ПРОГИБ ПОД СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ В ОБОЛОЧКАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Г. Н. Чернышев

(Москва)

Рассматриваются однослойные, выпуклые изотропные и анизотропные оболочки, допускающие расчленение напряженного состояния на безмоментное и краевой эффект [1 2], получено приближенное значение для нормального прогиба w в точке приложения перпендикулярной к срединной поверхности сосредоточенной силы. Решение получено методом асимптотического интегрирования уравнений теории оболочек, который применительно к сосредоточенным воздействиям разработан автором в работе [3] для случая изотропной оболочки

1. Анизотропная оболочка (общий случай анизотропии). Предположим, что решение по безмоментной теории для оболочки, нагруженной сосредоточенной силой, известно (например, для оболочек, очерченных по поверхностям второго порядка, их нетрудно получить методом, изложенным в работе [1]). Эти решения в точке приложения силы имеют особенности более высокого порядка, чем должны иметь по общей моментной теории [4]. Получившуюся неувязку, как показано в работе [3], можно устранить с помощью быстроизменяющихся решений типа краевого эффекта, имеющих локальный характер, т. е. существенных по величине только в достаточно малой окрестности точки приложения силы. Такие решения для изотропных оболочек получены в работе [3] и названы локальными. Дадим обобщение на случай анизотропной оболочки. Как известно [1], уравнение для быстроизменяющихся решений совпадает с уравнением для пологой оболочки, однако надо помнить, что при отыскании быстроизменяющихся решений необходимо отбрасывать медленноменяющиеся решения. Выпишем это уравнение [2]

$$L_1(D_{ik})\, w + \Delta_r\varphi = Z, \qquad L_2(A_{ik})\,\varphi - \Delta_r w = 0 \qquad \left(\Delta_r = \frac{1}{R_2A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{R_1B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) \tag{1}$$

$$L_1(D_{ik}) = \frac{D_{11}}{A^4}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 4\frac{D_{16}}{A^3B}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^3\partial\beta} + 2(D_{12}+2D_{66})\frac{1}{A^2B^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + 4\frac{D_{26}}{AB^3}\frac{\partial^4}{\partial\alpha\,\partial\beta^3} + \frac{D_{22}}{B^4}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}$$

$$L_2(A_{ik}) = \frac{A_{22}}{A^4}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} - 2\frac{A_{26}}{A^3B}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^3\partial\beta} + \frac{A_{66}+2A_{12}}{A^2B^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} - 2\frac{A_{16}}{AB^3}\frac{\partial^4}{\partial\alpha\,\partial\beta^3} + \frac{A_{11}}{B^4}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}$$

$$A_{11} = (C_{22}C_{66} - C_{26}^2)\,\Omega^{-1}, \qquad A_{22} = (C_{11}C_{66} - C_{16}^2)\,\Omega^{-1}, \qquad C_{ik} = hB_{ik}$$

$$A_{12} = (C_{16}C_{26} - C_{12}C_{66})\,\Omega^{-1}, \qquad A_{66} = (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)\,\Omega^{-1}$$

$$A_{16} = (C_{12}C_{26} - C_{16}C_{22})\,\Omega^{-1}, \qquad A_{26} = (C_{12}C_{16} - C_{26}C_{11})\,\Omega^{-1}, \qquad D_{ik} = {}^1/_{12}h^3B_{ik}$$

$$\Omega = (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)\,C_{66} + 2C_{12}C_{16}C_{26} - C_{11}C_{26}^2 - C_{22}C_{16}^2$$

Здесь φ — функция напряжений; B_{ik} — постоянные упругости ([2], стр. 54, 205); h — толщина оболочки; A, B, R_1, R_2 — коэффициенты первой квадратичной формы и радиусы кривизны срединной поверхности. Считаем, что коэффициенты A, B, R_1, R_2, B_{ik} постоянны или очень медленно меняющиеся функции такие, что их можно положить постоянными и равными значениям в точке приложения нагрузки. Тогда система (1) сводится к одному уравнению

$$L_1(D_{ik})\, L_2(A_{ik})\, w + \Delta^2{}_r w = L_2(A_{ik})\, Z \tag{2}$$

Нормальной сосредоточенной силе величины P соответствует значение Z [4]

$$Z = P\,(AB)^{-1}\,\delta\,(\alpha_0, \beta_0)$$

Здесь δ — дельта-функция Дирака.

Построим локальное решение этого уравнения, следуя методу работы [3]. Введем безразмерные координаты x, y

$$x = A(\alpha - \alpha_0) R_1^{-1/2} R_2^{-1/2}, \quad y = B(\beta - \beta_0) R_1^{-1/2} R_2^{-1/2}$$

Тогда, как показано в [5], функция Z примет вид

$$Z = PR_1^{-1} R_2^{-1} \delta$$

Преобразованное уравнение (2) будет

$$R_1^{-1}R_2^{-1} L_1'L_2'w + \Delta_1^2 w = PL_2'\delta \tag{3}$$

Здесь L_1', L_2', Δ_1 — преобразованные операторы

$$L_1' = R_1^2 R_2^2 L_1(D_{ik}), \qquad L_2' = R_1^2 R_2^2 L(A_{ik}), \qquad \Delta_1 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad a^2 = b^{-2} = \left(\frac{R_1}{R^2}\right)^{1/2}$$

Для выделения локального решения удобнее перейти к плоским волнам ξ, потому что решение уравнения (3) можно тогда искать в виде функции от ξ

$$\xi = x\cos\varphi + y\sin\varphi = r\cos(\varphi - \varphi_0), \qquad x = r\cos\varphi_0, \qquad y = r\sin\varphi_0$$

где φ — параметр, изменяющийся в пределах $[0, 2\pi]$. Действительно, δ-функция имеет разложение по плоским волнам [5]:

$$\delta = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\xi^2}$$

Подставляя это выражение в (3), получим уравнение:

$$\frac{1}{R_1R_2} L_1'L_2'w + \Delta_1^2 w = -\frac{P}{4\pi^2} L_2 \int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\xi^2}$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$w = \int_0^{2\pi}\Phi(\xi)\,d\varphi \tag{4}$$

Тогда функция Φ должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$h_1^2\frac{d^8\Phi}{d\xi^8} + t^2\frac{d^4\Phi}{d\xi^4} = -\frac{Pl_2}{4\pi^2}\frac{d^4}{d\xi^4}\frac{1}{\xi^2} \qquad \left(h_1 = \frac{l_1 l_2}{R_1R_2},\ t = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\right) \tag{5}$$

$$l_1 = D_{11}\cos^4\varphi + 4D_{16}\cos^3\varphi\sin\varphi + 2(D_{12} + 2D_{66})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + {}$$
$$+ 4D_{26}\cos\varphi\sin^3\varphi + D_{22}\sin^4\varphi$$

$$l_2 = A_{22}\cos^4\varphi - 2A_{26}\cos^3\varphi\sin\varphi + (A_{26} + 4A_{12})\cos^2\varphi\sin^2\varphi -$$
$$-2A_{16}\cos\varphi\sin^3\varphi + A_{11}\sin^4\varphi$$

Решение уравнения (5) можно представить следующим образом:

$$\Phi = +Pl_2\frac{d^4\Phi^1}{d\xi^4} \tag{6}$$

где Φ^1 — решение уравнения

$$h_1^2\frac{d^8\Phi^1}{d\xi^8} + t^2\frac{d^4\Phi^1}{d\xi^4} = -\frac{1}{4\pi^2\xi^2} \tag{7}$$

Подобного вида уравнение исследовано в работе [3] и показано, как из общего решения выделить локальное решение. Отличие состоит лишь в том, что здесь h_1 зависит от φ, тогда как в [3] h_1 равно постоянной. Решение уравнения (7) равно сумме решений следующих уравнений (проверяется подстановкой):

$$t^2\frac{d^4\Phi_0^1}{d\xi^4} = -\frac{1}{4\pi^2\xi^2}, \qquad t^2\frac{d^4\Phi_1^1}{d\xi^4} + \frac{t^4}{h_1^2}\Phi_1^1 = \frac{1}{4\pi\xi^2} \tag{8}$$

Уравнение (7) распалось на два. Первое определяет медленно меняющиеся, второе — быстроменяющиеся решения. Решение второго уравнения, убывающее при $\xi \to \pm\infty$, имеет вид [3]

$$\Phi_1{}^1 = \frac{h_1}{16\pi^2 t^3} \operatorname{Im}\left[e^{-z}\operatorname{Ei}(z) + e^{z}\operatorname{Ei}(-z)\right], \qquad z = (1+i)\left(\frac{t}{2h_1}\right)^{1/2}\xi$$

Локальное перемещение w, обозначим его, как и в [3], буквой $w_0{}^3$, соответствующее функции $\Phi_1{}^1$, согласно (6), (4), имеет вид

$$w_0{}^3 = P\int_0^{2\pi} l_2 \frac{d^4\Phi_1{}^1}{d\xi^4}\, d\varphi \tag{9}$$

Решение (9) убывает с удалением от точки $(x = 0,\ y = 0)$.

Полный прогиб в оболочке складывается из безмоментного и полученного $w_0{}^3$. Найдем величину его в точке приложения силы.

Выражение, стоящее под знаком интеграла в (9), можно заменить при помощи (8)

$$w_0{}^3 = -P\int_0^{2\pi}\left[\frac{t^2 l_2}{h_1{}^2}\Phi_1{}^1 - \frac{l_2}{4t^2\pi^2\xi^2}\right] d\varphi \tag{10}$$

Как известно, прогиб под сосредоточенной силой, перпендикулярной к срединной поверхности, является конечным: для изотропных оболочек это доказано, например, в работе [4], для анизотропной оболочки утверждение справедливо также. Прогиб w°, полученный по безмоментной теории, бесконечный и имеет особенность порядка $(1 / r^2)$. Это можно показать при помощи уравнения (3). Положим в (3) толщину оболочки $h = 0$, это будет соответствовать тому, что оператор $L_1 = 0$, т. е. получившееся уравнение будет соответствовать безмоментной теории

$$\Delta_1{}^2 w^0 = PL_2\delta \tag{11}$$

Главную особенность функции w^0 в окрестности особой точки можно получить изложенным методом плоских волн. Приводим конечный результат

$$w^\circ = -\frac{P}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{l_2 d\varphi}{t^2\xi^2} = -\frac{P}{4\pi^2 r^2}\int_0^{2\pi}\frac{l_2\, d\varphi}{t^2\cos^2(\varphi - \varphi_0)} \tag{12}$$

Такую главную особенность имеет прогиб по безмоментной теории. Как видно при суммировании с локальным решением (10), эта особенность уничтожается

$$w = w^\circ + w_0{}^3 = -P\int_0^{2\pi}\frac{l_2 t^2}{h_1{}^2}\Phi_1{}^1\, d\varphi \tag{13}$$

Поскольку общий прогиб конечен, все особенности безмоментного решения, дающие бесконечный прогиб, должны уничтожаться при суммировании с локальным решением. Здесь показано, как первое приближение локального решения уничтожает главную особенность безмоментного решения, следующие приближения уничтожают другие особенности (типа $1 / r$, $\ln r$ и т. д.).

Конечная часть полного прогиба складывается из суммы конечных частей безмоментного и локального решений. Чтобы выявить конечную часть суммы (13), надо разложить ее в окрестности особой точки в ряд, и нулевой член ряда будет конечной частью первого приближения локального решения.

Ряд для функции (13), если положить выражение $(l_2 / h_1{}^2 = 1)$, стоящее под знаком интеграла, выписан в работе [3]. Воспользуемся этим разложением и перепишем его для случая $l_2 / h_1{}^2 \neq 1$:

$$w = \ln r\sum_0^\infty P_{4k+2}(x, y) + \sum_0^\infty Q_{4k+2}(x, y) + \sum_0^\infty R_{4k}(x, y)$$

Здесь P_i, Q_i, R_i — однородные полиномы степени i. Видно, что конечную отличную от нуля часть может дать только первый член третьего ряда. Выпишем этот необходимый здесь член

$$w_0^3(0, 0) = R_0 = P\frac{\sqrt{R_1R_2}}{32\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{1/2}\frac{d\varphi}{t} \tag{14}$$

Сюда надо подставить значения l_1, l_2, t из (5).

Если оценить при помощи формул (1) порядок величины прогиба в зависимости от относительной толщины оболочки $h_0 = hR_1^{-1/2}\ R_2^{-1/2}$, то получим

$$w_0^3(0, 0) \approx h_0^{-2}$$

Порядок конечной части прогиба, полученного по безмоментной теории, можно оценить при помощи (1), (11). В результате имеем $w^\circ(0, 0) \sim h_0^{-1}$. Этой величиной можно пренебречь по сравнению с w_0^3. Постулируя, что следующие приближения полного прогиба, полученные методом асимптотического интегрирования, меньше в $\sqrt{h_0}$ раз, как это имеет место в теории краевого эффекта [1], величину (14) можно считать полным прогибом анизотропной оболочки под сосредоточенной силой. Точное интегрирование в (14) в общем случае громоздко или даже невозможно.

Следует отметить, что формула (14) верна в том случае, когда точка приложения силы удалена на такое расстояние от границы оболочки, что краевой эффект не влияет на прогиб под сосредоточенной силой и обратно; локальное решение убывает к границе настолько, что изменение граничных условий, вызванное им, не влияет на величину решения опять-таки в точке приложения силы. Такое расстояние можно определить в 2 ÷ 3 размера погранслоя.

Из приведенных рассуждений видно, что в первом приближении величина прогиба в оболочке не зависит от граничных условий и вида границы, а определяется радиусом кривизны в точке приложения силы, постоянными материала оболочки, толщиной ее , т. е. местной геометрией оболочки и веществом.

Прогиб в оболочке переменной толщины, если толщина медленно меняющаяся функция, определяется по формуле (14), только вместо h надо подставить $h(\alpha_0\ \beta_0)$.

2. **Изотропная оболочка.** Величина прогиба в этом случае получается как частный случай выше полученного прогиба. Полагая материал изотропным, формулу (14) можно привести к следующему виду:

$$w(0, 0) = 4P\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)R_1R_2}}{Eh^2t}d\varphi$$

Интеграл вычисляется, и прогиб примет вид

$$w(0, 0) = \frac{P}{4Eh^2}\sqrt{3(1-\sigma^2)R_1R_2}$$

Величина прогиба в первом приближении совпадает с точным значением, полученным в работе [6].

Автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за обсуждение работы.

Поступила 8 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек М. Гостехтеоретиздат, 1953.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
3. Чернышев Г. Н. Асимптотические методы в теории оболочек (сосредоточенные нагрузки). Тр. VI Всес. конференц. по теории пластин и оболочек. М., «Наука». 1966.
4. Чернышев Г. Н. О действии сосредоточенных сил и моментов на упругую тонкую оболочку произвольного очертания. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
5. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958.
6. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки. ПММ, 1944, т. 8, вып. 6.