О ДЕФОРМАЦИОННЫХ ТЕОРИЯХ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ СИНГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ НАГРУЖЕНИЯ

Д. Д. Ивлев

(Москва)

В работе [1] Б. Будянский показал, что при сингулярных поверхностях нагружения деформационные соотношения могут не противоречить основным представлениям теории пластичности.

В. Д. Клюшников [2] развил свои соотношения теории течения пластического тела и получил в явном виде деформационные соотношения для достаточно широкого класса путей нагружения.

Ю. Н. Работнов [3] предложил двумерную модель упрочняющегося пластического тела и проиллюстрировал особенности соотношений теории пластического течения при образовании на поверхности нагружения угловой точки. Было показано, что соотношения деформационной теории Генки — Надаи могут иметь место для путей нагружения, отличных от пропорционального. Ряд особенностей поведения функции нагружения в двумерном случае обсуждался также в [4].

Отметим, что ранее Ходж [5] проинтегрировал соотношения теории течения для случаев соответствия напряженного состояния особенностям некоторой линейной аппроксимации поверхности нагружения.

В предлагаемой работе рассматриваются условия, при которых соотношения теории течения при кусочногладких поверхностях нагружения приводят к деформационным соотношениям теории Генки — Надаи.

1. Соотношения теории пластического течения при кусочногладких поверхностях нагружения записываются в виде [6]

$$\varepsilon_{ij}{}^p = \sum_k h_k \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}\right), \qquad f_k(\sigma_{ij}, e_{ij}{}^p, \chi_i, k_i) = 0 \tag{1.1}$$

$$h_k = h_k(\sigma_{ij}, e_{ij}{}^p, \chi_i, k_i)$$

где $\varepsilon_{ij}{}^p$, $e_{ij}{}^p$, σ_{ij} — соответственно компоненты скорости пластической деформации, пластической деформации и напряжения; χ_i — неголономные параметры, зависящие от пути нагружения, k_i — постоянные, h_k — функции упрочнения.

В дальнейшем для простоты рассмотрим случай жестко-пластического тела и индекс p наверху опустим.

В выражение закона течения (1.1) входят величины первых производных функций f_k, поэтому вместо f_k в шестимерном пространстве симметричного тензора напряжений σ_{ij} может быть рассмотрена любая совокупность функций $g_i = 0$, такая, чтобы при данных значениях параметров σ_{ij}, e_{ij}, χ_i величины первых производных $\partial f_k / \partial \sigma_{ij}$, $\partial g_k / \partial \sigma_{ij}$ полностью совпадали.

Отмеченное обстоятельство может быть определено как свойство локальности соотношений теории пластического течения: мгновенный характер деформирования определяется значениями первых производных $\partial f_k / \partial \sigma_{ij}$ при данных σ_{ij}, e_{ij}, χ_i, k_i, h_k и не зависит от других характеристик поверхности нагружения.

В дальнейшем предположим, что функции нагружения не зависят от χ_i.

Чтобы наглядно изложить основные соображения, положим вначале, что напряженное и деформированное состояние характеризуется лишь двумя парами отличных от нуля компонент напряжений и деформаций (например, случаи кручения или антиплоской деформации)

$$\sigma_{12}, \sigma_{13}, e_{12}, e_{13} \neq 0 \tag{1.2}$$

Тогда функции нагружения примут вид

$$f_k(\sigma_{12}, \sigma_{13}, e_{12}, e_{13}) = 0 \tag{1.3}$$

В пространстве напряжений функциям $f_k = 0$ соответствуют некоторые поверхности, величины e_{ij} играют роль параметров. Любые две независимые функции (1.3) могут быть рассмотрены как конечные соотношения, из которых, вообще говоря, можно определить явную зависимость

$$e_{12} = \varphi_{12}(\sigma_{12}, \sigma_{13}), \qquad e_{13} = \varphi_{13}(\sigma_{12}, \sigma_{13}) \tag{1.4}$$

Соотношения (1.4) определяют искомую деформационную зависимость. Выражения ассоциированного закона течения (1.1) играют в этом случае роль соотношений, из которых могут быть определены функции упрочнения h_k.

Предположим, что отличны от нуля по три компоненты напряжения и деформации (случай плоской задачи)

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \quad \sigma_{12}, \quad e_{11}, \quad e_{22}, \quad e_{12} \neq 0 \tag{1.5}$$

Если существуют три независимые функции $f_k = 0$, то, вообще говоря, можно определить

$$e_{ij} = \varphi_{ij}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}), \qquad i, j = 1, 2 \tag{1.6}$$

Если в трехмерном подпространстве σ_{ij} особенность функции нагружения соответствует конической точке, то последняя может быть рассмотрена как огибающая касательных плоскостей. Из касательных плоскостей, имеющих общую точку в вершине конуса, в трехмерном пространстве независимых только три, остальные могут быть получены как линейная комбинация независимых. Трех независимых соотношений $g_k(\sigma_{ij}, e_{ij}) = 0$ достаточно для определения деформационных соотношений (1.6).

Аналогично может быть рассмотрен общий случай. Деформационные соотношения

$$e_{ij} = \varphi_{ij}(\sigma_{mn}) \tag{1.7}$$

будут иметь место, если для данной особенности поверхности нагружения существует шесть независимых конечных соотношений

$$g_k(\sigma_{ij}, e_{ij}) = 0 \tag{1.8}$$

2. Соотношения теории малых упруго-пластических деформаций имеют вид [7]

$$e_{ij}' = \frac{e_u}{\sigma_u}\sigma_{ij}', \qquad e_u = \Phi(\sigma_u), \qquad \sigma = Ke$$
$$\sigma_u = (\sigma_{ij}'\sigma_{ij}')^{1/2}, \quad e_u = (e_{ij}e_{ij}')^{1/2}, \quad \sigma = {}^1/_3\sigma_{ii}, \quad e = {}^1/_3 e_{ii} \tag{2.1}$$
$$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma, \qquad e_{ij}' = e_{ij} - \delta_{ij}e$$

Введем шесть независимых переменных

$$X = \sigma - Ke, \qquad X_{ij} \equiv e_{ij} - (1/K)\sigma - (\Phi(\sigma_u)/\sigma_u)\sigma_{ij}' \tag{2.2}$$

Величины X_{ij}, очевидно, являются компонентами некоторого тензора. Если функции нагружения имеют вид

$$f_k(X, X_{ij}) = 0 \tag{2.3}$$

причем решением совокупности шести уравнений $g_k(X, X_{ij}) = 0$ являются корни $X, X_{ij} = 0$, то, очевидно, имеют место соотношения теории малых упруго-пластических деформаций (2.1). Функции нагружения (2.3) должны быть тензорно инвариантными.

Образуем совокупность независимых инвариантов

$$X = \sigma - Ke, \quad X_{ij}\sigma_{ij}, \quad X_{ij}e_{ij}, \quad X_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}, \quad X_{ij}e_{jk}e_{ik}, \quad X_{ij}\sigma_{jk}e_{ki} \tag{2.4}$$

Функции нагружения $f_k = 0$, зависящие от инвариантов (2.4), являются тензорно-инвариантными. Если решением совокупности функций $g_k = 0$ является обращение в нуль всех инвариантов (2.4), то в силу произвольности σ_{ij}, e_{ij} следует, что $X_{ij} = 0$, т. е. имеют место соотношения (2.1). Очевидно, что при подобном обосновании соотношений теории малых упруго-пластических деформаций нет необходимости требовать несжимаемости материала $K = \infty$, степенной зависимости $\sigma_u = Ae_u$ и пропорционального нагружения, как в случае гладких поверхностей нагружения [7].

3. В качестве примера рассмотрим функции нагружения такие, что функции $g_k = 0$ могут быть определены в виде

$$X + Y = 0, \qquad X - Y = 0 \tag{3.1}$$
$$X = e_x - \psi\tau_x, \qquad Y = e_y - \psi\tau_y, \qquad \psi = \psi(\tau_x^2 + \tau_y^2)$$

Из (3.1) очевидно следуют соотношения деформационной теории

$$e_x = \psi\tau_x, \qquad e_y = \psi\tau_y \tag{3.2}$$

Пусть имеет место нагружение, при котором отличны от нуля лишь τ_x, e_x. Определим особенности функции нагружения вблизи точки $M(\tau_x, 0)$. Соотношения (3.1) в этом случае имеют вид

$$e_x - \psi(\tau_x + \tau_y) = 0, \qquad e_x - \psi(\tau_x - \tau_y) = 0, \qquad e_y = 0 \tag{3.3}$$

Дифференцируя (3.3), получим в точке M:

$$\frac{d\tau_y}{d\tau_x} = \pm\left(\frac{2\psi_0'}{\psi_0}\tau_x^2 + 1\right) \tag{3.4}$$

где штрих у функции ψ означает производную по ее аргументу $\tau_x^2 + \tau_y^2$, а нуль внизу означает, что значения соответствуют точке $M(\tau_x, 0)$.

Соотношение (3.4) определяет величину угла поверхности нагружения в точке $M(\tau_x, 0)$.

Поступила 11 III 1967 Московское Высшее техническое училище им. Баумана

ЛИТЕРАТУРА

1. Будянский Б. Переоценка деформационных теорий пластичности. Механика, Сб. перев. и обз. ин. период., 1960, № 2.
2. Клюшников В. Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория. ПММ, 1959, т. 23. вып. 4.
3. Работнов Ю. Н. Модель, иллюстрирующая некоторые свойства упрочняющегося пластического тела. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.
4. Быковцев Г. И., Дудукаленко В. В., Ивлев Д. Д. О функциях нагружения анизотропно упрочняющегося пластического материала. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
5. Hodge Ph. G. Piecewiege linear plasticity. IX Congr de Mech. Appl., Actes 1957.
6. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
7. Ильюшин А. А. Пластичность. М., Гостехиздат, 1948.

ВНУТРЕННИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СРЕДЕ С МИКРОСТРУКТУРОЙ

И. А. Кунин (Новосибирск)

Описанию среды с микроструктурой в рамках моментной теории упругости посвящено большое число работ (см., например, [1,2], где имеются также ссылки на другие работы). В [3–6] на основе теории кристаллической решетки была развита теория макроскопически однородной упругой среды с пространственной дисперсией, содержащая моментную теорию упругости как частный случай слабой дисперсии. Общий случай неоднородной упругой среды с нелокальным взаимодействием рассмотрен в [7].

В настоящей работе рассматривается теория внутренних напряжений в среде с микроструктурой, являющаяся обобщением континуальной теории дислокаций. Последняя, как известно [8–10], построена на основе модели упругого континуума и не учитывает дискретной структуры среды, являясь в этом смысле асимптотической теорией взаимодействия дефектов на больших расстояниях. Учет микроструктуры позволяет существенно расширить область применимости теории и сблизить ее с теорией дефектов кристаллической решетки. На важность подобного обобщения теории дисло-