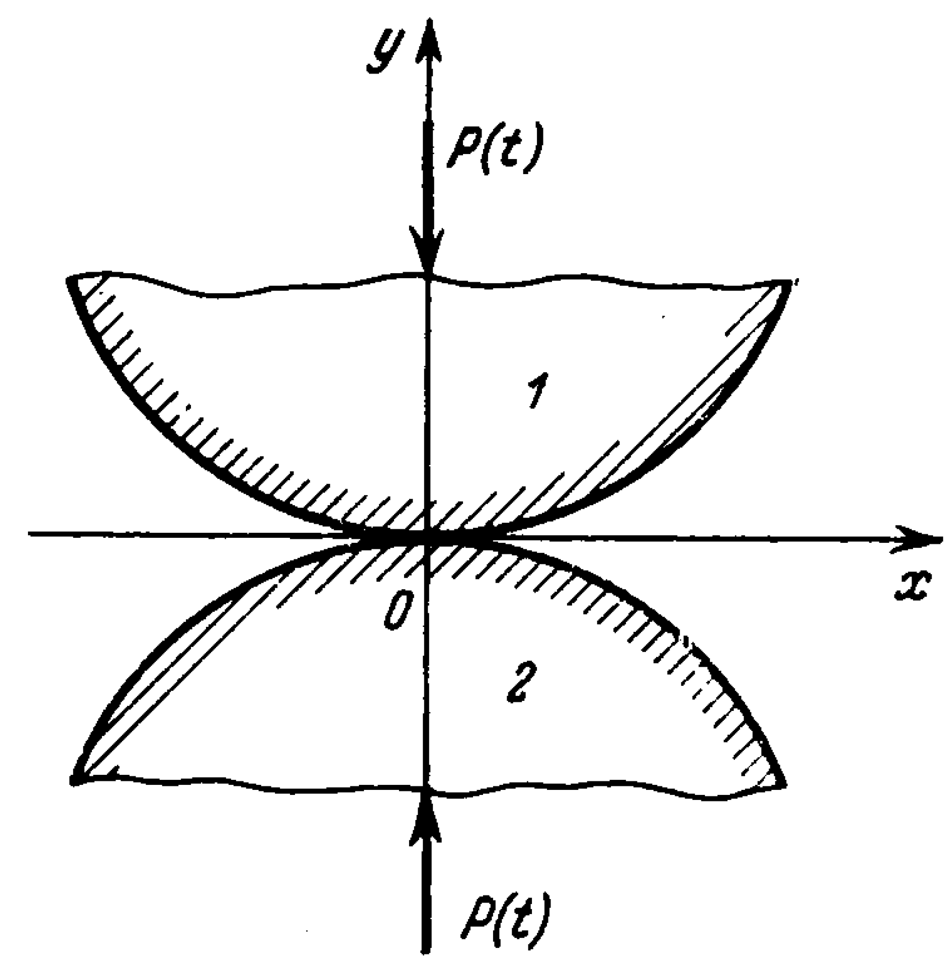
КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Н. Х. Арутюнян (Ереван)

Развитие теории ползучести, в частности доказательство теорем о влиянии ползучести на напряженное и деформированное состояние изотропного тела [2,26], и решение плоской контактной задачи теории пластичности [5] создали предпосылки для рассмотрения контактных задач теории ползучести с учетом старения материала. Существенную роль сыграл также новый эффективный метод решения интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода [18,19], позволяющий получить решение, если известно решение соответствующего уравнения с правой частью, равной единице. Заметим, что с механической точки зрения это решение соответствует решению плоской контактной задачи для случая давления жесткого штампа с прямолинейным основанием на полуплоскость.



1. **Плоская контактная задача теории ползучести.** Плоская контактная задача линейной теории ползучести впервые была изучена И. Е. Прокоповичем [26]. Известное решение теории упругости [38] и основные уравнения [2] наследственной теории старения позволили ему для определения вертикального перемещения v_i^* границы i-го полупространства, находящегося в условиях плоской деформации и загруженного нормальными силами $p^*(x, t)$, приложенными на площади S, получить следующую формулу:

$$v_i^*(t) = \frac{2}{\pi}[F_i(t) - L_i] \int_S \overline{K}(x, s)\, p^*(s, t)\, ds + C_i(t) \tag{1.1}$$

$$L_i p^*(s, t) = \int_{\tau_1}^{t} K_i(t, \tau)\, p^*(s, \tau)\, d\tau, \qquad F_i(t) = \frac{1 - \nu_i^2(t)}{E_i(t)} \tag{1.2}$$

$$K_i(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}\{[1 - \nu_i^{*2}(t, \tau)]\, \delta_i(t, \tau)\},\ \overline{K}(x, s) = \ln\frac{1}{|x - s|} \tag{1.3}$$

Здесь $E_i(t)$ — модуль упруго-мгновенных деформаций, $\delta_i(t, \tau)$ — полная относительная деформация, а $\nu_i(t)$ и $\nu_i^*(t, \tau)$ — коэффициенты поперечного расширения, соответственно, при упругих деформациях и деформациях ползучести i-го полупространства [1].

Пусть два соприкасающихся между собой в точке или по линии тела (фигура), обладающих свойством линейной ползучести, прижимаются один к другому под действием внешних сил, равнодействующая которых $P(t)$ перпендикулярна к оси x и проходит через начало координат. Соотношение, которому должны удовлетворять

---

[1] Полная относительная деформация $\delta(t, \tau)$, наблюдаемая в момент времени t и вызванная единичным напряжением, приложенным в некотором возрасте материала τ, складывается из упруго-мгновенной деформации и деформации ползучести и определяется зависимостью

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)$$

где $E(\tau)$ — переменный модуль мгновенной деформации, а $C(t, \tau)$ — мера ползучести материала, зависящая от возраста материала и от продолжительности действия нагрузки. Под мерой ползучести понимается относительная деформация ползучести стареющего материала, наблюдаемая к моменту времени t и вызванная единичным напряжением, приложенным в некотором возрасте τ.

перемещения точек области контакта этих тел, как известно, имеют вид

$$v_1^*(t) + v_2^*(t) = \Delta^*(t) - f_1(x) - f_2(x), \qquad \Delta^*(t) = \Delta^*_1(t) + \Delta_2^*(t) \tag{1.4}$$

Здесь $\Delta^*(t)$ — сближение этих тел в направлении оси y, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — уравнения поверхностей, ограничивающих первое и второе тела.

Если полагать, что трение и сцепление между сжимаемыми телами отсутствуют, то тогда на участке контакта каждое из этих тел будет испытывать только нормальное давление $p^*(x, t)$. Но обычно область контакта бывает мала по сравнению с размерами сжимаемых тел, поэтому можно считать, что перемещения на участке контакта сжимаемых тел будут такими же, как у граничных точек двух полуплоскостей (верхней и нижней), находящихся под действием того же нормального давления $p^*(x, t)$, что и рассматриваемые сжимаемые тела.

Пользуясь формулой (1.1) и соотношением (1.4), И. Е. Прокопович для определения контактного давления $p^*(x, t)$ получил следующее интегральное уравнение:

$$\int_S \overline{K}(x, s)\, p^*(s, t)\, ds - \int_{\tau_1}^{t} \int_S \overline{K}(x, s)\, p^*(s, \tau)\, K(t, \tau)\, ds\, d\tau = F(x, t) \tag{1.5}$$

$$K(t, \tau) = \frac{K_1(t, \tau) + K_2(t, \tau)}{F_1(t) + F_2(t)}, \qquad F(x, t) = \overline{C}(t) - \frac{f_0(x)}{\theta(t)}$$
$$f_0(x) = f_1(x) + f_2(x), \qquad \theta(t) = A\,[F_1(t) + F_2(t)] \tag{1.6}$$

где A — известная величина, зависящая от параметров материала, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — уравнения контактных поверхностей первого и второго тел, $C(t)$ — функция, связанная с суммарным неупругим перемещением $\Delta^*(t)$.

Интегральное уравнение (1.5) позволяет разыскать интенсивность контактного давления $p^*(x, t)$ в зависимости от положения точки по ширине контакта и продолжительности действия нагрузки. Это уравнение можно представить в более компактной форме

$$\omega(x, t) - \int_{\tau_1}^{t} K(t, \tau)\, \omega(x, \tau)\, d\tau = F(x, t), \qquad \omega(x, t) = \int_S \overline{K}(x, s)\, p^*(x, t)\, ds \tag{1.7}$$

что позволяет задачу определения неизвестного контактного давления $p^*(x, t)$ свести к последовательному решению связанных между собой интегральных уравнений (1.7).

Первое из этих уравнений, которому должна удовлетворять $\omega(x, t)$, как функция времени t, учитывает влияние ползучести материала на распределение контактных давлений $p^*(x, t)$, и представляет собой линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, которое для различных случаев ядер ползучести $K(t, \tau)$ подробно исследовано в работах [1,2,28,33]. Если принять предположение

$$\nu(\tau) = \nu^*(\tau) = \nu = \text{const} \tag{1.8}$$

то это уравнение принимает вид, аналогичный уравнению, описывающему напряженное состояние системы, составленной из двух неоднородных элементов, при наличии вынужденных деформаций [28]. Если два контактирующих тела обладают одинаковыми модулями упругости и одинаковыми мерами ползучести, то при условии (1.8) первое из уравнений (1.7) аналогично уравнению, описывающему релаксацию напряжений в однородном и изотропном теле [2,28].

Второе интегральное уравнение (1.7), которому должна удовлетворять $p^*(x, t)$, как функция x, представляет собой сингулярное интегральное уравнение Фредгольма первого рода с ядром $\overline{K}(x, s)$ (определенным (1.3)) и с правой частью $\omega(x, t)$, являющейся решением первого интегрального уравнения Вольтерра (1.7).

Если решение первого интегрального уравнения (1.7) представить в форме

$$\omega(x, t) = \gamma(t) - H(t)\, f_0(x) \tag{1.9}$$

и далее, пользуясь методом М. Г. Крейна [19], решить второе интегральное уравнение (1.7) с правой частью (1.9), учитывая при этом условия (1.8), то для определения $p^*(x, t)$ в случае симметричной задачи о контакте двух тел в условиях линейной ползучести и с учетом старения материала получается следующая формула:

$$p^*(x, t) = \frac{\gamma(t)}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} + H(t)\frac{2}{\pi^2}\int_x^a \frac{u\,du}{\sqrt{u^2 - x^2}}\int_0^u \frac{f_0''(s)}{\sqrt{u^2 - s^2}}\,ds \qquad (1.10)$$

Заметим, что функция $H(t)$, которая является решением первого интегрального уравнения (1.7) при правой части, равной $1/\theta(t)$, учитывает влияние упруго-мгновенных деформаций и деформаций ползучести сжимаемых тел с учетом старения материала на контактное давление $p^*(x, t)$ в рассматриваемом периоде времени.

В формуле (1.10) первый член представляет решение с особенностями в точках $x = \pm a$ и подлежит сохранению только в случае заданной ширины контакта $2a$; при этом неизвестная функция $\gamma(t)$ определяется из уравнения равновесия

$$P(t) = \int_{-a}^{a} p^*(x, t)\,dx \qquad (1.11)$$

Когда же ширина контакта $2a = 2a(t)$ не задана, т. е. контакт между сжимаемыми телами происходит по плавным поверхностям, то тогда неизвестная функция $\gamma = \gamma(t)$ определяется из требования, чтобы в формуле (1.10) первый член, представляющий решение с особенностью, исчез, т. е. $\gamma(t) = 0$, а переменная во времени ширина контакта $2a = 2a(t)$ определяется из уравнения равновесия (1.11).

Для случая контакта по некоторым поверхностям частного вида получены простые расчетные формулы. Например, при контакте по цилиндрической поверхности $f_0(x) = {}^1/_2\, x / R$, когда ширина контакта не задана,

$$p^*(x, t) = \frac{H(t)}{\pi R}\left(\frac{2RP(t)}{H(t)} - x^2\right)^{1/2} \qquad (1.12)$$

Аналогичным путем в работе [26] приводятся формулы для определения $p^*(x, t)$ в случае кососимметричной задачи о контакте двух тел в условиях линейной ползучести с учетом старения материала.

В дальнейшем в работе [25] показано, что решение плоской контактной задачи линейной теории ползучести с учетом старения материала при двух симметрично расположенных участках контакта $(-a \leqslant x \leqslant -b,\ \ b \leqslant x \leqslant a)$ сводится к решению интегральных уравнений (1.7), причем второе из этих уравнений (1.7) имеет ядро

$$\overline{K}(x, s) = \ln\frac{1}{x^2 - s^2} \qquad (1.13)$$

Решение построено при помощи замены переменных и введения новой функции $q(\zeta, t)$, связанной с давлением $p^*(x, t)$ и определяемой по формуле, аналогичной (1.10).

Т. Ширинкулов [37] установил, что плоская контактная задача линейной теории ползучести с учетом старения материала для тел, модуль упругости которых возрастает с глубиной по степенному закону, тоже может быть сведена к решению двух интегральных уравнений типа (1.7).

В другой работе того же автора [36] на основе наследственной теории старения приводится решение плоской контактной задачи линейной теории ползучести с учетом сил трения, когда коэффициенты поперечного расширения сжимаемых тел равны и постоянны во времени.

В работе [35] рассмотрено равновесие двух сжимаемых ортотропных тел при плоской деформации в условиях линейной ползучести с учетом старения материала.

Значительно бо́льшие трудности пришлось преодолеть при рассмотрении контактной задачи с учетом нелинейной ползучести материала. Это связано с тем, что построению решения должны были предшествовать: рассмотрение задачи о равновесии полуплоскости (полупространства), нагруженной приложенной к ее границе сосредоточенной силы $P(t)$, и вывод формул для определения перемещений этой границы при действии распределенного давления $p^*(x, t)$.

Плоская контактная задача нелинейной теории ползучести рассматривалась в работе [4]. Основная зависимость между интенсивностью деформаций $\varepsilon(t)$ и интенсивностью напряжений $\sigma(t)$ принята, согласно теории пластической наследственности с учетом старения материала [2,30], в виде

$$K_0\varepsilon^{\mu}(t) = \sigma(t) - \int_{\tau_1}^{t} \sigma(\tau) K(t, \tau)\, d\tau \tag{1.14}$$

$$\left(K(t, \tau) = \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}, \ K_0 > 0, \ 0 < \mu < 1\right)$$

Здесь $C(t, \tau)$ — мера ползучести, а K_0 и μ — физические константы материала. Материал предполагается несжимаемым.

Тогда при действии сосредоточенной силы $P(t)$ для определения вертикального перемещения $v^*(t)$ границы полуплоскости (или полупространства в случае плоской деформации), с учетом нелинейной ползучести и старения материала, получим следующую формулу [4]:

$$v^*(t) = A\,[(1 - L)\,P(t)]^{m}\,|s - x|^{1-m} + D(t), \qquad \left(A = \frac{J}{K_0^{m}}, \ m = \frac{1}{\mu}\right) \tag{1.15}$$

Здесь x — текущая абсцисса точки границы полуплоскости, для которой определяется перемещение $v^*(t)$; L — оператор Вольтерра с ядром ползучести (1.2) или (1.14); s — абсцисса точки приложения силы $P(t)$; J — известная постоянная, зависящая от μ.

Далее в работе [4] показано, что если разбить эпюру давления $p^*(x, t)$, действующую на участке контакта S $(a \leqslant x \leqslant b)$, на элементарные полоски шириной Δs_j и высотой $p^*(s_j, t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и рассмотреть действие одной из этих полосок (например, j-й с абсциссой $x = s_j$) на нижнюю полуплоскость, то граничная точка этой полуплоскости с произвольной абсциссой x получит в направлении оси y перемещение $v^*(t)$, которое определится при помощи формул

$$\bar{v}(t) = [v^*(t) - D(t)]^{\mu}, \qquad \bar{v}(t) = h_j(t)\, p^*(s_j, t)\, \Delta s_j, \tag{1.16}$$

$$h_j(t) = A^{\mu}\,|s_j - x|^{\mu-1}(1 - L) \tag{1.17}$$

В дальнейшем $\bar{v}(t)$ будем называть обобщенным перемещением точек границы полуплоскости. Здесь важно отметить, что обобщенное перемещение $\bar{v}(t)$, как это следует из соотношения (1.17), уже линейно зависит от действующей силы, что для истинных перемещений $v^*(t)$ не имеет места ни в одной точке тела.

Для одновременного действия на участке контакта S $(a \leqslant x \leqslant b)$ системы сил $P_j(t) = p^*(s_j, t)\,\Delta s_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ (n — число элементарных полосок шириной Δs_j на участке контакта) при помощи разложения в ряд Тэйлора доказана возможность представления обобщенного перемещения $\bar{v}(t)$ в виде

$$\bar{v}(t) = \sum_{j=1}^{n} h_j(t)\, p^*(s, t)\, \Delta s_j + \sum_{j,\, l=1}^{n}{}' C_{jk}(t)\, p^*(s_j, t)\, p^*(s_k, t)\, p^*(s_j, t)\, \Delta s_j \Delta s_k + \ldots \tag{1.18}$$

штрих у знака суммы означает, что члены $j = k$ опускаются.

Вследствие малости участка контакта S $(a \leqslant x \leqslant b)$ можно в выражении (1.18) для обобщенного перемещения $\bar{v}(t)$ с той степенью точности, которая принята при решении данной задачи, ограничиться первым главным членом разложения. Это позволяет после перехода к пределу $\Delta s_j \to 0$ получить для определения обобщенных перемещений границы i-й полуплоскости, вызванных давлением $p^*(x, t)$, действующем на участке контакта S $(a \leqslant x \leqslant b)$ следующую формулу:

$$\bar{v}(t) = A^{\mu}\left[(1-L)\int\limits_S \widetilde{K}(x, s)\, p^*(s, t)\, ds\right], \qquad \widetilde{K}(x, s) = \frac{1}{|s-x|^{1-\mu}} \tag{1.19}$$

Таким образом, формула (1.19) выражает и обосновывает принцип для приближенной суперпозиции обобщенных перемещений $\bar{v}(t)$, дающий возможность свести решение плоской контактной задачи нелинейной теории ползучести с учетом старения материала (или теории пластичности со степенным упрочнением) к совместному решению связанных между собой двух интегральных уравнений вида

$$\omega(x, t) - \int\limits_{\tau_1}^{t} \omega(x, \tau)\, K(t, \tau)\, d\tau = F(x, t), \qquad \int\limits_S \frac{p^*(s, t)\, ds}{|s-x|^{1-\mu}} = \omega(x, t) \tag{1.20}$$

$$F(x, t) = [\gamma(t) - f_0(x)]^{\mu}, \quad f_0(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{A_1 + A_2}, \qquad A_1 = \frac{J_1}{K_{01}{}^m}, \; A_2 = \frac{J_2}{K_{02}{}^m} \tag{1.21}$$

Здесь J_1, J_2, K_{01}, K_{02} — константы материалов первого и второго тела.

Таким образом, и при нелинейной постановке, основанной на физической зависимости (1.14), контактная задача наследственной теории ползучести сведена к последовательному решению двух связанных между собою интегральных уравнений (1.20). Решение первого уравнения (1.20) при различных ядрах $K(t, \tau)$ достаточно хорошо изучено в работах [1,2,26,30,33] и поэтому разыскание функции $\omega(x, t)$ не встречает затруднений. Решение же сингулярного интегрального уравнения Фредгольма первого рода (1.20), когда областью контакта S между телами является отрезок $-a \leqslant x \leqslant a$, строится по методу М. Г. Крейна [18,19].

Для случая, например, симметричной задачи о контакте двух тел, находящихся в условиях нелинейной ползучести, получена формула

$$p^*(x, t) = K(\mu)\left\{\frac{a^{\mu}\Phi_1'(a, t, \gamma)}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} - \int\limits_x^a \frac{u^{\mu}\, du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}} \int\limits_0^u \frac{\omega''(s, t)\, ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}\right\} \tag{1.22}$$

$$K(\mu) = \frac{1}{2\pi^{3/2}}\,\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi\mu}{2}\right)^2, \qquad \Phi'(a, t, \gamma) = \frac{d}{da}\int\limits_0^a \frac{\omega(s, t)\, ds}{\sqrt{(a^2-s^2)^{\mu}}}$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

При заданной ширине контакта $2a$ неизвестная функция $\gamma = \gamma(t)$ подбирается так, чтобы выполнялось условие (1.11), которое равносильно уравнению

$$\Phi_1(a, t, \gamma) = \frac{\pi P}{\sin {}^1\!/_2\pi\mu} \tag{1.23}$$

Из этого же уравнения определяется величина $2a = 2a(t)$ при незаданной ширине контакта; при этом функция $\gamma(t)$ должна удовлетворять условию обращения в нуль первого члена в формуле (1.22), представляющего решения с особенностями, т. е. условию

$$\Phi_1'(a, t, \gamma) = 0 \tag{1.24}$$

Изучена и решена также кососимметричная плоская контактная задача с учетом нелинейной ползучести. Следует отметить, что случай произвольного нагружения сжимаемых тел не может быть получен путем наложения указанных выше двух случаев (симметричного и кососимметричного) и должен быть решен отдельно как самостоятельная задача [4].

Уравнение и формулы, полученные в работе [4] при $t = \tau_1$, представляют собой решение плоской контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала [5], а при $\mu = 1$ решение плоской контактной задачи теории упругости [38]. При $m = 0$, как это показано в работе [4], давление под жестким плоским штампом $p^*(x)$, полученное согласно формуле (1.22), совпадает с законом распределения, соответствующего известному решению Прандтля [16].

На основании решения [4] М. М. Манукян [24] изучил задачу о вдавливании жесткого клина в полуплоскость в условиях неустановившейся ползучести. Рассмотрены случаи заданной и незаданной ширины контакта и выведены формулы для определения $\gamma(t)$ и $a(t)$.

Плоская контактная задача нелинейной теории ползучести при наличии сил трения в условиях установившейся ползучести рассмотрена в работе [7]. Зависимости между интенсивностью скоростей деформаций ε и интенсивностью напряжений σ приняты в виде

$$K_0\varepsilon^{\mu} = \sigma \qquad (0 < \mu < 1) \tag{1.25}$$

Здесь K_0 и μ — константы материала.

Если положить, что одно из тел неподвижно и на участке контакта соприкасающихся тел действует нормальное давление $p(x)$ и кулоново трение $q(x) = kp(x)$ и воспользоваться принципом суперпозиции для обобщенных перемещений, то решение задачи нелинейной теории ползучести с учетом сил трения сводится к решению сингулярного интегрального уравнения Фредгольма первого рода следующего вида:

$$\int_{-a}^{a} \frac{[a_2 - \operatorname{sign}(s-x)\, a_1]^{\mu}\, p(s)\, ds}{|s-x|^{1-\mu}} = F(x), \qquad F(x) = [\gamma - f_0(x)]^{\mu}, \quad f_0(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2g_1} \tag{1.26}$$

Здесь a_1, a_2, g_1 — постоянные, определяемые через физические константы материала K_0, μ и коэффициента трения k.

Структура ядра этого интегрального уравнения вызвала необходимость в специальной разработке способа для получения его решения. Для случая вдавливания жесткого штампа с прямолинейным основанием в полуплоскость, т. е. когда правая часть сингулярного интегрального уравнения (1.26) является постоянной, удалось получить точное решение этого интегрального уравнения в замкнутом виде [7]. При помощи этого решения для определения контактного давления $p(x)$ была получена формула

$$p(x) = \frac{\Gamma(^1/_2(3-\mu))\,\Gamma(^1/_2\mu)\,\Gamma(\mu-\rho)\sin\pi(\mu-\rho)}{2a^{1-\mu}\,\Gamma(1-\rho)\sqrt{\pi}}\; \frac{P}{\pi\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{^1/_2\mu-\rho}$$

содержащая постоянную ρ, которая определяется через параметры a_1, a_2 и μ.

Решение контактной задачи с учетом сил трения развито М. М. Манукяном [24a] на случай неустановившейся ползучести, описываемой зависимостью (1.14).

2. Пространственная контактная задача теории ползучести. Пространственная контактная задача теории ползучести в линейной постановке изучалась Н. Ф. Какосимиди и И. Е. Прокоповичем [14]. При выполнении условий (1.8) для определения вертикальных перемещений границы i-го полупространства получена формула

$$v_i^*(t) = A_i\,[F_i(t) - L_i] \iint_{(S)} \overline{K}(s,\eta)\, p^*(s,\eta,t)\, ds\, d\eta \tag{2.1}$$

$$\left(A_i = \frac{1-\nu_i^2}{\pi}, \quad F_i(t) = \frac{1}{E_i(t)}, \quad \overline{K}(s,\eta) = \frac{1}{\sqrt{(x^2-s^2)+(y^2-\eta^2)^2}}\right)$$

Здесь оператор L_i определяется соотношением (1.2).

Неизвестное контактное давление $p^*(x, y, t)$ определяется из интегрального уравнения

$$\iint\limits_{(S)} \overline{K}(s, \eta)\, p^*(s, \eta, t)\, ds\, d\eta - \int\limits_{\tau_1}^{t} \iint\limits_{(S)} \overline{K}(s, \eta)\, K(t, \tau)\, p^*(s, \eta, \tau)\, ds\, d\eta\, d\tau = F(x, y, t) \quad (2.2)$$

аналогичного уравнению (1.5) и допускающего представление в виде двух уравнений

$$\omega(x, y, t) - \int\limits_{\tau_1}^{t} \omega(x, y, \tau)\, K(t, \tau)\, d\tau = F(x, y, t), \quad (2.3)$$

$$\omega(x, y, t) = \iint\limits_{(S)} \overline{K}(s, \eta)\, p^*(s, \eta, t)\, ds\, d\eta$$

При этом $K(t, \tau)$ и $F(x, y, t)$ определяются формулами, аналогичными (1.6), учитывая, что $f_0 = f_0(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$.

Интегральные уравнения (2.3) и (1.7) совершенно идентичны. Второе уравнение (2.3) при фиксированном моменте времени t описывает упруго-мгновенную задачу.

Пространственная задача линейной теории ползучести с учетом старения материала рассматривалась также в работе М. Пределяну [39]; полученные результаты применялись, в частности, к решению задачи о контакте двух сферических тел, находящихся под действием постоянной сжимающей силы.

В работе А. Б. Ефимова [11] рассматривалась осесимметричная контактная задача для линейно вязко-упругих тел. Контактное давление автор выражает через интегральный оператор, воздействующий на некоторую функцию координат r и времени t, отображающую влияние нагружения и разгрузки. Установлено, что связь контактного давления с радиусом круга контакта при повторной разгрузке зависит не от полной истории процесса контакта, а от соответствующей «усеченной траектории» нагружения — разгрузки.

А. И. Кузнецов [21] на основе идей, развитых в работах [4,5], решил задачу о вдавливании жесткого штампа в полупространство, находящееся в условиях нелинейной ползучести, характеризующейся физическим уравнением, аналогичным (1.14), или при степенном упрочнении материала. Построению решения рассматриваемой задачи предшествовали: рассмотрение задачи о равновесии полупространства с учетом ползучести материала при действии сосредоточенной силы $P(t)$, вывод формул для определения перемещений границы этого полупространства, находящегося в условиях установившейся ползучести, при действии распределенного давления $p^*(x, y, t)$ и, наконец, решение задачи о вдавливании штампа в полупространство со степенным упрочнением материала.

Решение задачи о вдавливании жесткого штампа в полупространство при нелинейной ползучести материала основано на возможности представления вертикальных перемещений границ полупространства формулой вида

$$v^*(t) = A\left[(1 - L) \iint\limits_{(S)} \widetilde{K}(s, \eta)\, p^*(s, \eta, t)\, ds\, d\eta\right]^m, \quad m = \frac{1}{\mu} \quad (2.4)$$

которая получается, исходя из принципа суперпозиции для обобщенных перемещений. Здесь A — известная величина, зависящая от параметров материала K_0 и μ $(0 < \mu < 1)$, оператор L определяется согласно (1.2) и (1.3) или (1.14), а ядро

$$\widetilde{K}(s, \eta) = \frac{1}{[\sqrt{(x - s)^2 + (y - \eta)^2}]^{2-\mu}} \quad (2.5)$$

Эта формула позволила свести задачу определения неизвестного контактного давления $p^*(x, y, t)$ к решению двух интегральных уравнений типа (2.3). При этом ядра $K(t, \tau)$ и $\tilde{K}(s, \eta)$ принимаются согласно (1.3) (1.14) и (2.5), а $F(x, y, t)$ — по (1.21) с учетом того, что

$$f_0(x, y) = \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{A}$$

а $\gamma(t)$ в общем случае имеет вид $\gamma(t) = \Delta^*(t) + \alpha(t)x + \beta(t)y$; для определения неизвестных функций $\Delta^*(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ используются три условия равновесия штампа.

В работе [21] рассмотрен случай штампа с плоским эллиптическим основанием и случай осесимметричного штампа.

Все полученные в указанных выше работах решения задач о контакте двух тел, находящихся в условиях неустановившейся ползучести, относятся к случаям, когда определение контактного давления $p^*(x, t)$ сводится к последовательному решению двух связанных между собой интегральных уравнений типа (1.20) или (2.3).

Решения контактных задач теории неустановившейся ползучести, естественно, оказалось возможным получить из такого рода системы уравнений только благодаря определенным предположениям о физической зависимости между напряжениями и деформациями, положенными в основу наследственной теории ползучести.

Характерным является то, что, согласно полученным выше решениям, ползучесть материала контактирующих тел не влияет на закон распределения контактных напряжений во времени, если контакт между этими телами происходит по линии или по плоскости, как, например, при вдавливании жестких штампов в полуплоскость или в полупространство, находящихся в условиях неустановившейся ползучести.

Ползучесть материала контактирующих тел влияет на распределение давления только в случае, когда контакт между этими телами происходит по криволинейным поверхностям, причем при незаданной ширине контакта существенно изменяется во времени площадь контакта под длительным действием нагрузки.

3. Учет ползучести оснований при решении различных контактных задач. Вопросы расчета балок на упругом основании, обладающем ползучестью, рассмотрены в работах А. Р. Ржаницына [31], М. И. Розовского [34], И. И. Гольденблата и Н. А. Николаенко [8], И. Е. Прокоповича [28].

В этих работах приводится решение задач расчета балок, лежащих на сплошном основании в случаях, когда материалы балок и оснований соответствуют реологической модели упруго-вязкого тела Кельвина или подчиняются законам линейной теории упругой наследственности.

М. И. Розовский [32] дал решение задачи о деформации фундаментной балки с учетом ползучести основания, когда последнее подчиняется винклеровской гипотезе коэффициента постели.

В работе И. И. Кийсс [17] приводится расчет железобетонных балок с учетом ползучести бетона и основания, исходя из условия равенства кривизны балки и поверхности основания. Для решения исходного уравнения И. И. Кийсс пользовался приближенными методами. В качестве приложения им рассмотрена задача, в которой основание является слоистым. При решении задач старение материалов балки и основания не учитывалось.

Своеобразной контактной задачей является задача о термонапряженном состоянии массивного бетонного блока, лежащего на основании из скалы или ранее уложенного бетона. Соответствующее решение плоской задачи изложено в работе [3]; авторы предполагали, что между основанием и блоком расположен упругий слой. В дальнейшем это решение было развито М. М. Манукяном и М. А. Задояном и применено к круглым [23] и прямоугольным блокам [12] с учетом ползучести бетона. И. Е. Прокопович предложил приближенный способ расчета бетонных блоков с учетом их упругих свойств и ползучести основания. Соответствующее решение позволило выявить особенности влияния соотношений геометрических размеров блоков на его термонапряженное состояние [27] и послужило основой для создания практического способа расчета [29].

Этот способ позволяет учесть: изменение температурного и влажностного режима, геометрические размеры блока, конструкцию основания, изменение модуля упруго-мгновенных деформаций и релаксацию напряжений вследствие ползучести бетона. В последнее время изучено термонапряженное состояние системы двух массивных блоков [20].

На основе идей работы И. Е. Прокоповича [26] Н. Ф. Какосимиди [13], применив наследственную теорию старения, разработал приближенный способ расчета фундаментной полосы и круглой плиты [15], лежащих на упруго-ползучем основании. Для описания механических свойств оснований автор использовал модель упруго-ползучего полупространства, находящегося в условиях плоской деформации. Задача свелась к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Учет ползучести основания при расчете фундаментных полос (а также балок) приводит к возрастанию расчетных усилий, заметному перераспределению контактных давлений и возрастанию изгибающих моментов.

Ж. С. Ержанов [9] рассмотрел на основе наследственной теории ползучести Ю. Н. Работнова несколько задач, посвященных исследованию напряженно-деформированного состояния подземных сооружений с учетом ползучести горной породы. Он исследовал напряженно-деформированное состояние горного массива вокруг закрепленной и незакрепленной шахтной и горизонтальной выработок с учетом ползучести горной породы.

Ж. С. Ержанов и А. К. Егоров [10] исследовали механизм зарождения складчатой структуры в земной коре при тектонических процессах, исходя из модели релаксирующего упруго-вязкого тела, представленного вольтерровскими уравнениями.

Используя общие принципы термодинамики, Л. С. Лапидус [22], при некоторых допущениях, получил для горной породы наследственную функцию влияния, совпадающую по виду с функцией Кольрауша — Бронского и хорошо согласующуюся с экспериментом.

Поступила 5 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Александровский С. В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на температурные и влажностные воздействия с учетом ползучести. М., Стройиздат, 1966.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
3. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. О температурных напряжениях в прямоугольных бетонных блоках. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. н., 1955, т. 8, № 4.
4. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести, ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
5. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем. н., 1959, вып. 2.
6. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. О вдавливании жесткого клина в полуплоскость в условиях установившейся ползучести. ПММ, т. 26, вып. 1.
7. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
8. Гольденблат И. И., Николаенко Н. А. Теория ползучести строительных материалов и ее приложения. М., Госстройиздат, 1960.
9. Ержанов Ж. С. Теория ползучести горных пород и ее приложения. Алма-Ата, «Наука», 1964.
10. Ержанов Ж. С., Егоров А. К. Теоретическое рассмотрение механизма зарождения складчатой структуры в земной коре. В сб. «Исследования по механике горных пород». Алма-Ата, «Наука», 1965.
11. Ефимов А. Б. Осесимметричная контактная задача для линейновязкоупругих тел. Вестн. Моск. ун-та, сер. матем., механ., 1966, № 2.
12. Задоян М. А. Термонапряженное состояние бетонных блоков с учетом ползучести материала. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем. н., 1957, т. 10, № 5.
13. Какосимиди Н. Ф. Расчет фундаментной полосы с учетом ползучести основания. Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-матем. н., 1960, т. 13, № 6.

14. Какосимиди Н. Ф., Прокопович И. Е. Решение контактной задачи теории ползучести при линейной зависимости между напряжениями и деформациями. ПМТФ, 1962, № 1.
15. Какосимиди Н. Ф. Определение реактивных давлений под круглой плитой на сплошном основании, обладающим ползучестью. Основания, фундаменты и механика грунтов, 1965, № 5.
16. Качанов Л. М. Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
17. Кийсс И. И. К расчету фундаментных балок с учетом ползучести бетона и основания. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1949, № 139.
18. Крейн М. Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. Докл. АН СССР, 1954, т. 94, № 6.
19. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3.
20. Крисальный В. В. Температурные напряжения в системе двух массивных бетонных блоков. Изв. АН АрмССР, механика, 1966, т. 19, № 6.
21. Кузнецов А. И. Вдавливание жестких штампов в полупространство при степенном упрочнении и при нелинейной ползучести материала. ПММ, 1962, т. 26, вып 3.
22. Лапидус Л. С. Применение принципов термодинамики необратимых процессов к исследованию ползучести горных пород. В сб. «Исследования по механике горных пород», Алма - Ата, «Наука», 1965.
23. Манукян М. М. Термонапряженное состояние в круглых бетонных блоках с учетом ползучести бетона. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. н., 1956, т. 9, № 1.
24. Манукян М. М. О вдавливании жесткого клина в полуплоскость в условиях неустановившейся ползучести. Докл. АН АрмССР, 1963, т. 37, № 2.
24а. Манукян М. М. Контактная задача теории неустановившейся ползучести с учетом сил трения. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. н., 1963, т. 16, № 6.
25. Манукян М. М. Решение плоской контактной задачи теории ползучести при наличии двух участков контакта. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. н., 1965, т. 18, № 5.
26. Прокопович И. Е. О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6.
27. Прокопович И. Е. Приближенный метод определения температурных напряжений в массивных прямоугольных бетонных блоках. Тр. координац. совещаний по гидротехн., М.— Л., Госэнергоиздат, 1962, вып. 4.
28. Прокопович И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. М., Госстройиздат, 1963.
29. Прокопович И. Е. Практический способ определения температурновлажностных напряжений в прямоугольных массивах бетонных блоках. Гидротехническое строительство, 1964, № 5.
30. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
31. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М., Гостехиздат, 1949.
32. Розовский М. И. Ползучесть и длительное разрушение материалов. Ж. техн. физ., 1951, т. 21, вып. 11.
33. Розовский М. И. О нелинейных уравнениях ползучести и релаксации материалов при сложном напряженном состоянии. Ж. техн. физ.,1955, т. 25, вып. 13.
34. Розовский М. И. Полусимволический способ решения некоторых задач теории ползучести. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. н., 1956, т. 9, вып. 5.
35. Симонян А. М. О плоской контактной задаче ортотропных тел с учетом ползучести. Изв. АН АрмССР, Механика, 1966, т. 19, № 4.
36. Ширинкулов Т. К решению плоской контактной задачи теории ползучести при наличии сил трения. Изв. АН УзССР, сер. техн. н., 1963, № 5.
37. Ширинкулов Т. К решению плоской контактной задачи для неоднородных по глубине тел с учетом ползучести. В сб.: «Вопросы механики», Ташкент, «Наука», 1964, вып. 2.
38. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
39. Predeleanu M. On spatial contact problem in the linear creep theory. Bull. Math., 1962, T. 6, No. 3—4, pp. 219—229.