формулы выведены также и другим способом — на базе идеи конструктивной интерференции объемных волн. Дана лучевая интерпретация зависимости интенсивности волн от переменных x, z, а также найдено (лучевым путем) затухание возмущения при распространении вдоль слоя.

1. Пусть в декартовой системе координат x, y, z рассматривается однородный упругий слой

$$0 \leqslant z \leqslant h(x) \tag{1.1}$$

Уравнения теории упругости (при широком классе граничных условий) позволяют из общей задачи о колебаниях слоя (1.1) выделить скалярную задачу для смещений u, параллельных оси y:

$$\mathbf{u} = e^{-i\omega t}\mathbf{j}u(x, z, k), \qquad k = \omega b^{-1} \tag{1.2}$$

Из уравнения Ламе следует уравнение Гельмгольца

$$u_{xx} + u_{zz} + k^2 u = 0 \tag{1.3}$$

На границе $z = 0$ предполагаем отсутствие напряжения

$$u_z |_{z=0} = 0 \tag{1.4}$$

при $z = h$ накладываем импедансное граничное условие

$$u_z - ikg(x)\, u |_{z=h(x)} = 0, \qquad g(x) > 0 \tag{1.5}$$

(оно описывает взаимодействие слоя с неоднородной упругой средой, расположенной в области $z > h(x)$ и характеризующейся скоростью распространения волн $b_1(x, z) < b$). При $\omega \to \infty$ справедлива формула

$$g(x) = \frac{\rho_1(x, z)\, b_1(x, z) \sqrt{b^2 - b_1^2(x, z)}}{\rho b^2} \Bigg|_{z=h(x)} \tag{1.6}$$

Здесь ρ и $\rho_1(x, z)$ — плотности сред, заполняющих слой (1.1) и область $z > h(x)$. Функции $h(x)$ и $g(x)$ будем предполагать достаточно гладкими (например, непрерывными вместе со вторыми производными).

Рассмотрим собственные функции задачи (1.3) — (1.5), имеющие характер волн, бегущих вдоль оси x (волны Лява)

$$u(x, z, k) = Ue^{ikx} \tag{1.7}$$

Будем разыскивать эти собственные функции в высокочастотном приближении, т. е. при

$$kh(x) \gg 1 \tag{1.8}$$

(толщина слоя много больше длины волны). Кроме того, будем интересоваться такими решениями задачи (1.3) — (1.5), которые соответствуют лучам, попеременно отражающимся от двух границ слоя. Анализ показывает, что такое попеременное отражение наверняка имеет место при

$$kh(x)\,h'(x) \ll 1 \tag{1.9}$$

т. е. тогда, когда толщина слоя мала и изменяется по x настолько плавно, что это изменение мало по сравнению с $(kh)^{-1}$. Неравенства (1.8) — (1.9) ограничивают частоту рассматриваемых колебаний как сверху, так и снизу.

2. Поставленная задача не является обычной задачей на отыскание высокочастотной асимптотики: про большой параметр kh нельзя сказать, что он много больше всех других безразмерных характеристик задачи.

Для построения решения положим

$$h(x) = k^{-p} f(x) \qquad (1/2 < p < 1) \tag{2.1}$$

Функцию $f(x)$ будем считать принимающей конечные значения. Тогда условия (1.8)—(1.9) будут выполнены, если k достаточно велико.

Введем также независимую переменную $\zeta = k^p z$. Для функции $U(x, \zeta, k)$ из (1.7) получаем задачу

$$U_{xx} + k^{2p} U_{\zeta\zeta} + 2ikU_x = 0, \quad U_\zeta|_{\zeta=0} = 0, \quad U_\zeta + ik^{1-p} g(x)\, U|_{\zeta=f(x)} = 0 \tag{2.2}$$

Задача (2.2) уже не содержит конкурирующего с k большого параметра той же размерности. Асимптотическое разложение ее решения (при $k \to \infty$ и произвольном, но фиксированном $f(x)$) ищем в виде

$$\begin{gathered} U(x, \zeta, k) = \exp\,[k^q \varphi(x) + \Lambda(x, \zeta, k)] \cos L(x, \zeta, k) \\ \Lambda \sim \alpha(x, \zeta) + \frac{\beta(x, \zeta)}{k^q} + \frac{\gamma(x, \zeta)}{k^{2q}} + \cdots \\ L \sim a(x, \zeta) + \frac{b(x, \zeta)}{k^q} + \frac{c(x, \zeta)}{k^{2q}} + \cdots \qquad (0 < q < p) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь $\varphi(x)$, $\alpha(x, \zeta)$, $a(x, \zeta)$, $\beta(x, \zeta)$, $b(x, \zeta)$, ... — искомые функции, а q и p — искомые числа. Подстановка (2.3) в (2.2) и приравнивание нулю коэффициентов при каждой степени k приводит к системе рекуррентных дифференциальных уравнений и краевых условий для искомых функций. Для существования нетривиальных решений этой системы оказывается необходимым положить, что $p = 2/3$, $q = 1/3$.

Не останавливаясь на решении полученной системы дифференциальных уравнений, приведем окончательный результат. Задача (2.2) допускает счетное множество решений, описываемых следующими асимптотическими формулами: (2.4)

$$U_m(x, \zeta, k) = \frac{C_m}{\sqrt{f(x)}} \exp\left[-\frac{i(m-1/2)^2 \pi^2 k^{1/3}}{2} \int_0^x \frac{dx}{f^2(x)} - \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \int_0^x \frac{dx}{f^3(x)\,g(x)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k^{1/3}}\left(\frac{i}{2}\frac{f'(x)}{f(x)}\zeta^2 + \eta(x)\right) + O\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right)\right] \cos\left[\frac{(m-1/2)\pi\zeta}{f(x)}\left(1 - \frac{i}{k^{1/3} f(x)\,g(x)}\right) + O\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right)\right]$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Здесь C_m — произвольная функция от k.

$$f(x) = k^{2/3} h(x), \qquad \zeta = k^{2/3} z$$

Выбор точки $x = 0$ произволен; сравнительно громоздкую функцию $\eta(x)$ не выписываем, отметим лишь, что в нее входят $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$, $f''(x)$.

Подстановка (2.4) в (1.7) и (1.2) дает формулы для смещений, соответствующих отдельным волнам Лява. Множитель

$$\exp\left[-\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \int_0^x \frac{dx}{f^3(x)\,g(x)}\right] \tag{2.5}$$

описывает приближенно затухание волн Лява за счет взаимодействия со средой, расположенной при $z > h(x)$.

Фазовые $v_1^{(m)}$ и групповые $v_2^{(m)}$ скорости этих волн на основании (2.2) оказываются равными

$$v_{1,2}^{(m)}(x) = b \pm \frac{(m - {}^1/_2)^2 \pi^2 b^{5/3}}{2\omega^{2/3} f^2(x)} + O(\omega^{-4/3}) \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.6}$$

Область применимости найденных формул следует из вида асимптотики (2.2). При гладких функциях $h(x)$, $g(x)$ достаточно выполнения условия (1.8) и неравенств

$$kh(x)\,h'(x) \ll m, \quad kh(x) \gg mg^{-1}(x), \quad kh(x) \gg m \tag{2.7}$$

Тогда формулы (1.2), (1.7), (2.4) и (2.6) определяют поведение волн Лява, распространяющихся в слое (1.1) с попеременным отражением от его границ.

Аналогичные асимптотические формулы могут быть получены и для слоя с переменной скоростью $b = b(x, z)$. На основании результатов работы [1] ясно, что в этом случае наряду с решениями вида (2.4), появятся решения, содержащие вместо косинусного множителя множитель с интегралом Эйри.

3. Основная часть приведенных выше результатов может быть получена при помощи лучевого подхода. При этом удается наглядно интерпретировать процесс распространения интерференционных волн.

Зависимость (2.6) для фазовой скорости может быть найдена методом конструктивной интерференции [2-3]. При этом предполагается, что в рассматриваемой среде энергия в основном распространяется вдоль лучей, попеременно отражаясь от границ $z = 0$ и $z = h$. Фазы коэффициентов отражения считаются равными 0 и π соответственно. Кроме того, для получения формулы (2.6) для $v_1^{(m)}$ необходимо предположить, что

$$\mathrm{tg}\,\theta\ \mathrm{tg}\,\psi \ll 1 \tag{3.1}$$

$${}^1/_2\pi - \theta \ll 1 \tag{3.2}$$

Здесь θ — угол падения луча на границу, ψ — угол между касательной к границе $z = h(x)$ и осью x. Условие (3.1), равносильное требованию малости изменения мощности слоя на длине Δ между двумя соседними точками падения луча на границу по сравнению с $h(x)$ $(h'(x)\Delta \ll h(x))$, эквивалентно первому неравенству (2.7). При выполнении этого условия $h'(x)$ не влияет на главные члены выражения $v_1^{(m)}$. Неравенство же (3.2) приводит к тому, что фазовые скорости рассматриваемых волн мало отличаются от скорости сдвиговых волн в слое. Это условие эквивалентно третьему неравенству (2.7).

Формула для групповой скорости также может быть получена лучевым способом (нужно разделить горизонтальное расстояние Δ на время пробега вдоль луча).

Главные члены формулы (2.4) могут быть найдены путем суммирования волн двух типов — бегущей к границе $z = 0$ и бегущей к границе $z = h(x)$. Такое суммирование без учета поглощения на второй границе (что соответствует $g(x) \to \infty$) приводит к множителю $\cos[\pi(m - {}^1/_2)\zeta f^{-1}(x)]$ — основному зависящему от ζ множителю правой части (2.4).

Появление множителя $f^{-1/2}(x)$ в (2.4) связано с очевидным увеличением (уменьшением) плотности энергии при уменьшении (увеличении) мощности слоя.

Остановимся теперь на экспоненциальном затухании волн Лява вдоль слоя. Импедансному граничному условию (1.5) соответствует коэффициент отражения плоской волны

$$\varkappa(x) = [\cos\theta - g(x)] \,/\, [\cos\theta + g(x)]$$

который при условии $\cos\theta \,/\, g(x) \ll 1$ равносильном второму неравенству (2.7), приобретает вид

$$\varkappa(x) \approx -1 + \frac{2\cos\theta}{g(x)} \tag{3.3}$$

Такой коэффициент отражения имеет место, например, тогда, когда слой повышенной скорости находится в жестком контакте с полупространством пониженной скорости. Но тогда для $g(x)$ справедлива формула (1.6).

Из (3.3) следует, что при отражении от границы $z = h(x)$ волны единичной амплитуды последняя уменьшается на малую величину $2 \cos \theta \, g^{-1}(x)$. Ясно, что поле такой волны должно плавно меняться вдоль слоя. Тогда на единице расстояния по оси x единичная амплитуда уменьшится на величину

$$\cos^2 \theta \, / \, h(x) \, g(x)$$

так как $\Delta = 2h(x) \operatorname{tg} \theta$. Предполагая,что потеря амплитуды пропорциональна ее абсолютной величине и пройденному пути по оси x, элементарным интегрированием приходим к множителю (2.5), описывающему затухание.

Если теперь уточнить изменение интенсивности с глубиной в слое, учитывая влияние изменения амплитуды по оси x на изменение амплитуды в направлении z, то придем к полному косинусному множителю из (2.4).

Лучевой подход, таким образом, позволяет получить главные члены формул (2.4) и (2.6) при аналогичных предположениях о свойствах среды и частоте колебаний.

Результаты данного исследования в первую очередь должны представлять интерес в геофизике. Например, они дают определенное оправдание широко используемого метода установления переменной мощности земной коры по локальным значениям фазовых скоростей волн Лява. Возможно, эти результаты представят интерес и в механике тонких слоев и пластин в связи с все возрастающей ролью ударных и высокочастотных воздействий.

Поступила 15 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В. М., Молотков И. А. О распространении волн Лява в упругом полупространстве, неоднородном по двум координатам. Изв. АН СССР, Физика Земли, 1966, № 6, стр. 34—38.
2. Пресс Ф., Ивинг М. Придонный слой с малой скоростью.— В сб.: Вопросы сейсмической разведки. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
3. Озеров Д. К. Теоретико-экспериментальное исследование волн Лява, ч. 1.— В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, сб. 2, Изд-во Ленингр. ун-та, 1959, стр. 52—78.

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ И ПОМЕЩЕННОЙ В УПРУГУЮ СРЕДУ

Л. А. Молотков, П. В. Крауклис

(Ленинград)

Использование точных решений трехмерных нестационарных задач теории упругости для ряда слоистых сред позволяет единым способом выяснить особенности распространения волн в низкочастотной области. В настоящее время уже рассмотрены задачи, относящиеся к плоскопараллельным слоям, которые либо ограничены свободными поверхностями, либо находятся в контакте с упругими или жидкими средами. В результате исследований удалось обосновать и уточнить известные классические уравнения колебаний тонких пластин [1], а также получить соответствующие уравнения в случае многослойных пластин [2]. Кроме того, изучение точных решений для упругого слоя, расположенного между жидкостями, и для пластины, лежащей на упругом основании, позволило исследовать низкочастотные процессы распространения в этих средах [3,4].

Ниже исследуется задача о колебаниях слоя с неплоскими границами. Рассматривается распространение волн в цилиндрической оболочке, ограниченной снаружи упругой средой и заполненной жидкостью. Интерес к этой задаче связан, в частности, с изучением сейсмических волн вблизи обсаженных скважин и выделением волн-помех, обусловленных наличием скважины.

1. Пусть в цилиндрической системе координат r, θ, z задан упругий цилиндрический слой 1 ($r_1 < r < r_2$), окруженный упругой средой 2 ($r > r_2$) и жидким цилиндром 0 ($r < r_1$). Все среды предполагаются однородными и изотропными, при этом i-я