

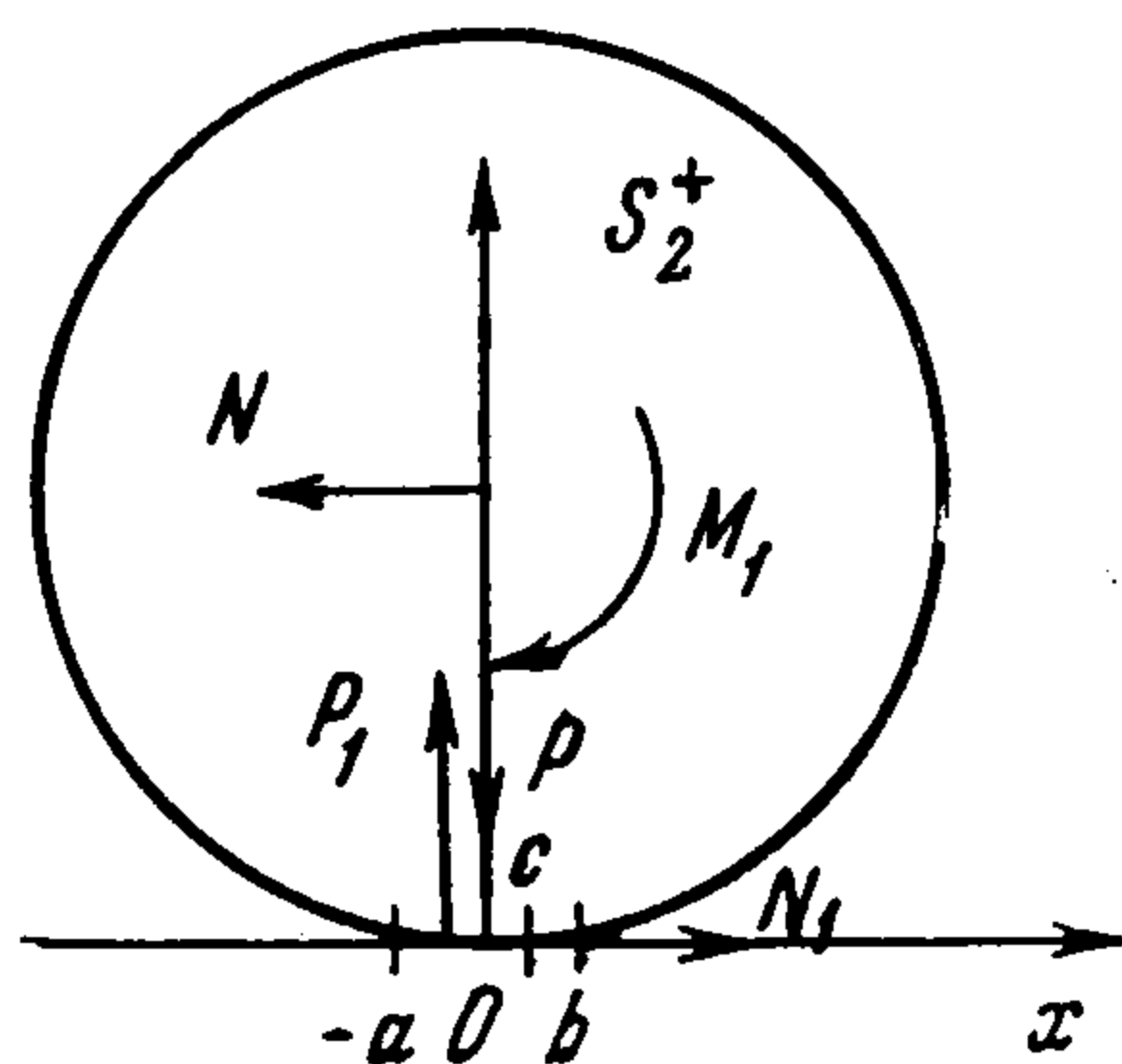
КАЧЕНИЕ УПРУГИХ ТЕЛ

В. И. Моссаковский, И. И. Мицишин

(Днепропетровск)

Рассматривается задача перекатывания упругого цилиндра по упругому основанию. Деформации тел, возникающие при качении, искажают чистое качение одного тела по другому. Реальное качение сопровождается скольжением. В настоящее время получены значительные результаты в изучении качения тел с одинаковыми упругими свойствами. Первоначальные исследования в этой области проведены Н. П. Петровым [1] и К. Рейнольдсом [2]. Эта задача позднее изучалась Фроммом [3], который в своих исследованиях ограничивается использованием результатов, полученных Герцем [4]. Исследованием сопротивления перекатывания твердого тела по упругому и неупругому основаниям занимался также А. Ю. Ишлинский [5]. В работах Н. И. Глаголева [6] и К. Дезойера [7] получены общие уравнения для изучения сопротивления перекатывания упругих тел с разными упругими постоянными. Н. И. Глаголев решает эту задачу для тел с одинаковыми упругими постоянными и изучает предельные случаи. Дезойер для общего случая получает сингулярное интегральное уравнение и рассматривает те же предельные случаи.

1. В предлагаемой работе не накладывается никаких ограничений на упругие свойства цилиндра и основания. Предполагается, что участок контакта состоит из одного участка скольжения и одного участка сцепления. Процесс качения считается квазистационарным и упругим.



Предположим, что длина линии контакта мала по сравнению с линейными размерами тел, а шероховатости настолько малы, что тела считаются гладкими. Изучаемая схема показана на фиг. 1. На цилиндр действует момент M , вертикальная сила P и тангенциальная сила N . Сила N равна и противоположно направлена реализуемой силе тяги N_1 , которая действует на ободе основания и направлена в сторону движения цилиндра.

На цилиндр действует также нормальная реакция основания $P_2 = P$. Обозначим границы линии контакта через a и b . Так как длина линии контакта мала по сравнению с линейными размерами тел, то граничные условия можно задавать вдоль прямой $y = 0$, а рассматриваемые тела заменим двумя полуплоскостями. Все, что относится к нижней полуплоскости, будем обозначать индексом 1, а относящееся к верхней полуплоскости — индексом 2.

Пусть на линии контакта на нижнюю полуплоскость действует нормальное сжимающее напряжение $Y_{y1}^-(x) = -P(x)$ и тангенциальное напряжение $X_{y1}^-(x) = T(x)$. На верхнюю полуплоскость действуют соответственно $Y_{y2}^+(x) = -P(x)$ и $X_{y2}^+(x) = T(x)$. Будем считать, что

напряжения и вращения равны нулю на бесконечности. Сформулируем граничные условия для нашей задачи:

1) нормальные и тангенциальные напряжения равны на всей линии контакта

$$Y_{y1}^-(x) = Y_{y2}^+(x), \quad X_{y1}^-(x) = X_{y2}^+(x) \quad (1.1)$$

2) на всей линии контакта нормальные перемещения в обоих телах связаны соотношением

$$v_1^-(x) - v_2^+(x) = 1/2 x^2 / R \quad (1.2)$$

3) участок контакта разбит на участок скольжения $(-a, c)$ и участок сцепления (c, b) . На этих участках граничные условия имеют вид (ν — коэффициент трения Кулона)

$$T(x) = \nu P(x), \quad u_1^-(x) = u_2^+(x) \quad (1.3)$$

Сформулируем задачу линейного сопряжения для поставленной задачи и при перечисленных граничных условиях.

Пусть в нижней полуплоскости определена кусочно-аналитическая функция $\Phi_1(z)$. Эту функцию можно продолжить через незагруженные участки оси x на верхнюю полуплоскость. Аналогично в верхней полуплоскости определена функция $\Phi_2(z)$. Известно, что напряжения и перемещения связаны с функциями $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ следующими соотношениями [8]:

$$\begin{aligned} Y_{yk}(z) - iX_{yk}(z) &= \Phi_k(z) - \Phi_k(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} \\ & \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$2\mu_k(u_k'(z) + iv_k'(z)) = \chi_k \Phi_k(z) + \Phi_k(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} \quad (1.5)$$

Удовлетворяя условие (1.1), докажем, что

$$\Phi_1(z) = -\Phi_2(z) \quad (1.6)$$

Из условий (1.2) и (1.3) получим задачу линейного сопряжения для определения функции $\Phi_1(z)$. Условие (1.2), выраженное через функцию $\Phi_1(z)$, будет иметь вид

$$k_2 \Phi_1^+(x) - k_1 \overline{\Phi_1^+}(x) + k_2 \Phi_1^-(x) - k_1 \overline{\Phi_1^-}(x) = ix / R \quad (1.7)$$

$$\left(k_1 = \frac{\chi_1}{4\mu_1} + \frac{1}{4\mu_2}, \quad k_2 = \frac{\chi_2}{4\mu_2} + \frac{1}{4\mu_1} \right)$$

Это условие справедливо на всем участке контакта. На участках сцепления и скольжения имеем еще по одному условию для определения функции $\Phi_1(z)$. Эти условия имеют вид

$$k_2 \Phi_1^+(x) + k_1 \overline{\Phi_1^+}(x) + k_2 \overline{\Phi_1^-}(x) + k_1 \Phi_1^-(x) = 0 \quad (1.8)$$

$$(\nu + i) \Phi_1^+(x) - (\nu - i) \overline{\Phi_1^+}(x) = (\nu + i) \Phi_1^-(x) - (\nu - i) \overline{\Phi_1^-}(x) \quad (1.9)$$

Таким образом, на всем участке контакта имеем по два условия для определения функций $\Phi_1(z)$ и $\overline{\Phi_1}(z)$. Получили задачу линейного сопряжения для определения функций $\Phi_1(z)$ и $\overline{\Phi_1}(z)$ с кусочно-постоянными коэффициентами.

2. Известно, что однородная задача с кусочно-постоянными коэффициентами эквивалентна задаче теории линейных дифференциальных уравнений. По заданным условиям на границе контакта можно построить дифференциальное уравнение класса Фукса с тремя особыми точками. Отообразим плоскость комплексного переменного z в плоскость комплексного переменного w так, чтобы точки a, c, b перешли соответственно в точки $0, 1$ и ∞ плоскости w . Уравнение Гаусса имеет вид [9]

$$w(1-w)\Phi_1''(w) + (1 + \varphi/\pi - 2w)\Phi_1'(w) - (1/4 + \beta_1^2)\Phi_1(w) = 0$$

$$\left(\varphi = \arctg \frac{k_2 + k_1}{v(k_2 - k_1)}, \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k_1}{k_2}\right) \quad (2.1)$$

Частные решения этого уравнения в окрестности особой точки $w = 0$ будут

$$U_0(w) = F\left(\frac{1}{2} - i\beta_1, \frac{1}{2} + i\beta_1, 1 + \varphi/\pi, w\right) \quad (2.2)$$

$$V_0(w) = w^{-\varphi/\pi} F\left(\frac{1}{2} - \varphi/\pi - i\beta_1, \frac{1}{2} - \varphi/\pi + i\beta_1, 1 - \varphi/\pi, w\right)$$

В окрестности особой точки $w = 1$ частные решения уравнения (2.1) будут

$$U_1(w) = F\left(\frac{1}{2} - i\beta_1, \frac{1}{2} + i\beta_1, 1 - \varphi/\pi, 1 - w\right) \quad (2.3)$$

$$V_1(w) = (1-w)^{\varphi/\pi} F\left(\frac{1}{2} + \varphi/\pi - i\beta_1, \frac{1}{2} + \varphi/\pi + i\beta_1, 1 + \varphi/\pi, 1 - w\right)$$

В окрестности бесконечно удаленной точки решения уравнения (2.1) имеют вид

$$U_\infty(w) = \left(\frac{1}{w}\right)^{1/2 - i\beta_1} F\left(\frac{1}{2} - i\beta_1, \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{\pi} - i\beta_1, 1 - 2i\beta_1, \frac{1}{w}\right)$$

$$V_\infty(w) = \left(\frac{1}{w}\right)^{1/2 + i\beta_1} F\left(\frac{1}{2} + i\beta_1, \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{\pi} + i\beta_1, 1 + 2i\beta_1, \frac{1}{w}\right) \quad w = \frac{c-b}{c+a} \frac{z+a}{z-b}$$

Воспользовавшись соотношениями (1.7) и (1.9), построим два линейно независимых частных решения однородной задачи линейного сопряжения на участке скольжения для функций $\Phi_1(w)$ и $\bar{\Phi}_1(w)$:

$$\Phi_1^{+1}(w) = - \frac{i[k_2(v+i) - k_1(v-i)]}{2(k_1 + k_2)} \left(U_0(w) - \frac{v-i}{v+i} V_0(w) \right) \quad (2.5)$$

$$\bar{\Phi}_1^{+1}(w) = - \frac{i[k_2(v+i) - k_1(v-i)]}{2(k_1 + k_2)} (U_0(w) - V_0(w))$$

$$\Phi_1^{+2}(w) = - \frac{i[k_2(v+i) - k_1(v-i)]}{2(k_1 + k_2)} (U_0(w) - V_0(w)) \quad (2.6)$$

$$\bar{\Phi}_1^{+2}(w) = - \frac{i[k_2(v+i) - k_1(v-i)]}{2(k_1 + k_2)} \left(U_0(w) - \frac{v+i}{v-i} V_0(w) \right)$$

Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, находим частные решения неоднородной задачи линейного сопряжения (1.7) — (1.9) для

функций $\Phi_1(w)$ и $\bar{\Phi}_1(w)$. Эти частные решения имеют вид

$$\Phi_1^3(z) = \frac{iz}{2R(k_1 + k_2)}, \quad \bar{\Phi}_1^3(z) = \frac{-iz}{2R(k_1 + k_2)} \quad (2.7)$$

По первоначальной постановке задачи нужно найти решение задачи линейного сопряжения (1.7) — (1.9) такое, чтобы при $z = \infty$ оно обращалось в нуль и при больших $|z|$ искомое решение имело вид

$$\Phi_1(z) = -\frac{X + iY}{2\pi z} + o\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \bar{\Phi}_1(z) = -\frac{X - iY}{2\pi z} + o\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (2.8)$$

где (Y, X) — главный вектор внешних усилий.

Известно, что если $\Phi_1(z)$ является решением однородной задачи линейного сопряжения, то $P_1(z)\Phi_1(z)$ также будет решением этой задачи. Для нахождения решения, удовлетворяющего перечисленным условиям, будем искать это решение в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= P_1(z)\Phi_1^1(z) + Q_1(z)\Phi_1^2(z) + \Phi_1^3(z) \\ \bar{\Phi}_1(z) &= P_1(z)\bar{\Phi}_1^1(z) + Q_1(z)\bar{\Phi}_1^2(z) + \bar{\Phi}_1^3(z) \end{aligned} \quad (2.9)$$

В соотношениях (2.9) $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ — полином первой степени с неопределенными коэффициентами. После определения коэффициентов полиномов $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ соотношения (2.9) примут вид

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(x) &= -\frac{1}{2R(k_1 + k_2)} \left[\frac{D}{|D|} (\nu - i) \left(\frac{V_0'}{V_0} - x \right) \frac{V_0(x)}{V_0} - \nu \left(\frac{U_0'}{U_0} - x \right) \frac{U_0(x)}{U_0} \right] + \\ &\quad + \frac{ix}{2R(k_1 + k_2)} \\ \bar{\Phi}_1^+(x) &= -\frac{1}{2R(k_1 + k_2)} \left[\frac{D}{|D|} (\nu + i) \left(\frac{V_0'}{V_0} - x \right) \frac{V_0(x)}{V_0} - \nu \left(\frac{U_0'}{U_0} - x \right) \frac{U_0(x)}{U_0} \right] - \\ &\quad - \frac{ix}{2R(k_1 + k_2)} \\ \Phi_1^-(x) &= -\frac{1}{2R(k_1 + k_2)} \left[\frac{\bar{D}}{|D|} (\nu - i) \left(\frac{V_0'}{V_0} - x \right) \frac{V_0(x)}{V_0} - \nu \left(\frac{U_0'}{U_0} - x \right) \frac{U_0(x)}{U_0} \right] + \\ &\quad + \frac{ix}{2R(k_1 + k_2)} \\ \bar{\Phi}_1^-(x) &= -\frac{1}{2R(k_1 + k_2)} \left[\frac{\bar{D}}{|D|} (\nu + i) \left(\frac{V_0'}{V_0} - x \right) \frac{V_0(x)}{V_0} - \nu \left(\frac{U_0'}{U_0} - x \right) \frac{U_0(x)}{U_0} \right] - \\ &\quad - \frac{ix}{2R(k_1 + k_2)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$(D = k_2(\nu + i) - k_1(\nu - i), \quad |D| = \sqrt{\nu^2(k_2 - k_1)^2 + (k_1 + k_2)^2})$$

Из тех же соображений получим два уравнения для определения особых точек — a , c и b . Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\pi}{R(k_1 + k_2)} \left(\frac{V_0'^2}{V_0^2} - \frac{V''}{2V_0} \right) = -Y, \quad \frac{\pi\nu}{R(k_1 + k_2)} \left[\left(\frac{U_0'^2}{U_0^2} - \frac{U_0''}{2U_0} \right) - \left(\frac{V_0'^2}{V_0^2} - \frac{V''}{2V_0} \right) \right] = -X \quad (2.11)$$

где $U_0, U_0', U_0'', V_0, V_0', V_0''$ — коэффициенты разложения функций $U_0(z)$ и $V_0(z)$ при больших $|z|$.

Для нахождения функций $\Phi_1(z)$ и $\bar{\Phi}_1(z)$ на участке сцепления воспользуемся аналитическим продолжением $U_0(z)$ и $V_0(z)$ за область сходимости рядов. Формулы аналитического продолжения $U_0(z)$ и $V_0(z)$ имеют вид [9]

$$\begin{aligned} U_0(z) &= \beta_{11}e^{\pm\pi i\alpha}U_\infty(z) + \beta_{12}e^{\pm\pi i\beta}V_\infty(z) \\ V_0(z) &= \beta_{21}e^{\mp\pi i(\gamma-\alpha-1)}U_\infty(z) + \beta_{22}e^{\mp\pi i(\gamma-\beta-1)}V_\infty(z) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$(\alpha = 1/2 - i\beta_1, \beta = 1/2 + i\beta_1, \gamma = 1 + \varphi/\pi)$$

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{\Gamma(1 + \varphi/\pi)\Gamma(1 + 2i\beta_1)}{2i\beta_1\Gamma(1/2 + i\beta_1)\Gamma(1/2 + \varphi/\pi + i\beta_1)}, & \beta_{12} &= \bar{\beta}_{11} \\ \beta_{21} &= \frac{(1/2 - \varphi/\pi + i\beta_1)\Gamma(1 - \varphi/\pi)\Gamma(1 + 2i\beta_1)}{2i\beta_1\Gamma(1/2 + i\beta_1)\Gamma(3/2 - \varphi/\pi + i\beta_1)}, & \beta_{22} &= \bar{\beta}_{21} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Таким образом, можем написать решение задачи линейного сопряжения на всем участке контакта. Компоненты напряжения на участке контакта находятся по формулам:

1) на участке скольжения

$$P(x) = -\frac{1}{R|D|} \left(\frac{V_0'}{V_0} - x \right) \frac{V_0(x)}{V_0}, \quad T(x) = -\frac{\nu}{R|D|} \left(\frac{V_0'}{V_0} - x \right) \frac{V_0(x)}{V_0} \quad (2.14)$$

2) на участке сцепления

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{1}{2R\sqrt{k_1k_2}} \left(\frac{V_0'}{V_0^2} - \frac{x}{V_0} \right) (\beta_{21}U_\infty(x) + \beta_{22}V_\infty(x)) \\ T(x) &= -\frac{\nu}{2R\sqrt{k_1k_2}} \left[\left(\frac{V_0'}{V_0^2} - \frac{x}{V_0} \right) (\beta_{21}U_\infty(x) + \beta_{22}V_\infty(x)) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{U_0'}{U_0^2} - \frac{x}{U_0} \right) (\beta_{11}U_\infty(x) + \beta_{12}V_\infty(x)) \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Третье уравнение для определения концов контакта и точки разделения зоны контакта получим из требования ограниченности напряжений в точке $z = -a$.

3. Рассмотрим случай одинаковых упругих постоянных. При одинаковых упругих постоянных будем иметь $k_1 = k_2 = k$, $\beta_1 = 0$ и $\varphi = 1/2\pi$. Будем искать решение нашей задачи, имеющее интегрируемую особенность в точке $z = -a$ и ограниченное в точках $z = c$ и b . В этом случае параметры уравнения Гаусса будут $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$ и $\gamma = 3/2$, а само уравнение Гаусса имеет вид

$$w(1-w)\Phi_1''(w^{-1/2}) + (3/2 - 2w^{-1/2})\Phi_1'(w^{-1/2}) - 1/4\Phi_1(w) = 0 \quad (3.1)$$

Решения этого уравнения аналитические в окрестностях особых точек $w = 1, 0$ и ∞ будут иметь вид

$$\begin{aligned} U_0(w) &= F(1/2, 1/2, 3/2, w) = w^{-1/2} \arcsin(w)^{1/2} \\ V_0(w) &= w^{-1/2} F(0, 0, 1/2, w) = w^{-1/2} \\ U_1(w) &= F(1/2, 1/2, 1/2, 1-w) = w^{-1/2} \\ V_1(w) &= (1-w)^{1/2} F(1, 1, 3/2, 1-w) = w^{-1/2} \arccos(w)^{1/2} \\ U_\infty(w) &= V_\infty(w) = w^{-1/2} F(1/2, 0, 1, \frac{1}{w}) = w^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение задачи линейного сопряжения будем искать в таком же виде, как и в общем случае. На участке проскальзывания предельные значения искомых функций $\Phi_1(z)$ и $\bar{\Phi}_1(z)$ выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} \Phi_{1\pm}(x) &= \frac{1}{4Rk} \left[\pm i (\nu - i) \left(\frac{V_0'}{V_0} - x \right) \frac{V_0(x)}{V_0} + \nu \left(\frac{U_0'}{U_0} - x \right) \frac{U_0(x)}{U_0} + ix \right] \\ \bar{\Phi}_{1\pm}(x) &= \frac{1}{4Rk} \left[\pm i (\nu + i) \left(\frac{V_0'}{V_0} - x \right) \frac{V_0(x)}{V_0} + \nu \left(\frac{U_0'}{U_0} - x \right) \frac{U_0(x)}{U_0} - ix \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Напишем теперь выражения для искомых функций на участке сцепления, учитывая изменения функций $U_0(w)$ и $V_0(w)$ при обходе точки $w = 1$. Функция $V_0(w)$ определена всюду, поэтому нет надобности в продолжении этой функции. Функция $U_0(w)$ на сторонах разреза вдоль действительной оси от 1 до ∞ имеет вид

$$U_0^\pm(w) = w^{-1/2} \arccos(e^{\mp 1/2 \pi i} (w - 1)^{1/2}) \quad (3.4)$$

Теперь можно записать выражения для искомых функций на участке сцепления

$$\begin{aligned} \Phi_{1\pm}(x) &= \frac{1}{4Rk} \left[\pm i (\nu - i) \left(\frac{V_0'}{V_0^2} - \frac{x}{V_0} \right) w^{-1/2} + \right. \\ &+ \left. \nu \left(\frac{U_0'}{U_0^2} - \frac{x}{U_0} \right) \arccos(e^{\mp 1/2 \pi i} (w - 1)^{1/2}) w^{-1/2} + ix \right] \\ \bar{\Phi}_{1\pm}(x) &= \frac{1}{4Rk} \left[\pm i (\nu + i) \left(\frac{V_0'}{V_0^2} - \frac{x}{V_0} \right) w^{-1/2} + \right. \\ &+ \left. \nu \left(\frac{U_0'}{U_0^2} - \frac{x}{U_0} \right) \arccos(e^{\mp 1/2 \pi i} (w - 1)^{1/2}) w^{-1/2} - ix \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Формулы для компонент напряжений будут:

1) на участке проскальзывания

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{\Omega(x)}{2Rk} \left(\frac{V_0'}{V_0^2} - \frac{x}{V_0} \right) \\ T(x) &= \frac{\nu \Omega(x)}{2Rk} \left(\frac{V_0'}{V_0^2} - \frac{x}{V_0} \right), \quad \Omega(x) = \left(\frac{c - b}{c + a} \frac{x + a}{x - b} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

2) на участке сцепления

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{\Omega(x)}{2Rk} \left(\frac{V_0'}{V_0^2} - \frac{x}{V_0} \right), \\ T(x) &= \frac{\nu \Omega(x)}{2Rk} \left[\left(\frac{V_0'}{V_0^2} - \frac{x}{V_0} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{U_0'}{U_0^2} - \frac{x}{U_0} \right) \ln \frac{\sqrt{w} - \sqrt{w-1}}{\sqrt{w} + \sqrt{w-1}} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь U_0, U_0', V_0, V_0' — коэффициенты разложения функций $U_0(z)$ и $V_0(z)$ при больших $|z|$. Уравнения (2.11) для определения концов контакта и точки, разделяющей участок контакта, будут

$$\frac{\pi(a+b)(3b-a)}{16Rk} = -Y \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4Rk} \left\{ (a+b)^{1/2} (b-c)^{1/2} (c+a+4b) \left[\operatorname{Arsh} \left(\frac{b-c}{c+a} \right)^{-1/2} \right]^{-1} - \right. \\ \left. - 2(a+b)(b-c) \left[\operatorname{Arsh} \left(\frac{b-c}{c+a} \right)^{-1/2} \right]^{-2} \right\} = X \end{aligned}$$

После подстановки величин V_0 и V_0' в формулу для нормального напряжения, она примет вид

$$P(x) = \frac{1}{2Rk} \left(\frac{b-x}{x+a} \right)^{1/2} \left(\frac{a+b}{2} + x \right) \quad (3.9)$$

Чтобы решение было ограничено в точке $z = -a$, положим $a = b$. Тогда формула (3.9) примет вид

$$P(x) = \frac{1}{2Rk} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3.10)$$

Формула для определения концов контакта будет иметь вид

$$a = \sqrt{RP \frac{x+1}{\mu\pi}} \quad (3.11)$$

Последние две формулы совпадают с результатами Н. И. Глаголева [6].

Поступила 25 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Н. П. Сопротивление поезда на железной дороге. СПб, 1899.
2. Reynolds O. On Rolling — Friction. Philos. Tras. Roy. Soc., London, 1876, vol. 166 [R. 1].
3. Fromm H. Berechtung des Schlupfes beim Rollen deformierbaren Scheiben. 1927. Z. angew. Math. und mech., Bd. 7, Hft. 1.
4. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte. Gesammelte Werke, Leipzig, 1835, Bd. 1.
5. Ишлинский А. Ю. Трение качения. ПММ, 1938, т. 2, вып. 2.
6. Глаголев Н. И. Сопротивление перекачиванию цилиндрических тел. ПММ, 1945, т. 9, вып. 4.
7. Desoyer K. Zur rollengen Reibung zwischen Scheiben mit verschiedenen Elastizitätskonstanten. Österr. Ingr.— Arch., 1957, 11, No. 2.
8. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е. М., «Наука», 1966.
9. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1950.