3. В качестве примера рассмотрим функции нагружения такие, что функции $g_k = 0$ могут быть определены в виде

$$X + Y = 0, \qquad X - Y = 0 \tag{3.1}$$
$$X = e_x - \psi\tau_x, \qquad Y = e_y - \psi\tau_y, \qquad \psi = \psi(\tau_x^2 + \tau_y^2)$$

Из (3.1) очевидно следуют соотношения деформационной теории

$$e_x = \psi\tau_x, \qquad e_y = \psi\tau_y \tag{3.2}$$

Пусть имеет место нагружение, при котором отличны от нуля лишь τ_x, e_x. Определим особенности функции нагружения вблизи точки $M(\tau_x, 0)$. Соотношения (3.1) в этом случае имеют вид

$$e_x - \psi(\tau_x + \tau_y) = 0, \qquad e_x - \psi(\tau_x - \tau_y) = 0, \qquad e_y = 0 \tag{3.3}$$

Дифференцируя (3.3), получим в точке M:

$$\frac{d\tau_y}{d\tau_x} = \pm\left(\frac{2\psi_0'}{\psi_0}\tau_x^2 + 1\right) \tag{3.4}$$

где штрих у функции ψ означает производную по ее аргументу $\tau_x^2 + \tau_y^2$, а нуль внизу означает, что значения соответствуют точке $M(\tau_x, 0)$.

Соотношение (3.4) определяет величину угла поверхности нагружения в точке $M(\tau_x, 0)$.

Поступила 11 III 1967

Московское Высшее техническое училище им. Баумана

ЛИТЕРАТУРА

1. Будянский Б. Переоценка деформационных теорий пластичности. Механика, Сб. перев. и обз. ин. период., 1960, № 2.
2. Клюшников В. Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория. ПММ, 1959, т. 23. вып. 4.
3. Работнов Ю. Н. Модель, иллюстрирующая некоторые свойства упрочняющегося пластического тела. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.
4. Быковцев Г. И., Дудукаленко В. В., Ивлев Д. Д. О функциях нагружения анизотропно упрочняющегося пластического материала. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
5. Hodge Ph. G. Piecewiege linear plasticity. IX Congr de Mech. Appl., Actes 1957.
6. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
7. Ильюшин А. А. Пластичность. М., Гостехиздат, 1948.

ВНУТРЕННИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СРЕДЕ С МИКРОСТРУКТУРОЙ

И. А. Кунин (Новосибирск)

Описанию среды с микроструктурой в рамках моментной теории упругости посвящено большое число работ (см., например, [1,2], где имеются также ссылки на другие работы). В [3–6] на основе теории кристаллической решетки была развита теория макроскопически однородной упругой среды с пространственной дисперсией, содержащая моментную теорию упругости как частный случай слабой дисперсии. Общий случай неоднородной упругой среды с нелокальным взаимодействием рассмотрен в [7].

В настоящей работе рассматривается теория внутренних напряжений в среде с микроструктурой, являющаяся обобщением континуальной теории дислокаций. Последняя, как известно [8–10], построена на основе модели упругого континуума и не учитывает дискретной структуры среды, являясь в этом смысле асимптотической теорией взаимодействия дефектов на больших расстояниях. Учет микроструктуры позволяет существенно расширить область применимости теории и сблизить ее с теорией дефектов кристаллической решетки. На важность подобного обобщения теории дислокаций, в частности, указано в работе [6]. Связь теории дислокаций с моментной теорией упругости и континуумом Коссера рассматривалась в [11–16], движение дислокаций в среде с пространственной дисперсией — в [17,18].

Пункт 1 работы посвящен общему рассмотрению статики внутренних напряжений в среде с микроструктурой. Состояние среды описывается внешней и внутренней дисторсиями, причем последняя определяется условием ортогональности по энергии тензору внешней дисторсии. Анализируется структура оператора упругих модулей внутренних напряжений. Показывается, что он, вообще говоря, отличается от оператора упругих модулей внешних напряжений на некоторый оператор, локализованный в области, где сосредоточены источники внутренних напряжений. В этой и только в этой области внутренние напряжения, в отличие от внешних, могут быть несимметричными. В континуальном приближении разница между операторами упругих модулей исчезает, и тензор напряжений всюду симметричен. Определяется тензор Грина для внутренних напряжений и устанавливается его связь с тензором Грина для внешних напряжений. Записываются выражения для упругой энергии и полей напряжений дислокаций и точечных дефектов через тензор Грина.

В пункте 2 строится явное выражение тензора Грина для внутренних напряжений в изотропной среде с пространственной дисперсией. Анализируется асимптотика тензора Грина и, в частности, определяется вклад в асимптотику, обусловленный нелинейной зависимостью дисперсионной кривой от волнового вектора.

1. При построении теории внутренних напряжений в среде с микроструктурой желательно, насколько это возможно, сохранить общую схему и терминологию континуальной теории дислокаций. Основным отличием модели упругой среды с микроструктурой от обычного упругого континуума является наличие элементарной единицы длины и сил дальнодействия, что обусловливает нелокальный характер теории. В соответствующем формализме это сказывается двояким образом. Во-первых, полевые переменные принадлежат к специальному классу целых аналитических функций с обрезанным фурье-спектром [3]. Во-вторых, упругие модули заменяются интегральными операторами, причем для макроскопически неоднородной среды ядра операторов не являются разностными.

Будем предполагать, что напряженное состояние среды в общем случае вызвано как действием внешних сил, так и наличием источников внутренних напряжений. Последними могут являться, например, инородные атомы и вакансии, дислокации, границы зерен и т. п. В этом случае переменной поля, однозначно определяющей состояние среды, естественно считать упругую дисторсию $\chi_{\alpha\beta}$, аналогично тому, как это принято в континуальной теории дислокаций [8]. При этом внутренние степени свободы (микровращение и микродеформации) в явном виде в рассмотрение не вводятся. Это обосновано тем, что, как показано в [4,5], в акустической области частот, а следовательно, и в случае статики, уравнения сложной структуры можно преобразовать к эквивалентной простой структуре, исключив из них внутренние степени свободы. Ограничиваясь случаем гармонического приближения, запишем наиболее общее выражение для упругой энергии Φ неограниченной среды с микроструктурой в виде

$$2\Phi = \int\int \chi_{\alpha\beta}(x)\, S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x, x')\, \chi_{\lambda\mu}(x')\, dx dx' =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int \overline{\chi_{\alpha\beta}(k)}\, S^{\alpha\beta\lambda\mu}(k, k')\, \chi_{\lambda\mu}(k')\, dk dk' \qquad (1.1)$$

Здесь x — точка среды, $\chi_{\alpha\beta}(k)$ — фурье-образ $\chi_{\alpha\beta}(x)$. Из предположения о существовании элементарной единицы длины a в x-пространстве следует, что носитель $\chi_{\alpha\beta}(k)$ содержится в некоторой ограниченной области k-пространства с характерным размером порядка a^{-1}. Тензор $S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x, x')$ является ядром оператора энергии, а $S^{\alpha\beta\lambda\mu}(k,k')$ — его фурье-образ по x и фурье-прообраз по x'. Наконец, черта обозначает комплексное сопряжение.

Выражения типа (1.1) в дальнейшем будем записывать в компактной форме:

$$2\Phi = \langle \chi_{\alpha\beta} \,|\, S^{\alpha\beta\lambda\mu} \,|\, \chi_{\lambda\mu} \rangle \qquad (1.2)$$

Очевидно, оператор S эрмитов, т. е.

$$S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x, x') = S^{\lambda\mu\alpha\beta}(x', x), \qquad S^{\alpha\beta\lambda\mu}(k, k') = \overline{S^{\lambda\mu\alpha\beta}(k', k)} \tag{1.3}$$

и естественно также считать его положительно определенным.

Из требования инвариантности энергии относительно жесткого вращения среды аналогично [3,7] находим

$$\langle a_{\alpha\beta} \mid S^{\alpha\beta\lambda\mu} \mid \chi_{\lambda\mu}\rangle = 0 \tag{1.4}$$

для произвольного постоянного (в x-пространстве) антисимметричного тензора $a_{\alpha\beta}$. Из произвольности $\chi_{\lambda\mu}$ отсюда следует условие на $S(k, k')$

$$S^{[\alpha\beta]\lambda\mu}(0, k') = 0 \tag{1.5}$$

Оператор энергии S определяет в пространстве функций скалярное произведение, превращая его в гильбертово пространство. Последнее может быть разложено в ортогональную сумму пространств внешних и внутренних дисторсий, а полная энергия представлена в виде суммы внешней и внутренней энергий.

Внешняя дисторсия $\zeta_{\alpha\beta}'$ определяется как градиент смещения u_β, вызванного внешними силами

$$\zeta_{\alpha\beta}'(x) = \partial_\alpha u_\beta(x), \qquad \operatorname{rot}^{\lambda\alpha}\zeta_{\alpha\beta}'(x) = 0 \tag{1.6}$$

Будем в дальнейшем предполагать, что на бесконечности среда является макроскопически однородной. В этом случае, как показано в [7], наиболее общее выражение для внешней энергии можно записать следующим образом:

$$2\Phi = \langle \zeta_{\alpha\beta}' \mid S^{\alpha\beta\lambda\mu} \mid \zeta_{\lambda\mu}'\rangle = \langle \varepsilon_{\alpha\beta}' \mid C^{\alpha\beta\lambda\mu} \mid \varepsilon_{\lambda\mu}'\rangle \tag{1.7}$$

Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta}' = \zeta_{(\alpha\beta)}'$ — тензор деформации, а эрмитов оператор $C^{\alpha\beta\lambda\mu}$ симметричен по индексам $\alpha\beta$ и $\lambda\mu$ и в силу принятого предположения представим в виде

$$C^{\alpha\beta\lambda\mu}(x, x') = C_0^{\alpha\beta\lambda\mu}(x - x') + C_1^{\alpha\beta\lambda\mu}(x, x') \tag{1.8}$$

где $C_1(x, x') = 0$ как при $x \to \infty$, так и при $x' \to \infty$. Для внешних напряжений $\sigma'^{\alpha\beta}$ имеем

$$\sigma'^{\alpha\beta}(x) = \int C^{\alpha\beta\lambda\mu}(x, x')\, \varepsilon_{\lambda\mu}'(x')\, dx', \qquad \partial_\alpha \sigma'^{\alpha\beta}(x) = -q^\beta(x) \tag{1.9}$$

Здесь первое соотношение является операторным законом Гука, а второе — уравнением равновесия, в правой части которого стоит плотность объемных сил $q^\beta(x)$.

Система уравнений (1.6), (1.9) и условия на бесконечности при положительном операторе C однозначно определяют u, ζ' и σ'. Иными словами, существует тензор Грина G, через который смещения записываются в виде

$$u_\alpha(x) = \int G_{\alpha\beta}(x, x')\, q^\beta(x')\, dx' \tag{1.10}$$

Представляя суммарную дисторсию χ в виде $\chi = \zeta' + \zeta$, где ζ — внутренняя дисторсия, потребуем по определению выполнения условия ортогональности

$$\langle \zeta_{\alpha\beta}' \mid S^{\alpha\beta\lambda\mu} \mid \zeta_{\lambda\mu}\rangle = 0 \tag{1.11}$$

Тогда для внутренней энергии имеем

$$2\Phi = \langle \zeta_{\alpha\beta} \mid S^{\alpha\beta\lambda\mu} \mid \zeta_{\lambda\mu}\rangle \tag{1.12}$$

Величина

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = \int S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x, x')\, \zeta_{\lambda\mu}(x')\, dx' \tag{1.13}$$

очевидно, имеет смысл тензора внутренних напряжений. Из (1.11) следует, что σ удовлетворяет уравнению

$$\partial_\alpha \sigma^{\alpha\beta}(x) = 0 \tag{1.14}$$

Правая часть уравнения

$$\operatorname{rot}^{\nu\lambda}\zeta_{\lambda\mu}(x) = \alpha^{\nu}_{.\mu}(x) \tag{1.15}$$

характеризует плотность источников внутренних напряжений. Если физическим источником внутренних напряжений являются дислокации, то α по определению можно отождествить с плотностью дислокаций, а в общем случае — с плотностью квазидислокаций по терминологии Кренера [8]. В дальнейшем предполагается, что источники внутренних напряжений сосредоточены в ограниченной области пространства.

Уравнения (1.13) — (1.15) образуют полную систему уравнений, определяющую ζ и σ при заданной плотности дислокаций α.

Рассмотрим структуру оператора S, предполагая, что дальнодействие имеет порядок элементарной единицы длины a. Представим S в виде

$$S^{\alpha\beta\lambda\mu} = C^{\alpha\beta\lambda\mu} + T^{\alpha\beta\lambda\mu} \tag{1.16}$$

Из физических соображений следует, что эрмитов оператор T при ограниченном дальнодействии должен быть локализован в области, где имеются источники внутренних напряжений. При этом T должен удовлетворять условиям, которые вытекают из (1.7) и (1.5)

$$\partial_\alpha \partial_\lambda' T^{\alpha\beta\lambda\mu}(x, x') = 0, \qquad T^{[\alpha\beta]\,\lambda\mu}(0, k') = 0 \tag{1.17}$$

Отсюда следует, что разложение целой аналитической функции $T(k, k')$ в ряд по k, k' начинается с членов вида

$$T^{\alpha\beta\lambda\mu}(k, k') = t^{\alpha\beta\lambda\mu\nu} k_\nu + t^{\lambda\mu\alpha\beta\nu} k_\nu' + \ldots \tag{1.18}$$

где $t^{\alpha\beta\lambda\mu\nu}$ — постоянный тензор, антисимметричный по индексам $\alpha\nu$ и симметричный по $\lambda\mu$. В изотропной среде и при наличии центральной симметрии разложение $T(k, k')$ начинается с членов второго порядка по k, k'.

Если $a \to 0$, т. е. осуществляется переход к модели обычного упругого континуума, то $T \to 0$ и S совпадает с C. В этом случае тензор внутренних напряжений симметричен. В общем случае $T \neq 0$, и тензор напряжений, вообще говоря, несимметричен, но лишь в области, где сосредоточены источники внутренних напряжений. В дальнейшем для простоты предполагается, что $S = C$. Случай $T \neq 0$ может быть рассмотрен аналогичным образом, но связан с некоторым дополнительным усложнением.

Наряду с плотностью дислокаций $\alpha(x)$ удобно, как это принято в континуальной теории дислокаций [8, 10], ввести две другие характеристики источников внутренних напряжений: несовместность $\eta(x)$ и плотность моментов дислокаций $m(x)$, определив их соотношениями

$$\eta^{\nu\rho}(x) = \mathrm{rot}^{(\rho\,|\,\mu\,|}\alpha^{\nu)}_{\cdot\mu}(x), \qquad \alpha^{\nu}_{\cdot\mu}(x) = \mathrm{rot}^{\nu\lambda} m_{\lambda\mu}(x) \tag{1.19}$$

Отметим, что плотность моментов дислокаций $m(x)$ определена неоднозначно [10]. Ее носитель, вообще говоря, шире носителя $\alpha(x)$ и содержит последний как подмножество. Так для замкнутой дислокационной петли носителем $\alpha(x)$ является линия дислокации, а носителем $m(x)$ — произвольная поверхность, опирающаяся на линию дислокации [1]. Из физических соображений очевидно, что истинной областью сосредоточенности источников внутренних напряжений следует считать носители $\alpha(x)$ или $\eta(x)$. В случае точечных дефектов носители $\alpha(x)$ и $m(x)$ совпадают. Но во всех случаях носители, будучи заданы в соответствующем классе функций, оказываются «размазанными» на величину порядка элементарной единицы длины a.

Связь между $\eta(x)$ и $m(x)$ согласно (1.19) дается соотношением

$$\eta^{\nu\rho}(x) = \mathrm{Rot}^{\nu\rho\lambda\mu} m_{\lambda\mu}(x) \tag{1.20}$$

где оператор Rot определяется выражением [2]

$$\mathrm{Rot}^{\nu\rho\lambda\mu} = (\varepsilon^{\nu\varkappa\lambda} \varepsilon^{\rho\tau\mu} \partial_\varkappa \partial_\tau)_{(\lambda\mu)} \tag{1.21}$$

Запишем решение системы (1.13) — (1.15) в виде

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = \int F^{\alpha\beta\lambda\mu}(x, x')\, m_{\lambda\mu}(x')\, dx' \tag{1.22}$$

---

[1] Если в магнитостатической аналогии сопоставить дислокации линейный ток, то плотности моментов дислокаций соответствует плотность магнитных моментов.

[2] Здесь для удобства записи операция симметрирования включена в определение Rot (см. также [8, 10]).

где $F^{\alpha\beta\lambda\mu}(x, x')$ — тензор Грина для внутренних напряжений, имеющий симметрию $C^{\alpha\beta\lambda\mu}(x, x')$.

Подстановка (1.22) в (1.13) — (1.15) дает уравнение для F, которое в прямых обозначениях в опрераторной форме гласит

$$\mathrm{Rot}\, C^{-1}F = \mathrm{Rot} \tag{1.23}$$

Применяя оператор div справа и учитывая эрмитовость F, находим, что $\mathrm{div}\, F = 0$. Отсюда следует представимость F в виде

$$F = \mathrm{Rot}\, H\, \mathrm{Rot} \tag{1.24}$$

где оператор H имеет симметрию F и, очевидно, определен неоднозначно. Эту неоднозначность целесообразно использовать, чтобы получить для H простейшее выражение.

Внутреннюю упругую энергию

$$2\Phi = \int \sigma^{\alpha\beta}(x)\, \varepsilon_{\alpha\beta}(x)\, dx \tag{1.25}$$

можно теперь записать в следующих трех формах:

$$2\Phi = \langle m | F | m \rangle = \langle \alpha \mid \mathrm{rot}\, H\, \mathrm{rot} | \alpha \rangle = \langle \eta \mid H \mid \eta \rangle \tag{1.26}$$

При этом удобство выбора той или иной формы определяется конкретным видом источников внутренних напряжений.

Пусть, например, задано распределение точечных дефектов

$$m_{\lambda\mu}(x) = v \sum_i M_{\lambda\mu}^{\;i}\, \delta(x - x_i) \tag{1.27}$$

где $v = a^3$ и M^i — безразмерный момент дефекта. В этом случае в качестве тензора Грина удобно использовать F. Непосредственно находим

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = v \sum_i M_{\lambda\mu}^{\;i} F^{\alpha\beta\lambda\mu}(x, x_i), \quad 2\Phi = v^2 \sum_{ij} M_{\alpha\beta}^{\;i} M_{\lambda\mu}^{\;j} F^{\alpha\beta\lambda\mu}(x_i, x_j) \tag{1.28}$$

Дислокации с контуром L и вектором Бюргерса b_μ соответствует плотность [10]

$$\alpha_{\cdot\mu}^{\nu}(x) = b_\mu \delta(L^\nu) \tag{1.29}$$

Для напряжений и энергии имеем (rot′ действует по аргументу x')

$$\begin{gathered}\sigma^{\alpha\beta}(x) = b_\mu\, \mathrm{Rot}^{\alpha\beta\tau\rho} \int\limits_L \mathrm{rot}'^{\mu\lambda} H_{\tau\rho\nu\lambda}(x, x_L')\, dL^\nu \\ 2\Phi = b_\beta b_\mu \int\limits_L \int\limits_{L'} \mathrm{rot}^{\beta\rho}\, \mathrm{rot}'^{\mu\lambda} H_{\tau\rho\nu\lambda}(x_L, x_L')\, dL^\tau dL'^\nu\end{gathered} \tag{1.30}$$

Интересно установить связь между тензорами Грина для внутренних и внешних напряжений. Для этого можно воспользоваться методом эквивалентных силовых диполей [10], сопоставляя плотности моментов дислокаций $m_{\lambda\mu}$ плотность моментов силовых диполей $q^{\alpha\beta}$

$$q^{\alpha\beta}(x) = -\int C^{\alpha\beta\lambda\mu}(x, x')\, m_{\lambda\mu}(x')\, dx' \tag{1.31}$$

Опуская выкладки, аналогичные приведенным в [10], запишем в операторной форме окончательный результат

$$F^{\alpha\beta\lambda\mu} = C^{\alpha\beta\lambda\mu} + C^{\alpha\beta\nu\rho}\, \nabla_\nu G_{\rho\tau} \nabla_\varkappa C^{\tau\varkappa\lambda\mu} \tag{1.32}$$

Таким образом, F можно построить, если известен G. Однако ниже будет показано, что в ряде случаев более удобно получить явные выражения для F и H прямым методом.

2. Рассмотрим макроскопически однородную изотропную среду с пространственной дисперсией. В этом случае $C(x, x') = C(x - x')$ и в k-представлении

$$C^{\alpha\beta\lambda\mu}(k, k') = C^{\alpha\beta\lambda\mu}(k)\,\delta(k - k') \tag{2.1}$$

Здесь $C(k)$ — фурье-образ $C(x)$. Для изотропной среды

$$C(k) = 2\mu(k)E + \lambda(k)I \tag{2.2}$$

$$E^{\alpha\beta\lambda\mu} = {}^1/_2(\delta^{\alpha\lambda}\delta^{\beta\mu} + \delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\lambda}), \qquad I^{\alpha\beta\lambda\mu} = \delta^{\alpha\beta}\delta^{\lambda\mu} \tag{2.3}$$

где $\lambda(k)$, $\mu(k)$ — заданные функции $k = |k_\alpha|$, причем k можно считать ограниченным сферой с дебаевским радиусом $\varkappa = \pi/a$.

Тензор $B(k)$, обратный $C(k)$, имеет вид

$$B(k) = \frac{1}{2\mu(k)}E - \frac{\lambda(k)}{2\mu(k)[3\lambda(k) + 2\mu(k)]}I \tag{2.4}$$

Оператору Грина F соответствует в данном случае разностное ядро $F(x - x')$ или в k-представлении — ядро $F(k, k') = F(k)\,\delta(k - k')$. Записывая (1.24) в k-представлении и заменяя C^{-1} на $B(k)$, получаем для $F(k)$ уравнение

$$R^{\alpha\beta\nu\rho}(k)\,B_{\nu\rho\varkappa\tau}(k)\,F^{\varkappa\tau\lambda\mu}(k) = R^{\alpha\beta\lambda\mu}(k) \tag{2.5}$$

где $R(k)$ — фурье-образ оператора Rot

$$R^{\alpha\beta\lambda\mu}(k) = -(\varepsilon^{\alpha\rho\lambda}\varepsilon^{\beta\tau\mu}k_\rho k_\tau)_{(\lambda\mu)} \tag{2.6}$$

Довольно громоздкие выкладки позволяют представить решение уравнения (2.5) в следующей форме:

$$F^{\alpha\beta\lambda\mu}(k) = R^{\alpha\beta\nu\rho}(k)\,H_{\nu\rho\varkappa\tau}(k)\,R^{\varkappa\tau\lambda\mu}(k) \tag{2.7}$$

$$H(k) = 2\frac{\mu(k)}{k^4}\left[E + \frac{\lambda(k)}{\lambda(k) + 2\mu(k)}I\right] \tag{2.8}$$

Для перехода в (2.7) к x-представлению необходимо задать явные выражения для функций $\mu(k)$ и $\lambda(k)$. Более наглядный физический смысл имеет функциональная зависимость от k продольной ω_l и поперечной ω_t частот свободных колебаний среды, связанных с λ, μ и плотностью ρ известными соотношениями

$$\rho\omega_l^2(k) = k^2[\lambda(k) + 2\mu(k)], \qquad \rho\omega_t^2(k) = k^2\mu(k) \tag{2.9}$$

Из общих соображений следует, что

$$\frac{d\omega_i(0)}{dk} = s_i, \qquad \frac{d\omega_i(\varkappa)}{dk} = 0 \tag{2.10}$$

где s_i — скорость звука при $k = 0$, $i = l, t$. Известны различные модельные аппроксимации для функций $\omega_i(k)$. Так, в модели Борна — Кармана [19] принято, что $\omega_i(k)$ имеют ту же зависимость от k, что и в теории линейной цепочки, а в дебаевской модели ω_i считаются линейными функциями k, что равносильно предположению $\lambda(k) = \lambda_0$, $\mu(k) = \mu_0$, где λ_0, μ_0 — обычные постоянные Ляме. В последнем случае второе из условий (2.10), конечно, не выполняется. В дальнейшем для $\omega_i^2(k)$ принимается простейшая полиномиальная аппроксимация с одним произвольным параметром γ_i:

$$\omega_i^2(k) = s_i^2k^2[1 - \gamma_i\varkappa^{-2}k^2 + {}^1/_3(2\gamma_i - 1)\varkappa^{-4}k^4] \tag{2.11}$$

которая удовлетворяет условиям (2.10). Параметр γ_i однозначно связан с граничным значением частоты $\omega_i(\varkappa)$

$$\frac{\omega_i^2(\varkappa)}{s_i^2\varkappa^2} = \frac{2 - \gamma_i}{3} \tag{2.12}$$

Отметим, что при значении $\gamma_i = 0.8$ выражение (2.11) практически соответствует модели Борна — Кармана.

Если сделать естественное предположение, что граничная частота меньше дебаевской, то на γ_i накладывается условие $-1 < \gamma_i < 2$.

Примем, наконец, что $\gamma_l = \gamma_t = \gamma$. Это равносильно предположению о независимости коэффициента Пуассона ν от k. Тогда сравнение (2.11) с (2.9) дает

$$\mu(k) = \mu_0 [1 - \gamma\varkappa^{-2}k^2 + {}^1/_3 (2\gamma - 1)\varkappa^{-4}k^4] \tag{2.13}$$

а выражение (2.8) принимает вид

$$H(k) = 2k^{-4}\mu(k)\left(E + \frac{\nu}{1-\nu} I\right) \tag{2.14}$$

Для получения $H(x)$ требуется найти обратное преобразование Фурье для функции $h(k) = k^{-4}\mu(k)$ при условии $k \leqslant \varkappa$. Вычисления дают

$$h(r) = \mu(\Delta) f(r), \qquad r = |x| \tag{2.15}$$

$$f(r) = -\frac{1}{4\pi^2\varkappa}\left(\varkappa r \operatorname{Si} \varkappa r + \frac{\sin \varkappa r}{\varkappa r} + \cos \varkappa r\right) \tag{2.16}$$

$$\mu(\Delta) = \mu_0 [1 + \gamma\varkappa^{-2}\Delta + {}^1/_3 (2\gamma - 1)\varkappa^{-4}\Delta^2] \tag{2.17}$$

Для дебаевской модели $\mu(\Delta) = \mu_0$. Отметим также формулы

$$g(r) = \Delta f(r) = -\frac{1}{2\pi^2 r} \operatorname{Si} \varkappa r \tag{2.18}$$

$$\delta(x) = \Delta^2 f(r) = \frac{\varkappa}{2\pi^2 r^2}\left(\frac{\sin \varkappa r}{\varkappa r} - \cos \varkappa r\right) \tag{2.19}$$

где $\delta(x)$ играет роль трехмерной δ-функции, а $g(r)$ -функции Грина оператора Лапласа в пространстве функций с фурье-спектром, обрезанным дебаевским радиусом $\varkappa$.

Для $H(x)$ теперь имеем

$$H(x) = 2\left(E + \frac{\nu}{1-\nu} I\right) h(r) \tag{2.20}$$

Подстановка в (1.24) дает явное выражение для $F(x)$. Последнее можно также преобразовать к виду

$$F(x) = \frac{2}{1-\nu} \operatorname{Rot}\operatorname{Rot} \mu(\Delta) f(r) + \frac{2\nu}{1-\nu} \operatorname{Rot} \mu(\Delta) g(r) \tag{2.21}$$

Важно подчеркнуть, что тензоры Грина F и H являются целыми аналитическими функциями и, следовательно, не имеют особенности при $x = 0$. Это позволяет записать выражения для F и H в виде хорошо сходящихся рядов. Из (2.15) — (2.17) для $h(r)$ имеем

$$h(r) = \frac{\mu_0}{6\pi^2\varkappa} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [2(2n+1)(2n+5) - \gamma(2n-1)(2n+7)]}{(4n^2-1)(2n+3)(2n+1)!} (\varkappa r)^{2n} \tag{2.22}$$

Используя разложение для $h(r)$, легко, в частности, найти значение $F(x)$ при $x = 0$, через которое согласно (1.28) выражается собственная энергия точечного дефекта

$$F(0) = \frac{\beta\mu_0\varkappa^3}{45\pi^2(1-\nu)} [(7 - 5\nu) E + (1 + 5\nu) I] \tag{2.23}$$

где множитель $\beta \sim 1$ зависит от вида функции $\omega(k)$ и в конечном счете определяется коэффициентом при r^4 в разложении $h(r)$. Для дебаевской модели и аппроксимации (2.11) соответственно имеем

$$\beta = 1, \qquad \beta = \frac{30 - 11\gamma}{35} \tag{2.24}$$

Особый интерес представляет асимптотика тензора Грина при больших r или, что то же, при $a \to 0$. Нетрудно показать, что вклад в асимптотику дают лишь первые два члена разложения в (2.11) или (2.13). Члены более высокого порядка дают быстро затухающие осцилляции с периодом порядка a и должны быть отброшены в асимптотическом разложении. Асимптотика F определяется асимптотикой $h(r)$. Последняя имеет вид

$$h(r) \approx -\frac{\mu_0 r}{16\pi}\left(1 + \frac{2\gamma}{\varkappa^2 r^2}\right) \tag{2.25}$$

Подстановка в (1.24) дает для F

$$F(x) \approx \frac{\mu_0}{r^3} f_1(n) + \frac{\mu_0 \gamma a^2}{r^5} f_2(n) \tag{2.26}$$

где f_1, f_2 — безразмерные тензорные функции единичного вектора $n^\alpha = x^\alpha / r$ и коэффициента Пуассона ν. Для дебаевской модели второй член в (2.26) отсутствует и асимптотика совпадает с тензором Грина для упругого континуума. В общем случае второй член в (2.26) учитывает отклонение $\omega(k)$ от линейного закона и несет в себе информацию о наличии в среде микроструктуры.

В заключение рассмотрим в качестве простого примера точечный дефект типа чистой дилатации с плотностью моментов

$$m_{\alpha\beta}(x) = v M \delta_{\alpha\beta} \delta(x) \tag{2.27}$$

где M — относительное изменение объема точечного дефекта. Тогда для напряжений и энергии дефекта согласно (1.28), учитывая (2.21) и (2.23), находим

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = -\frac{2(1+\nu) vM}{1-\nu} \operatorname{rot}^{\alpha\lambda} \operatorname{rot}_\lambda^{\cdot\beta} \mu(\Delta) g(r) \tag{2.28}$$

$$\Phi = {}^1/_3 \pi\beta v \mu_0 M^2 \sim v\mu_0 M^2 \tag{2.29}$$

При $r \to \infty$ из (2.28) вытекает известное решение для центра расширения.

Поступила 14 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol, 16, № 1, p. 51.
2. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3, стр. 401.
3. Кунин И. А. Модель упругой среды простой структуры с пространственной дисперсией. ПММ, 1966, т. 30, вып 3, стр. 542.
4. Кунин И. А. Теория упругости с пространственной дисперсией. Одномерная сложная структура. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5, стр. 866.
5. Вдовин В. Е., Кунин И. А. Теория упругости с пространственной дисперсией. Трехмерная сложная структура. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, стр. 1071.
6. Kröner E., Datta B. K. Nichtlokale Elastostatik: Ableitung aus der Gittertheorie. Z. Phys., 1966, bd. 196, Hft. 3, s. 203.
7. Кунин И. А. Неоднородная упругая среда с нелокальным взаимодействием. ПМТФ, 1967, № 3.
8. Kröner E. Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Berlin, Springer-Verlag, 1958.
9. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
10. Кунин И. А. Теория дислокаций. В кн.: Схоутен Я. А. «Тензорный анализ для физиков». М., «Наука», 1965, с. 373—443.
11. Günter W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. Abhande Braunschw Wiss. Ges., 1958, Bd. 10, s. 195—213.
12. McClintock F. A. Contribution of interface couples to the energy of a dislocation. Acta Metallurgica, 1960, vol. 8, № 2, p. 127.
13. Kröner E. On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics. Internt. J. Engng. Sci., 1963, vol. 1, p. 261.
14. Misicu M. On the distortions in special structural media. Rev. Roum. Sci. Techn. Ser. Mec. Appl., 1965, vol. 10, № 6, p. 1441.
15. Teodosiu C. The determination of stresses and couple-stresses generated by dislocation, in isotropic media. Rev. Roum. Sci. Techn. Ser. Mec. Appl., 1965, vol. 10, № 6, p. 1461.
16. Cohen H. Dislocations in couple-stress elasticity. J. Math. and Phys., 1966, vol. 45, № 1, p. 35.
17. Rogula D. Influence of spatial dispersion on dynamical properties of dislocations. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn. I — 1965, vol. 14, N 7, p. 337; II—1966, vol. 14, № 3, p. 159.
18. Косевич А. М., Нацик В. Д. Торможение дислокаций в среде, обладающей дисперсией упругих модулей. Физ. тверд. тела, 1966, т. 8, вып. 4, с. 1250.
19. Займан Дж. Электроны и фононы. М., Изд-во иностр. лит., 1962.