

АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОБ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ  
НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Е. М. Черных (Воронеж)

Динамические задачи о нагружении нелинейно-упругих (с бесконечно малыми деформациями) и упруго-пластических сред изучались в работах [1-5].

Ниже в переменных Эйлера рассматривается плоская задача о мгновенном нагружении полупространства, заполненного геометрически нелинейным материалом Альманси (с конечными деформациями) [6]. Устанавливаются условия, при которых возможны непрерывные и разрывные автомодельные решения. Получено решение одномерной задачи. Приводится приближенное решение задачи о косом ударном нагружении на границе полупространства. Показывается, что среда Альманси проявляет динамический эффект Пойнтинга [7,8].

Рассмотрим полупространство  $x_1 \geq 0$ , заполненное средой Альманси [6], для которой определяющие уравнения запишутся в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (1)$$

Предположим, что среда находится в ненапряженном состоянии до момента времени  $t = 0$ . Пусть в момент  $t = 0$  все точки плоской границы  $x_1 = 0$  мгновенно приходят в движение, характеризуемое конечными постоянными значениями скорости  $v_{10}, v_{20}$ . Таким образом, будут выполняться следующие условия на подвижной границе:

$$v_1(x_{10}) = v_{10}, \quad v_2(x_{10}) = v_{20}, \quad v_3 \equiv 0 \quad (x_{10} = v_{10} t) \quad (2)$$

Необходимо определить напряженное состояние среды, вызванное ударным нагружением (2).

Постановка задачи допускает принятое в дальнейшем предположение относительно смещений

$$u_1 = u_1(x_1, t), \quad u_2 = u_2(x_1, t), \quad u_3 \equiv 0 \quad (3)$$

Уравнения движения среды в форме Эйлера запишутся в виде

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (4)$$

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = v_k \left( \delta_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (5)$$

Дифференцируя (5) по  $x_j$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \left( \delta_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - v_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \quad (6)$$

Уравнение неразрывности запишем в форме Лагранжа [9]

$$\rho = \rho_0 (1 - 2J_1 + 4J_2 - 8J_3)^{1/2} \quad (7)$$

Здесь  $\rho_0$  — плотность частиц в ненапряженном состоянии,  $J_k$  — инварианты тензора деформаций  $e_{ij}$ .

С учетом (1), (3), (7) уравнения (4), (6) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \rho_0 (1 - \omega_1) \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) &= (\lambda + 2\mu) \left[ (1 - \omega_1) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} - \omega_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right] \\ \rho_0 (1 - \omega_1) \left( \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) &= \mu \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \quad \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \omega_1, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \omega_2 \right) \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial t} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} (1 - \omega_1) - v_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial t} = -\omega_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (8)$$

Введем безразмерные переменные  $\tau$ ,  $x$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  формулами

$$t = \tau T, \quad x_1 = x c_{10} T, \quad v_1 = V_1 c_{10}, \quad v_2 = V_2 c_{10}, \quad (c_{10}^2 = \lambda \mp 2\mu / \rho_0) \quad (9)$$

Здесь  $T$  — характерное время.

Уравнения (8) запишутся в следующей безразмерной форме:

$$\begin{aligned} (1 - \omega_1) \left( \frac{\partial V_1}{\partial \tau} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} \right) &= (1 - \omega_1) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} - \omega_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \\ (1 - \omega_1) \left( \frac{\partial V_2}{\partial \tau} + V_1 \frac{\partial V_2}{\partial x} \right) &= k^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x}, \quad k^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} &= \frac{\partial V_1}{\partial x} (1 - \omega_1) - V_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \tau} = -\omega_2 \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x} - V_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \end{aligned} \quad (10)$$

Граничные условия (2) дадут

$$V_1(x_0(\tau)) = V_{10}, \quad V_2(x_0(\tau)) = V_{20} \quad (11)$$

Так как коэффициенты уравнений (10) не содержат в явном виде переменные  $x$  и  $\tau$ , а входящие в условия (11) значения  $V_{10}$ ,  $V_{20}$  постоянны, то система уравнений (10) допускает автомодельные решения, когда все искомые величины являются функциями только от отношения  $\xi$  «координаты» к «времени»

$$\xi = \frac{x}{\tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = -\frac{\xi}{\tau} \frac{d}{d\xi} \quad (12)$$

Используя (12), уравнения (10) приведем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (1 - \omega_1)(V_1 - \xi) \frac{dV_1}{d\xi} - (1 - \omega_1) \frac{d\omega_1}{d\xi} + \omega_2 \frac{d\omega_2}{d\xi} &= 0, \quad (1 - \omega_1)(V_1 - \xi) \frac{dV_2}{d\xi} - k^2 \frac{d\omega_2}{d\xi} = 0 \\ (1 - \omega_1) \frac{dV_1}{d\xi} - (V_1 - \xi) \frac{d\omega_1}{d\xi} &= 0, \quad \omega_2 \frac{dV_1}{d\xi} - \frac{dV_2}{d\xi} + (V_1 - \xi) \frac{d\omega_2}{d\xi} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Система уравнений (13) допускает тривиальное решение, когда  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  тождественно постоянны. Сюда же относятся решения, терпящие разрыв на луче  $\xi_*$  и постоянные по обе или только по одну сторону этого луча. Нетривиальные решения будут иметь место при условии равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов системы уравнений (13).

Раскрывая этот определитель и приравнивая его нулю, найдем

$$\xi = V_1 \pm C_{1,2} \quad (14)$$

$$C_{1,2} = \left\{ \frac{(1 - \omega_1)^2 + \omega_2^2 + k^2 \pm \sqrt{[(1 - \omega_1)^2 + \omega_2^2 - k^2]^2 + 4k^2\omega_2^2}}{2(1 - \omega_1)} \right\}^{1/2} \quad (15)$$

Таким образом, нетривиальные решения будут иметь место на веерах волн, которые представляют собой лучи на плоскости  $x\tau$ , исходящие из начала координат и наклоненные к оси  $\tau$  под углом, тангенс которого дается формулой (14). Для волн, бегущих в область  $x > 0$ , в формуле (14) нужно взять только верхний знак.

Подставляя (14) в (13), получим для определения искомых параметров следующие системы дифференциальных уравнений:

на первом веере	на втором веере
$(C_1^2 - 1 + \omega_1) d\omega_1 + \omega_2 d\omega_2 = 0$	$(C_2^2 - 1 + \omega_1) d\omega_1 + \omega_2 d\omega_2 = 0$
$(1 - \omega_1) dV_1 + C_1 d\omega_1 = 0$	$(1 - \omega_1) dV_1 + C_2 d\omega_1 = 0$
$dV_2 - \omega_2 dV_1 + C_1 d\omega_2 = 0$	$dV_2 - \omega_2 dV_1 + C_2 d\omega_2 = 0$

Рассмотрим вопрос о конструировании непрерывных решений. Непрерывные решения (если такие допустимы граничными условиями (11)) строятся из постоянного решения (нулевого) в области  $G_\infty$  плоскости  $x\tau$  (фиг. 1); на луче  $OE$  происходит непрерывное склеивание с переменным решением на первом веере в области  $G_1$ . Здесь решение находится путем интегрирования уравнений (16) с использованием условий в области  $G_\infty$

$$V_{1\infty} = V_{2\infty} = \omega_{1\infty} = \omega_{2\infty} = 0 \quad (17)$$

Это решение определит значения  $V_{1*}, V_{2*}, \omega_{1*}, \omega_{2*}$  на луче  $OD$ . Заметим, что из (15) следует:  $C_1 > C_2$  при любых значениях  $\omega_1, \omega_2$ . Поэтому крайний правый луч  $OC$  второго веера всегда располагается левее крайнего левого луча  $OD$  первого веера. В области  $G$  между этими лучами решение постоянно:  $V_{1*}, V_{2*}, \omega_{1*}, \omega_{2*}$ . На втором веере решение непрерывно изменяется согласно уравнениям (16) для второго веера и непрерывно склеивается с постоянным в области  $G_0$  решением  $V_{10}, V_{20}, \omega_{10}, \omega_{20}$ . Отметим, что шесть условий (11), (17) полностью определяют шесть постоянных  $\omega_{10}, \omega_{20}, V_{1*}, V_{2*}, \omega_{1*}, \omega_{2*}$ , а значит, и решение в  $G_1, G_2$ .

Отметим, что полученные таким образом непрерывные решения должны удовлетворять условиям

$$\xi_{2*} = V_{1*} + C_{2*} \geq V_{10} + C_{20} = \xi_{20}, \quad \xi_{1*} = V_{1*} + C_{1*} \leq V_{1\infty} + C_{1\infty} = \xi_{1\infty} \quad (18)$$

В противном случае непрерывное решение невозможно.

Конструирование решений при наличии разрыва проводится иначе. В работе [10] показано, что в среде Альманси могут существовать лишь ударные волны сжатия в направлении распространения волны. В данном случае это будет означать, что на ударной волне  $\omega_2, V_2$  не терпят разрыва, а разрыв  $[\omega_1] = \omega_{*1} < 0$ .

Имеют место соотношения для безразмерных скоростей распространения ударной волны, вычисленных по разные стороны разрыва

$$\begin{aligned} \theta_* &= [(1 - 1/2\omega_{1*})(1 - \omega_{1*})^{-1}]^{1/2}, \\ \theta_0 &= [(1 - 1/2\omega_{1*})(1 - \omega_{1*}^*)]^{1/2}, \\ V_{1*} &= \theta_0 - \theta_* \end{aligned} \quad (19)$$

Траектория ударной волны на плоскости  $x\tau$  представляется лучом  $OD$ , наклоненным к оси  $\tau$  под углом, тангенс которого равен  $\theta_0$  (фиг. 2). В области  $G_\infty$  решение будет нулевым (17). На ударной волне  $OD$  величины  $V_1$  и  $\omega_1$  претерпевают разрыв. Из-за наличия ударной волны первый веер характеристик исчезает. Всюду в области  $G_*$ , заключенной между ударной волной и крайней правой характеристикой  $OC$  второго веера, решение постоянное

$$V_1 = V_{1*} \neq 0, \quad \omega_1 = \omega_{1*} \neq 0, \quad \omega_{2*} = V_{2*} = 0$$

Значения постоянных  $V_{1*}$  и  $\omega_{1*}$  заранее неизвестны и определяются из решения уравнений (16) и граничных условий (11) в области  $G_0$ . Связь между  $V_{1*}$  и  $\omega_{1*}$  находится из соотношений (19). Решение слева от  $OC$  строится так же, как в рассмотренном ранее случае.

Простой анализ дифференциальных уравнений (16) и соотношений (19) показывает, что в обоих случаях в ходе решения определяются функциональные зависимости  $\omega_{1*}, \omega_{2*}, V_{1*}, V_{2*}, \omega_{10}, \omega_{20}$  от  $V_{10}, V_{20}$  и при их помощи будет построено решение в областях  $G_1, G_2$ .

Однако такие зависимости в общем случае при произвольных  $V_{10}, V_{20}$  получить не удастся, так как система дифференциальных уравнений (16) не интегрируется в квадратурах. Ниже рассматривается точное решение одномерной задачи, когда  $V_{20} = 0$ , а также приближенное решение общей задачи косоугольного ударного нагружения в случае малых  $V_{10}, V_{20}$ .

*Одномерная задача.* В этом случае  $\omega_2 = V_2 \equiv 0$ . Формула (15) дает  $C_1 = (1 - \omega_1)^{1/2}$ ,  $C_2 = 0$ . Система уравнений (16) допускает лишь постоянное решение, т. е. второго веера  $G_2$  (фиг. 1) не будет, а в областях  $G_0$  и  $G_*$  значения параметров одинаковы. Первое и третье уравнения системы для первого веера (16) удовлетворяются тождественно, а второе легко интегрируется. В результате получим решение, справедливое в области  $G_1$ :

$$V_1 - V_{10} = 2 [(1 - \omega_1)^{1/2} - (1 - \omega_{10})^{1/2}], \quad \xi = V_1 + (1 - \omega_1)^{1/2} \quad (20)$$

Используя условия (17) на луче  $OE$ , получим из (20)

$$\omega_{10} = -V_{10} (1 + 1/4 V_{10}) \quad (21)$$

Из (20), (21) получим явную зависимость  $V_1, \omega_1$  от  $\xi$ , справедливую при условиях, которые следуют из (18)

$$(V_1 = 2/3 (\xi - 1), \omega_1 = 1 - 1/9 (\xi + 2)^2, 1 + 3/2 V_{10} = \xi_* \leq \xi \leq 1, V_{10} \leq 0$$

где  $\xi_*$  и  $\xi_0$  — крайние значения  $\xi$  на лучах  $OD$  и  $OE$ .

Если условия (18) не выполняются, т. е.  $V_{10} > 0$ , то решение разрывно постоянное. Соотношения (20) определяют  $\omega_{10}$  и  $\theta$  в зависимости от  $V_{10} = V_{1*}$ .

*Косой удар при малых  $V_{10}, V_{20}$ .* В этом случае  $\omega_1(x, \tau) \ll 1, \omega_2(x, \tau) \ll 1$ . Коэффициенты уравнений (16) могут быть разложены в ряды по  $\omega_1, \omega_2$ , и автомодельные решения будут построены приближенно также в виде рядов. В дальнейшем ограничимся первым приближением, пренебрегая в разложениях малыми порядками выше первого по сравнению с единицей.

Основанием для такого приближения служит достаточно хорошее совпадение приближенного решения с точным для одномерной задачи. (Для очень сильных ударных волн с разрывом напряжений порядка  $10^6$  кг/см<sup>2</sup> ( $\omega_{10} \approx 0.1$ ) расхождения в расчетах не превышают 1%).

*Построение непрерывного решения.* Для скорости звука (15) имеем приближенные выражения

$$C_1^2 = 1 - \omega_1, C_1 = 1 - 1/2 \omega_1; \quad C_2^2 = k^2 (1 + \omega_1), C_2 = k (1 + 1/2 \omega_1) \quad (22)$$

Интегрирование уравнений (16) с использованием условий в областях  $G_\infty$  и  $G_*$  (фиг. 1) дает решение для области  $G_1$ :

$$\omega_2 = \omega_{2*} = 0, \quad V_2 = V_{2*} = 0 \quad (23)$$

$$V_1 - V_{1*} = \omega_{1*} - \omega_1 = 1/4 \omega_{1*} - 1/4 \omega_1^2, \quad \xi_1 = V_1 + 1 - 1/2 \omega_1$$

Интегрирование уравнений (16) для второго веера с использованием условий в области  $G_*$  дает решение для области  $G_2$ :

$$V_1 - V_{1*} = k [\omega_{1*} - \omega_1 + 3/4 (\omega_{1*}^2 - \omega_1^2)] \quad (24)$$

$$\omega_2^2 = 2(1 - k^2)(\omega_1 - \omega_{1*}) - (k^2 + 1)(\omega_1^2 - \omega_{1*}^2), \quad \xi_2 = V_1 + k(1 + 1/2 \omega_1)$$

$$V_2^2 = 2k^2(1 - k^2)(\omega_1 - \omega_{1*}) \left[ 1 + \frac{7 - 13k^2}{6(1 - k^2)} \omega_1 - \frac{7 - k^2}{6(1 - k^2)} \omega_{1*} \right]$$

Для определения  $\omega_{1*}, V_{1*}, \omega_{10}, \omega_{20}$  необходимо в уравнениях (23) положить  $V_1 = \omega_1 = 0$  (область  $G_\infty$ ), а в уравнениях (24) положить  $V_1 = V_{10}, V_2 = V_{20}, \omega_1 = \omega_{10}, \omega_2 = \omega_{20}$  (область  $G_0$ ). Приближенное решение полученной системы имеет вид:

$$\omega_{10} = -V_{10} + a_{10}V_{10}^2 + a_{20}V_{20}^2, \quad \omega_{1*} = -V_{10} + a_{1*}V_{10}^2 + a_{2*}V_{20}^2 \quad (25)$$

$$V_{1*} = V_{10} + b_1V_{10}^2 + b_2V_{20}^2$$

$$a_{10} = \frac{9k^6 - 30k^5 + 20k^4 + 20k^3 - 8k^2 - 12k - 17}{12(1 - k)(1 - k^2)}$$

$$a_{20} = [2k^2(1 + k)]^{-1}, \quad a_{1*} = -1/4(1 - k)(1 - 3k) - k(3/4 + a_{10})/(1 - k)$$

$$a_{2*} = -[2k(1 - k^2)]^{-1}, \quad b_1 = -(1/4 + a_{1*}), \quad b_2 = -a_{2*}$$

Используя условия (18), найдем ограничения, которым должны удовлетворять  $V_{10}$ ,  $V_{20}$ , чтобы непрерывное решение было возможно. Так как в силу второго уравнения (24) имеем  $\omega_1 - \omega_{1*} \geq 0$  при любых  $\omega_1$ , то легко видеть, что первое из неравенств (18) имеет место всегда

$$\xi_{2*} - \xi_{20} = d_1 V_{10}^2 + d_2 V_{20}^2 \geq 0 \quad (26)$$

$$d_1 = b_1 - a_{1*} + 1/2k(a_{1*} - a_{10}), \quad d_2 = b_2 - a_{2*} + 1/2k(a_{2*} - a_{20})$$

Второе из соотношений (18) приводится к следующему виду:

$$\xi_{1*} - \xi_{1\infty} = 3/2 [V_{10} + 1/3(1/2 + a_{1*})V_{10}^2 + 1/2k^{-1}(1 - k^2)^{-1}V_{20}^2] \leq 0 \quad (27)$$

Из (26), (27) следует, что разности  $\xi_1 - \xi_{1\infty}$  и  $\xi_2 - \xi_{20}$  малы. Проводя в (23), (24) разложения по этим разностям и удерживая члены низших степеней, получим явные зависимости  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  от направления лучей в областях  $G_1$ ,  $G_2$ .

Для области  $G_1$  решение будет иметь вид

$$\omega_1 = -2/3(\xi - 1) - 2/27(\xi - 1)^2 \quad (28)$$

$$V_1 = -\omega_1(1 + 1/4\omega_1), \quad \omega_2 = V_2 = 0, \quad \xi_{1*} \leq \xi \leq 1$$

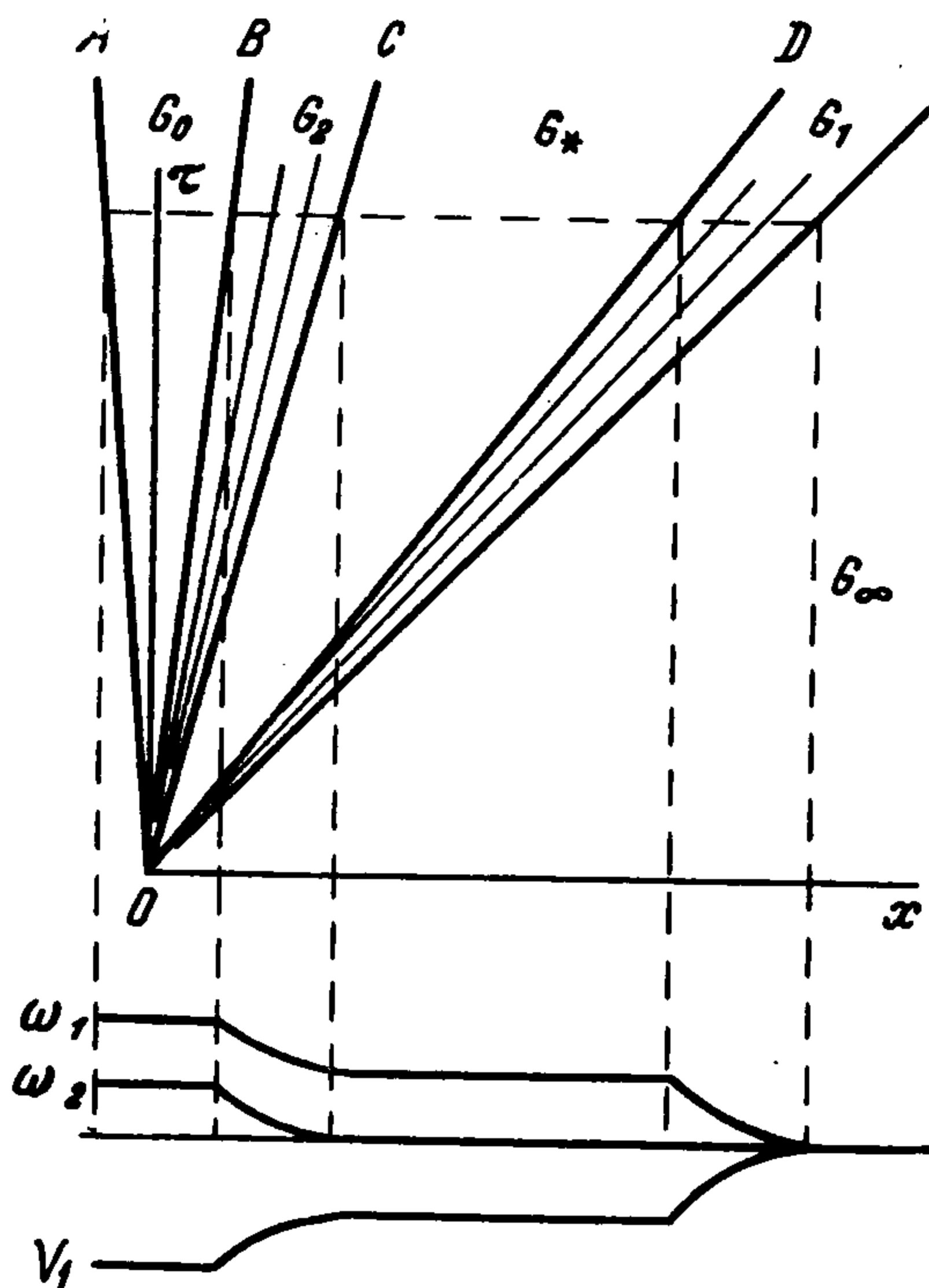
При этом  $\xi_{1*}$  вычисляется согласно (27).

Для области  $G_2$  решение запишется в виде

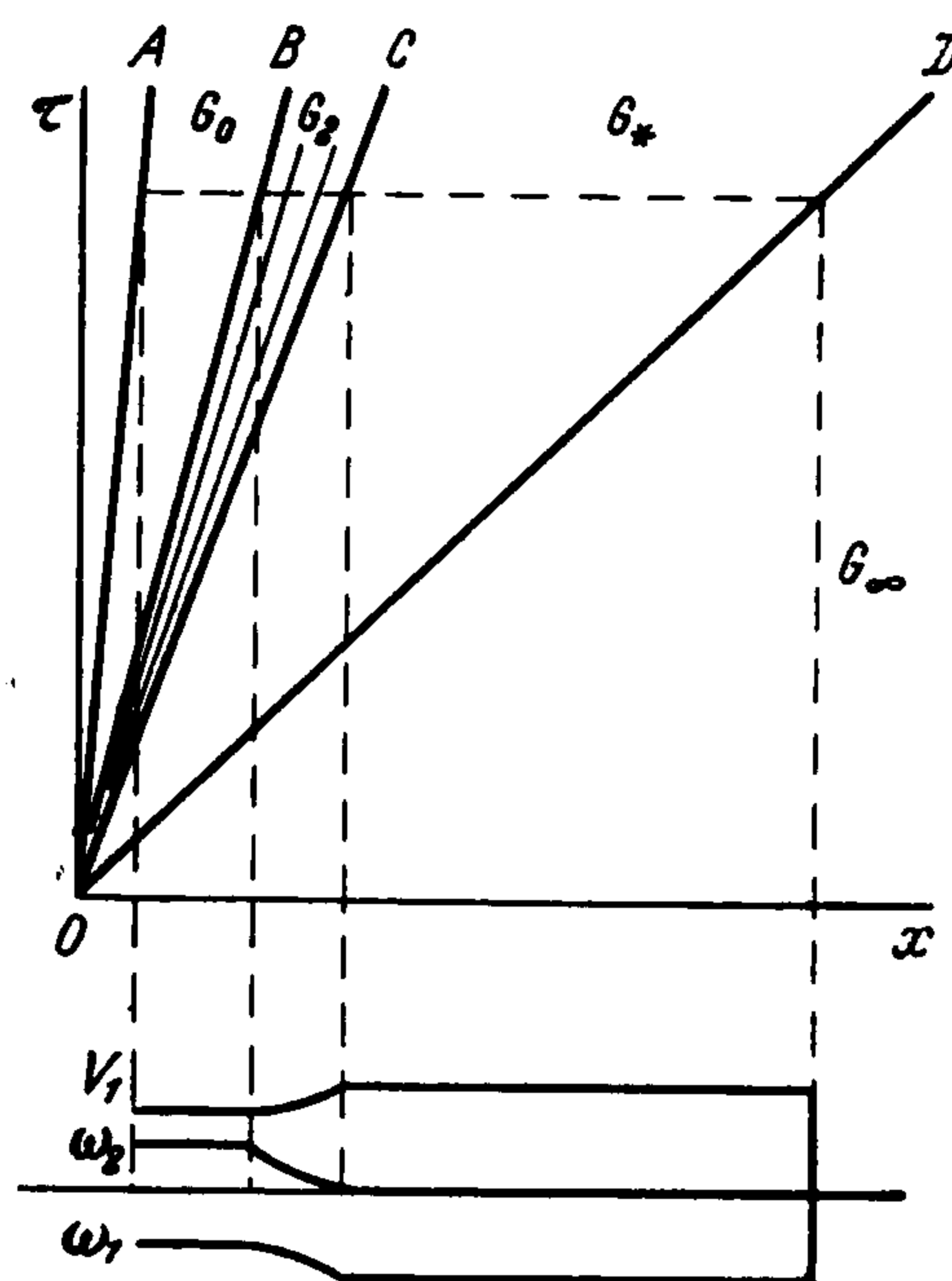
$$\omega_1 = \omega_{10} + (k)^{-1} (3/2 \omega_{10} - 1) (\xi - \xi_{20}) - 3/4 k^{-2} (\xi - \xi_{20})^2, \quad \xi_{20} \leq \xi \leq \xi_{2*} \quad (29)$$

Функции  $\omega_2$ ,  $V_1$  и  $V_2$  определяются из уравнений (24), (29) с использованием (25),  $\xi_{2*}$  вычисляется согласно (26).

На фиг. 1 изображено примерное поведение решений в зависимости от  $x$  для фиксированного момента времени  $\tau_1$ . Для любого другого момента времени  $\tau_2$  изображенные графики подобно растянутся вдоль оси  $x$  в  $\tau_2/\tau_1$  раз.



Фиг. 1



Фиг. 2

Если начальные значения  $V_{10}$  и  $V_{20}$  не удовлетворяют неравенству (27), только что построенное непрерывное решение теряет смысл. Интересно отметить, что при чистом сдвиге ( $V_{10} = 0$ ) границы полупространства неравенство (27) не выполняется, т. е. мгновенный сдвиг границы вызывает ударную волну сжатия в направлении, ортогональном границе. В этом состоит динамическое проявление эффекта Пойнтинга [7,8].

Приближенное разрывное решение конструируется следующим образом. Из соотношений (19) будем иметь

$$V_{1*} = -\omega_{1*} (1 + 1/4 \omega_{1*}), \quad \theta_0 = 1 - 3/4 \omega_{1*} - 1/8 \omega_{1*}^2 \quad (30)$$

Уравнения (24), (26) выполняются и теперь. В области  $G_\infty$  решение нулевое. На луче  $OD$  (фиг. 2) величины  $V_1, \omega_1$  изменяются скачком от нуля до значений  $V_{1*}, \omega_{1*}$ , которые вычисляются по формулам (25), а величины  $V_{2*} = \omega_{2*} = 0$ . В области  $G_2$  имеет место решение (29). Поведение решений представлено на фиг. 2.

Отметим следующее обстоятельство. Как видно из соотношений (26), угол раствора второго веера характеристик является величиной второго порядка малости по сравнению с  $V_{10}, V_{20}$ . На этом очень «узком» веере происходит хотя и непрерывное, но очень интенсивное изменение напряженного состояния. Однако с течением времени область материала, охваченная этим изменением, увеличивается пропорционально времени. Таким образом, начальный разрыв сдвиговой скорости  $V_{20}$  постепенно «размывается» по частицам среды. Такова структура сдвиговой «ударной» волны в среде Альманси.

Известные [11,12] результаты для линейно-упругого материала Гука получаются здесь в предельном случае при  $V_{10} \rightarrow 0, V_{20} \rightarrow 0$ .

Задача о разгрузке в настоящей работе не рассматривается.

Поступила 24 III 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Анциферов В. С., Рахматулин Х. А. Распространение сжимающе сдвигающих возмущений в нелинейно-упругой среде. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
2. Быковцев Г. И. О распространении возмущений в среде с нелинейной связью напряжения — деформации. ПМТФ, 1961, № 4.
3. Pei Chi Chou, Koepig H. A. A Unified Approach to Cylindrical and Spherical Elastic Waves by Method of Characteristics. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 1. (Русск. перев.: Джоу Пей Чи, Кениг. Единое рассмотрение цилиндрических и сферических упругих волн методом характеристик. Прикладная механика, Тр. америк. о-ва инж. механ., 1966, № 1.)
4. Bleich H. H., Nelson I. Plane Waves in an Elastic Plastic Half — Space Due to Combined Surface Pressure and Shear. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 1. (Русск. перев.: Блейх, Нельсон. Плоские волны в упруго-пластическом полупространстве, вызванные совместным действием нормальной и касательной поверхностных нагрузок. Прикладная механика, Тр. америк. о-ва инж. механ., 1966, № 1.)
5. Clifton R. J., Bodner S. R. An Analysis of Longitudinal Elastic-Plastic Pulse Propagation. J. Appl. Mech., vol. 33, No. 2. (Русск. перев.: Клифтон, Боднер. Исследование распространения продольного упруго-пластического импульса. Прикладная механика, Тр. америк. о-ва инж. механ., 1966, № 2.)
6. Prager W. Einführung in die Kontinuumsmechanik. Basel — Stuttgart, 1961. (Русск. перев.: Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М., Изд-во иностр. лит., 1963.)
7. Reiner M., Rheology Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1958. (Русск. перев.: Рейнер М. Реология, М., Физматгиз, 1965.)
8. Freudenthal A. M., Geiringer H. The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1958. (Русск. перев.: А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.)
9. Седов Л. И. Введение в механику сплошных сред. М., Физматгиз, 1962.
10. Черных Е. М. О распространении волн в упругой среде с конечными деформациями. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4.
11. Kolsky H. Stress Waves in Solids, Oxford, 1953. (Русск. перев.: Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М. Изд-во иностр. лит., 1955.)
12. Thomas T. Plastic Flow and Fracture in Solids. New York, London, 1961. (Русск. перев.: Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.)