Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

О БАЗИСНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ

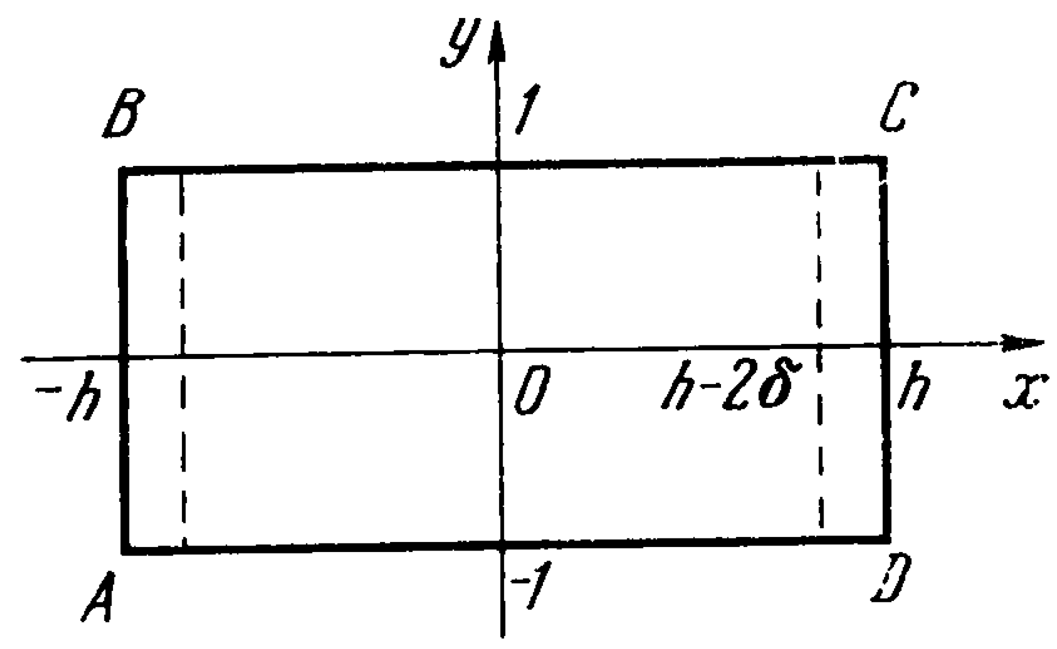
И. И. Ворович, В. Е. Ковальчук
(Ростов-на-Дону)

В работе рассматривается первая основная задача теории упругости для прямоугольника. В предположении, что решение этой задачи есть функция, четвертые производные которой суммируемы со степенью $p > 2$ по прямоугольнику, доказывается, что оно может быть разложено в ряд по собственным функциям рассматриваемой задачи, сходящийся равномерно внутри прямоугольника. Устанавливается также характер сходимости ряда на границе и единственность разложения.

1. Рассмотрим первую основную задачу теории упругости для прямоугольника $ABCD$ (фиг. 1). Предположим, что на сторонах BC и AD напряжения отсутствуют (их всегда можно снять решением некоторой задачи для полосы). Функция напряжений U рассматриваемой задачи, будучи бигармонической в прямоугольнике $ABCD$, должна удовлетворять следующим условиям: $U_{xx} = U_{xy} \equiv 0$ на BC и AD, $U_{yy} = \varphi_-(y)$ и $U_{xy} = \psi_-(y)$ на AB, $U_{yy} = \varphi_+(y)$ и $U_{xy} = \psi_+(y)$ на CD. Будем предполагать выполненными условия равновесия прямоугольника

$$\int_{-1}^{1} (\varphi_+ - \varphi_-)\, dy = 0, \qquad \int_{-1}^{1} (\psi_+ - \psi_-)\, dy = 0$$

$$\int_{-1}^{1} (\varphi_+ - \varphi_-)\, y\, dy + 2h \int_{-1}^{1} \psi_+\, dy = 0 \qquad (1.1)$$



Фиг. 1

Выделим из функции напряжений U составляющую, соответствующую неуравновешенной части напряжений на AB и CD. Введем функцию

$$U_0 = \frac{1}{4} y^2 \int_{-1}^{1} \varphi_+\, ds + \frac{1}{4} y^3 \int_{-1}^{1} \varphi_+ s\, ds -$$

$$- \frac{3}{4} y (h - x) \int_{-1}^{1} \psi_+\, ds + \frac{1}{4} y^3 (h - x) \int_{-1}^{1} \psi_+\, ds$$

и положим $u = U - U_0$.

Очевидно, функция u удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$u_{xx} = u_{xy} \equiv 0 \quad \text{на } BC \text{ и } AD \qquad (1.2)$$

На CD имеем

$$u_{yy} = \varphi_+(y) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \varphi_+\, ds - \frac{3}{2}\, y \int_{-1}^{1} \varphi_+ s\, ds = \Phi_+(y) \qquad (1.3)$$

$$u_{xy} = \psi_+(y) - \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} \psi_+\, ds\, (1 - y^2) = \Psi_+(y) \qquad (1.4)$$

Из (1.3),(1.4) легко вывести соотношения

$$\int_{-1}^{1} \Phi_+ dy = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \Phi_+ y\, dy = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \Psi_+ dy = 0 \tag{1.5}$$

которые будут использованы ниже. На AB получаем

$$u_{yy} = \varphi_-(y) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi_+ ds - \frac{3}{2} y \int_{-1}^{1} \varphi_+ s\, ds - 3hy \int_{-1}^{1} \psi_+ ds = \Phi_-(y) \tag{1.6}$$

$$u_{xy} = \psi_-(y) - \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} \psi_+ ds\,(1 - y^2) = \Psi_-(y) \tag{1.7}$$

Из (1.1, 6, 7) следует

$$\int_{-1}^{1} \Phi_- ds = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \Phi_- s\, ds = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \Psi_- ds = 0 \tag{1.8}$$

Найдем теперь на контуре $ABCD$ значения u, u_x, u_y. Функция u определена с точностью до линейного агрегата, поэтому в некоторой точке, например A, можно считать $u = u_x = u_y = 0$. В силу (1.6,7) имее

$$u_y = \int_{-1}^{y} \Phi_- ds, \qquad u_x = \int_{-1}^{y} \Psi_- ds = f_3(y) \quad \text{на } AB \tag{1.9}$$

В точке B в силу (1.8) получаем $u_x = u_y = 0$, поэтому из (1.2) следует, что

$$u_x = u_y \equiv 0 \quad \text{на } BC \tag{1.10}$$

Далее, на CD имеем

$$u_y = \int_{1}^{y} \Phi_+ ds, \qquad u_x = \int_{1}^{y} \Psi_+ ds = f_1(y) \tag{1.11}$$

В силу (1.11, 5) в точке D $u_x = u_y = 0$, следовательно,

$$u_x = u_y \equiv 0 \text{ на } AD \tag{1.12}$$

Таким образом, первые производные функции u определены на всем контуре $ABCD$. Имеем далее

$$u = \int_{-1}^{y} u_y\, ds = \int_{-1}^{y}\int_{-1}^{s} \Phi_- ds_1\, ds = \int_{-1}^{y} (y - s)\,\Phi_- ds = f(y) \quad \text{на } AB \tag{1.13}$$

В точке B в силу (1.8) получаем $u = 0$ и в соответствии с (1.10) на BC:

$$u \equiv 0 \tag{1.14}$$

На CD имеем

$$u = \int_{1}^{y} u_y\, ds = \int_{1}^{y}\int_{1}^{s} \Phi_+ ds_1\, ds = \int_{1}^{y} (y - s)\,\Phi_+ ds = f_2(y) \tag{1.15}$$

В точке D, в частности, $u = 0$ в силу (1.5). Наконец, из (1.12) следует, что

$$u \equiv 0 \text{ на } AD \tag{1.16}$$

Таким образом, на основании (1.9—16) для бигармонической функции u получаем такие граничные условия:

$$u|_{y=\pm 1} = 0, \qquad u_y|_{y=\pm 1} = 0,$$

$$u|_{x=-h} = f(y), \quad u|_{x=h} = f_2(y), \quad u_x|_{x=-h} = f_3(y), \quad u_x|_{x=h} = f_1(y)$$

Если нагружение пластины четно по x, то можно принять $f_2(y) = f(y)$, $-f_3(y) = f_1(y)$, и окончательно имеем (1.17)

$$\Delta^2 u = 0; \quad u|_{y=\pm 1} = 0, \quad u_y|_{y=\pm 1} = 0, \quad u|_{x=\pm h} = f(y), \quad u_x|_{x=\pm h} = \pm f_1(y)$$

2. Обычно задачи типа (1.17) решают путем разделения переменных. При этом решение задачи (1.17) следует искать в виде

$$u = \sum_k c_k a_k(y) \cos \lambda_k x \tag{2.1}$$

Здесь $a_k(y)$ — собственные функции задачи

$$a^{IV} - 2\lambda^2 a'' + \lambda^4 a = 0, \qquad a|_{y=\pm 1} = 0, \qquad a'|_{y=\pm 1} = 0$$

При попытке удовлетворить краевым условиям (1.17) приходим к разложениям

$$f(y) = \sum_k c_k \cos \lambda_k h a_k(y), \qquad f_1(y) = -\sum_k c_k \lambda_k \sin \lambda_k h a_k(y) \tag{2.2}$$

Таким образом, решение задачи (1.17) упирается в проблему разложения пары произвольных функций $f(y)$, $f_1(y)$ в ряды (2.2).

Эта проблема была поставлена П. Ф. Папковичем [1], и в общем виде выглядит так: найти одновременное разложение двух независимых одна от другой вещественных функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$ в ряды вида

$$f_1(y) = \sum_k c_k L_1[a_k(y)], \qquad f_2(y) = \sum_k c_k L_2[a_k(y)]$$

Здесь c_k — комплексные коэффициенты, одинаковые в обоих разложениях, L_1, L_2 — два различных линейных оператора, вид которых зависит от рассматриваемой конкретной задачи, $a_k(y)$ — собственные функции этой задачи.

В настоящей работе развивается новый подход к исследованию задач типа (1.17). В результате сначала получаем представление (2.1) решения задачи (1.17) внутри прямоугольника $ABCD$, а отсюда как следствие вытекает решение проблемы (2.2).

3. Пусть четвертые производные решения u задачи (1.17) суммируемы по прямоугольнику $ABCD$ со степенью $p > 2$. (Вопрос о том, какие ограничения надо наложить на функции f и f_1, чтобы требуемое условие выполнялось, подлежит специальному исследованию и в данной работе не затрагивается.)

Продолжим u на полосу $|y| \leqslant 1$. Для этого возьмем четную сглаживающую функцию $g(x)$, $|x| \leqslant h$, равную единице при $|x| \leqslant h - \delta$, $0 < \delta < h/2$, бесконечно дифференцируемую и исчезающую вместе со всеми производными при $|x| = h$, и положим

$$u_1(x, y) = \begin{cases} u(x, y) g(x) & (|x| \leqslant h) \\ 0 & (|x| > h) \end{cases}$$

Определенная таким образом в полосе $|y| \leqslant 1$ функция $u_1(x, y)$ будет решением задачи

$$\Delta^2 u_1 = \varphi(x, y); \qquad u_1|_{y=\pm 1} = 0, \quad u_{1y}|_{y=\pm 1} = 0 \tag{3.1}$$

Здесь функция

$$\varphi(x, y) = \Delta^2(ug) = 4(u_{xxx} + u_{xyy}) g' + 2(3u_{xx} + u_{yy}) g'' + 4u_x g''' + ug^{\mathrm{IV}} \tag{3.2}$$

очевидно, отлична от нуля только при $h - \delta < |x| < h$ и четна по x.

Применяя к задаче (3.1) преобразование Фурье по переменной x, сведем ее к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(u^*)^{\mathrm{IV}} - 2\lambda^2 (u^*)'' + \lambda^4 u^* = \varphi^*(y, \lambda), \qquad u^*|_{y=\pm 1} = 0, \quad (u^*)'|_{y=\pm 1} = 0 \tag{3.3}$$

Здесь (3.4)

$$u^*(y,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x, y) e^{-i\lambda x} dx, \qquad \varphi^*(y,\lambda) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{h-\delta}^{\infty} \varphi(x, y) \cos \lambda x \, dx$$

Дифференциальный оператор (3.3) имеет счетный набор простых собственных значений, удовлетворяющих уравнению

$$D(\lambda) = (\lambda + \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda)(\lambda - \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda) = 0 \quad (\lambda \neq 0) \tag{3.5}$$

Им соответствуют собственные функции

$$a_k^{(1)}(y) = \lambda_k^{(1)} y \operatorname{sh} \lambda_k^{(1)} y + \operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(1)} \operatorname{ch} \lambda_k^{(1)} y, \text{ если } \lambda_k^{(1)} + \operatorname{sh} \lambda_k^{(1)} \operatorname{ch} \lambda_k^{(1)} = 0 \tag{3.6}$$

$$a_k^{(2)}(y) = \lambda_k^{(2)} y \operatorname{ch} \lambda_k^{(2)} y - \operatorname{ch}^2 \lambda_k^{(2)} \operatorname{sh} \lambda_k^{(2)} y, \text{ если } \lambda_k^{(2)} - \operatorname{sh} \lambda_k^{(2)} \operatorname{ch} \lambda_k^{(2)} = 0 \tag{3.7}$$

Отметим, что уравнение (3.5), наряду с корнем λ_k, имеет всегда корни $-\lambda_k$, $\overline{\lambda}_k$ и $-\overline{\lambda}_k$ и корни, лежащие в первой четверти λ-плоскости имеют асимптотику

$$\lambda_k^{(1)} = {}^1/_2 \ln(3\pi + 4k\pi) + i(3\pi/4 + k\pi) + O(k^{-1} \ln k) \tag{3.8}$$

$$\lambda_k^{(2)} = {}^1/_2 \ln(\pi + 4k\pi) + i(\pi/4 + k\pi) + O(k^{-1} \ln k) \tag{3.9}$$

Дифференциальный оператор (3.3) обратим при помощи функции Грина. Если $G(y, \eta, \lambda)$ — функция Грина оператора (3.3), то по определению имеем

$$u^*(y, \lambda) = \int_{-1}^{1} G(y, \eta, \lambda) \varphi^*(\eta, \lambda) d\eta \tag{3.10}$$

и $G(y, \eta, \lambda)$ имеет следующий вид:

$$G(y, \eta, \lambda) = \frac{1}{4\lambda^3} \Big[\operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda \operatorname{ch}\lambda(y + \eta) - \tag{3.11}$$

$$- (1 \pm y \mp \eta) \lambda \operatorname{ch} \lambda (y - \eta) \pm \operatorname{sh} \lambda (y - \eta) - \frac{a^{(1)}(y) a^{(1)}(\eta)}{\operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda + \lambda} - \frac{a^{(2)}(y) a^{(2)}(\eta)}{\operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda - \lambda} \Big]$$

Здесь верхний знак берется при $y < \eta$, нижний — при $y > \eta$,

$$a^{(1)}(y) = \lambda y \operatorname{sh} \lambda y + \operatorname{sh}^2 \lambda \operatorname{ch} \lambda y, \quad a^{(2)}(y) = \lambda y \operatorname{ch} \lambda y - \operatorname{ch}^2 \lambda \operatorname{sh} y$$

Из (3.11) видно, что $G(y, \eta, \lambda)$ — мероморфная функция параметра λ, причем полюсами ее являются корни уравнения (3.5), т. е. собственные значения оператора (3.3). Не составляет большого труда показать, что на контурах $|\lambda| = |{}^1/_2 \ln 4n\pi + in\pi|$ функция $G(y, \eta, \lambda)$ имеет оценку $|G(y, \eta, \lambda)| \leqslant C|\lambda|^{-1}$, $0 < C < \infty$, а потому может быть представлена ([2], стр. 321) в виде суммы главных частей

$$G_1^l(y, \eta, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k^{(1)}(y)\, a_k^{(1)}(\eta)}{8\lambda_k^{(1)3} \operatorname{ch}^2 \lambda_k^{(1)} (\lambda_k^{(1)} - \lambda)} + \frac{a_k^{(2)}(y)\, a_k^{(2)}(\eta)}{8\lambda_k^{(2)3} \operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(2)} (\lambda_k^{(2)} - \lambda)} \right] \tag{3.12}$$

причем ряд справа сходится равномерно по параметрам y, η, λ в любой конечной части λ-плоскости[1]. Из (3.6—9) следует, что этот ряд равномерно сходится, когда λ пробегает всю вещественную ось.

Вставим (3.12) в (3.10) и произведем почленное интегрирование, что возможно в силу равномерной сходимости (3.12) по всем параметрам. Будем иметь

$$u^*(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k^{(1)}(y)}{8\lambda_k^{(1)3} \operatorname{ch}^2 \lambda_k^{(1)} (\lambda_k^{(1)} - \lambda)} \int_{-1}^{1} a_k^{(1)}(\eta)\, \varphi^*(\eta, \lambda)\, d\eta + \right.$$
$$\left. + \frac{a_k^{(2)}(y)}{8\lambda_k^{(2)3} \operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(2)} (\lambda_k^{(2)} - \lambda)} \int_{-1}^{1} a_k^{(2)}(\eta)\, \varphi^*(\eta, \lambda)\, d\eta \right] \tag{3.13}$$

причем ряд справа сходится равномерно по y и λ.

Применим к (3.13) обратное преобразование Фурье и вставим вместо $\varphi^*(\eta, \lambda)$ ее выражение из (3.4). Получим

$$u_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\lambda x} \left[\frac{a_k^{(1)}(y)}{8\lambda_k^{(1)3} \operatorname{ch}^2 \lambda_k^{(1)} (\lambda_k^{(1)} - \lambda)} \times \right.$$
$$\times \int_{-1}^{1} a_k^{(1)}(\eta) \int_{h-\delta}^{h} \varphi(\xi, \eta) \cos \lambda\xi \, d\xi\, d\eta +$$
$$\left. + \frac{a_k^{(2)}(y)}{8\lambda_k^{(2)3} \operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(2)} (\lambda_k^{(2)} - \lambda)} \int_{-1}^{1} a_k^{(2)}(\eta) \int_{h-\delta}^{h} \varphi(\xi, \eta) \cos \eta\xi \, d\xi\, d\eta \right] \tag{3.14}$$

Докажем законность почленного интегрирования (3.14). Очевидно, для этого достаточно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} T_k(\lambda)\, d\lambda \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

---

[1] В (3.12) и в дальнейшем одному индексу k отвечают четыре слагаемых, соответствующих корням λ_k, $-\lambda_k$, $\overline{\lambda}_k$, $-$ и $-\lambda_k$.

Здесь через $T_k(\lambda) = T_k^{(1)}(\lambda) + T_k^{(2)}(\lambda)$ обозначен k-й член под знаком суммы в (3.14). Имеем, используя (3.2, 6,7),

$$\left|\int_{-1}^{1} a_k(\eta)\int_{h-\delta}^{h}\varphi(\xi,\eta)\cos\lambda\xi\,d\xi\,d\eta\right| = \frac{1}{|\lambda|}\left|\int_{-1}^{1} a_k(\eta)\int_{h-\delta}^{h}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\sin\lambda\xi\,d\xi\,d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C|\lambda_k|^{3/2}}{|\lambda|}\int_{-1}^{1}\int_{h-\delta}^{h}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right|d\xi\,d\eta \leqslant C_1\frac{|\lambda_k|^{3/2}}{|\lambda|}$$

Отсюда

$$|T_k(\lambda)| \leqslant |T_k^{(1)}(\lambda)| + |T_k^{(2)}(\lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant C_2\left(\frac{1}{|\lambda|\cdot|\lambda_k^{(1)}|\cdot|\lambda_k^{(1)}-\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|\cdot|\lambda_k^{(2)}|\cdot|\lambda_k^{(2)}-\lambda|}\right)$$

Так как λ лежит на действительной оси, а λ_k имеют асимптотику (3.8, 9), то легко показать, что

$$|\lambda_k - \lambda| = |\lambda_k - \lambda|^{1/2}|\lambda_k - \lambda|^{1/2} \geqslant \alpha|\lambda|^{1/2}|\lambda_k|^{1/2} \qquad (\alpha > 0)$$

Окончательно имеем

$$|T_k(\lambda)| \leqslant C_3|\lambda|^{-3/2}(|\lambda_k^{(1)}|^{-3/2} + |\lambda_k^{(2)}|^{-3/2})$$

Так что

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}T_k(\lambda)\,d\lambda\right| \leqslant \left|\int_{-A}^{A}\sum_{k=n+1}^{\infty}T_k(\lambda)\,d\lambda\right| + \left|\left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_{A}^{\infty}\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}T_k(\lambda)\,d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-A}^{A}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}T_k(\lambda)\right|d\lambda + 2\int_{A}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}|T_k(\lambda)|\,d\lambda \leqslant 2A\varepsilon + 8C_3\varepsilon\int_{A}^{\infty}\lambda^{-3/2}\,d\lambda = M\varepsilon$$

$$(n > N)$$

Итак, почленное интегрирование законно. Имеем

$$u_1(x,y) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k^{(1)}(y)}{8\lambda_k^{(1)3}\operatorname{ch}^2\lambda_k^{(1)}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}}{\lambda_k^{(1)}-\lambda}\,d\lambda\,\times\right.$$

$$\times\int_{-1}^{1}a_k^{(1)}(\eta)\,d\eta\int_{h-\delta}^{h}\varphi(\xi,\eta)\cos\lambda\xi\,d\xi +$$

$$\left. + \frac{a_k^{(2)}(y)}{8\lambda_k^{(2)3}\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(2)}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}}{\lambda_k^{(2)}-\lambda}\,d\lambda\int_{-1}^{1}a_k^{(2)}(\eta)\,d\eta\int_{h-\delta}^{h}\varphi(\xi,\eta)\cos\lambda\xi\,d\xi\right] \qquad (3.15)$$

В дальнейшем будем считать, что $|x| < h - \delta$. Поменяем в (3.15) порядок интегрирования

$$u_1(x,y) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k^{(1)}(y)}{8\lambda_k^{(1)3}\operatorname{ch}^2\lambda_k^{(1)}}\int_{-1}^{1}a_k^{(1)}(\eta)\,d\eta\,\times\right.$$

$$\times\int_{h-\delta}^{h}\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}}{\lambda_k^{(1)}-\lambda}\cos\lambda\xi\,d\lambda +$$

$$\left. + \frac{a_k^{(2)}(y)}{8\lambda_k^{(2)3}\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(2)}}\int_{-1}^{1}a_k^{(2)}(\eta)\,d\eta\int_{h-\delta}^{h}\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}}{\lambda_k^{(2)}-\lambda}\cos\lambda\xi\,d\lambda\right] \qquad (3.16)$$

По [3] находим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}}{\lambda_k-\lambda}\cos\lambda\xi\,d\lambda=\begin{cases}-i\exp\left[i\lambda_k(\xi+x)\right] & (\operatorname{Im}\lambda_k>0)\\ i\exp\left[-i\lambda_k(\xi-x)\right] & (\operatorname{Im}\lambda_k<0)\end{cases}\tag{3.17}$$

Вставляя (3.17) в (3.16) и складывая члены с противоположными λ_k, получим

$$u(x,y)=2i\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k^{(1)}(y)\cos\lambda_k^{(1)}x}{8\lambda_k^{(1)3}\operatorname{ch}^2\lambda_k^{(1)}}\int\limits_{-1}^{1}a_k^{(1)}(\eta)\,d\eta\int\limits_{h-\delta}^{h}\varphi(\xi,\eta)\,e^{-i\lambda_k^{(1)}\xi}\,d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{a_k^{(2)}(y)\cos\lambda_k^{(2)}x}{8\lambda_k^{(2)3}\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(2)}}\int\limits_{-1}^{1}a_k^{(2)}(\eta)\,d\eta\int\limits_{h-\delta}^{h}\varphi(\xi,\eta)e^{-i\lambda_k^{(2)}\xi}\,d\xi\right](\operatorname{Im}\lambda_k>0)\tag{3.18}$$

Предыдущие рассуждения были справедливы при любом фиксированном δ. Совершим теперь предельный переход при $\delta\to 0$. Рассмотрим

$$\int\limits_{-1}^{1}a_k(\eta)\,d\eta\int\limits_{h-\delta}^{h}\varphi(\xi,\eta)\,e^{-i\lambda_k\xi}d\xi$$

Вставляя сюда $\varphi(\xi,\eta)$ из (3.2) и интегрируя по частям, чтобы освободить $g(\xi)$ от производных, получим

$$\int\limits_{-1}^{1}a_k(\eta)\,d\eta\int\limits_{h-\delta}^{h}\varphi(\xi,\eta)\,e^{-i\lambda_k\xi}d\xi=-\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{\partial^3u}{\partial\xi^3}+2\frac{\partial^3u}{\partial\xi\,\partial\eta^2}+\right.$$

$$\left.+i\lambda_k\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+2i\lambda_k\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}-\lambda_k^2\frac{\partial u}{\partial\xi}-i\lambda_k^3u\right)e^{-i\lambda_k\xi}\Big|_{\xi=h-\delta}a_k(\eta)\,d\eta+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}a_k(\eta)\,d\eta\int\limits_{h-\delta}^{h}\left(\frac{\partial^4u}{\partial\eta^4}-2\lambda_k^2\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+\lambda_k^4u\right)e^{-i\lambda_k\xi}g(\xi)\,d\xi\tag{3.19}$$

Отсюда

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{-1}^{1}a_k(\eta)\,d\eta\int\limits_{h-\delta}^{h}\varphi(\xi,\eta)\,e^{-i\lambda_k\xi}d\xi=$$

$$=-e^{-i\lambda_k\xi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{\partial^3u}{\partial\xi^3}+2\frac{\partial^3u}{\partial\xi\,\partial\eta^2}+i\lambda_k\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+2i\lambda_k\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}-\right.$$

$$\left.-\lambda_k^2\frac{\partial u}{\partial\xi}-i\lambda_k^3u\right)\Big|_{\xi=h}a_k(\eta)\,d\eta$$

Предельный переход под знаком интеграла в правой части равенства (3.19) справедлив, так как, согласно теореме вложения ([4] стр. 78), все производные от функции u до третьего порядка включительно непрерывны. Поскольку равномерная сходимость ряда (3.18) по δ очевидна, если x не приближается к границам $|x|=h$, то в (3.18) возможен почленный предельный переход с сохранением равномерной сходимости по оставшимся параметрам. Введем обозначения

$$c_k^{(1)} = -\frac{ie^{-i\lambda_k^{(1)}h}}{4\lambda_k^{(1)3}\operatorname{ch}^2\lambda_k^{(1)}}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^3}+2\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\eta^2}+i\lambda_k^{(1)}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\right.$$

$$\left.+2i\lambda_k^{(1)}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\lambda_k^{(1)2}\frac{\partial u}{\partial\xi}-i\lambda_k^{(1)3}u\right)\Big|_{\xi=h} a_k^{(1)}(\eta)\,d\eta \tag{3.20}$$

$$c_k^{(2)} = -\frac{ie^{-i\lambda_k^{(2)}h}}{4\lambda_k^{(2)3}\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(2)}}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^3}+2\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\eta^2}+i\lambda_k^{(2)}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\right.$$

$$\left.+2i\lambda_k^{(2)}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\lambda_k^{(2)2}\frac{\partial u}{\partial\xi}-i\lambda_k^{(2)3}u\right)\Big|_{\xi=h} a_k^{(2)}(\eta)\,d\eta \tag{3.21}$$

Тогда

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[c_k^{(1)}a_k^{(1)}(y)\cos\lambda_k^{(1)}x + c_k^{(2)}a_k^{(2)}(y)\cos\lambda_k^{(2)}x\right] \qquad (\operatorname{Im}\lambda_k > 0) \tag{3.22}$$

Ряд (3.22) при $|x| < h$ сходится равномерно. Больше того, как видно из (3.20, 21), этот ряд можно дифференцировать по обоим переменным при $|x| < h$ любое число раз, и продифференцированный ряд остается равномерно сходящимся.

4. Перейдем к исследованию поведения ряда (3.22) на границах $|x| = h$. Из (3.20, 21) с учетом (3.6—9) следует, что $c_k = O(e^{-\lambda_k h}k^{-5/2})$, поэтому при $|x| = h$ порядок k-х членов ряда будет равен $k^{-3/2}\operatorname{ch}\lambda_k y$. Отсюда следует, что ряд (3.22) сходится равномерно при $|x| = h$, $|y| < 1$. Так как при $|y| = 1$ все члены ряда (3.22) тождественно равны нулю, то он сходится и в угловых точках $|x| = h$, $|y| = 1$. Итак, имеем

$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[c_k^{(1)}\cos\lambda_k^{(1)}h a_k^{(1)}(y) + c_k^{(2)}\cos\lambda_k^{(2)}h a_k^{(2)}(y)\right] \qquad (\operatorname{Im}\lambda_k > 0) \tag{4.1}$$

причем ряд (4.1) сходится равномерно при $|y| < 1$. Продифференцируем (3.22) по x и перенесем первые n членов в левую часть.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n}\left[c_k^{(1)}\lambda_k^{(1)}a_k^{(1)}(y)\sin\lambda_k^{(1)}x + c_k^{(2)}\lambda_k^{(2)}a_k^{(2)}(y)\sin\lambda_k^{(2)}x\right] =$$

$$= -\sum_{k=n+1}^{\infty}\left[c_k^{(1)}\lambda_k^{(1)}a_k^{(1)}(y)\sin\lambda_k^{(1)}x + c_k^{(2)}\lambda_k^{(2)}a_k^{(2)}(y)\sin\lambda_k^{(2)}x\right] \qquad (\operatorname{Im}\lambda_k > 0)$$

Умножим обе части последнего равенства на финитную, т. е. бесконечно дифференцируемую и обращающуюся в нуль вместе со всеми производными при $|y| = 1$ функцию $\mu(y)$ и проинтегрируем по y от -1 до 1. Тогда, интегрируя правую часть дважды по частям, получим

$$\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n}\left[c_k^{(1)}\lambda_k^{(1)}a_k^{(1)}(y)\sin\lambda_k^{(1)}x + c_k^{(2)}\lambda_k^{(2)}a_k^{(2)}(y)\sin\lambda_k^{(2)}x\right]\right\}\mu(y)\,dy =$$

$$= -\int_{-1}^{1}\mu''(y)\sum_{k=n+1}^{\infty}\{c_k^{(1)}\lambda_k^{(1)}I_y^2\left[a_k^{(1)}(y)\right]\sin\lambda_k^{(1)}x +$$

$$+ c_k^{(2)}\lambda_k^{(2)}I_y^2\left[a_k^{(2)}(y)\right]\sin\lambda_k^{(2)}x\}\,dy \tag{4.2}$$

Здесь через I_y обозначена операция неопределенного интегрирования по y. Легко видеть, что сумма под знаком интеграла в правой части (4.2) есть остаток ряда, равномерно сходящегося при всех значениях x и y, т. е. при $|x| \leqslant h$, $|y| \leqslant 1$. Поэтому правая часть (4.2), а значит и левая, равномерно по x, $|x| \leqslant h$, стремится к нулю при $n \to \infty$. Полагая в (4.2) $x = h$ и устремляя n к ∞, окончательно имеем

$$\int_{-1}^{1} \Big\{ f_1(y) + \sum_{k=1}^{n} [c_k^{(1)} \lambda_k^{(1)} \sin \lambda_k^{(1)} h a_k^{(1)}(y) +$$

$$+ c_k^{(2)} \lambda_k^{(2)} \sin \lambda_k^{(2)} h a_k^{(2)}(y)] \Big\} \mu(y)\, dy \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad (\operatorname{Im} \lambda_k > 0) \tag{4.3}$$

для любой финитной функции $\mu(y)$.

5. Изложенный в п. 3 метод не дает возможности явно определить коэффициенты c_k в разложении (3.22), так как в правые части формул (3.20, 21) входят компоненты $u_{\xi\xi\xi}$ и $u_{\xi\xi}$, которые не могут быть выражены через граничные условия (1.17). Коэффициенты c_k нужно искать каким-либо иным способом, опираясь на единственность представления (3.22), которая сейчас будет доказана.

Единственность представления (3.22) эквивалентна отсутствию нетривиального разложения нуля. Пусть поэтому

$$u(x, y) \equiv 0 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} [c_k^{(1)} a_k^{(1)}(y) \cos \lambda_k^{(1)} x + c_k^{(2)} a_k^{(2)}(y) \cos \lambda_k^{(2)} x] \tag{5.1}$$

Зафиксируем $h_1 < h$ и рассмотрим прямоугольник $|x| \leqslant h_1$, $|y| \leqslant 1$. Ряд (5.1) при $|x| < h$ можно дифференцировать по обоим переменным любое число раз, поэтому справедливо

$$u|_{|x|=h_1} = 0, \qquad u_{xx}|_{|x|=h_1} = 0$$

Отсюда, используя обобщенное условие ортогональности (1.9) из работы [5], заключаем, что $c_k \cos \lambda_k h_1 = 0$, т. е. $c_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Итак, нетривиальное разложение нуля невозможно, и единственность доказана.

Поступила 21 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля, ч. 2. Л., Судпромгиз, 1941.
2. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М., Гостехиздат, 1950.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1963.
4. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., Изд. Ленингр. ун-та, 1950.
5. Гринберг Г. А. О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками и о некоторых его обобщениях. ПММ, 1953, т. 17, вып. 2.