

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ГРАНИЧНОЙ ПЛОСКОСТИ

Н. В. Зволинский

(Москва)

Одномерные задачи отражения плоских пластических волн рассматривались в ряде работ [1-12]. Тем не менее задачу нельзя считать исчерпанной. Даже в сравнительно простом случае взрывной нагрузки и распространения в режиме ударных волн, имеются нерешенные вопросы. Опубликованные работы содержат, либо решения, основанные на простейшей аппроксимации закона сжатия, либо приводят к сложному аналитическому описанию, из которого подчас и не делается никаких выводов. Численные методы в этой области также мало развиты.

Ниже в предположении жесткой разгрузки изучаются некоторые общие свойства задачи отражения, а также исследуется характер явлений на основе численных решений.

При этом оказалось, что априорное предположение, принятое многими авторами в том числе и в работах [1-3] о том, что в области отраженной волны имеет место разгрузка вообще ошибочно. Правда, погрешности, истекающие из этой ошибки, обычно малы. Если, в частности, закон сжатия линейный, то гипотеза разгрузки оправдывается. Влияние характера разгрузки на этот эффект, которое несомненно существует, в настоящей работе не рассматривается.

Исследовано влияние граничной плоскости с заданным на ней напряжением на распространение отраженной волны. Отраженная волна начинает «чувствовать» внешнюю нагрузку сразу же после начала отражения. Как выяснено в данной статье, сначала это влияние невелико, но, постепенно возрастая, оно приобретает решающее значение и, наконец, приводит к уничтожению ударной волны, которая никогда не может достигнуть граничной плоскости кроме случая стационарной волны. Здесь доказывается, что этот факт, отмеченный для частных случаев в [6,7,11], имеет общий характер. В работах [1-3] задача отражения решалась без учета граничной плоскости. Здесь показано, что такое решение имеет ограниченный характер и описывает с точностью до малых величин второго порядка асимптотику явления в моменты, близкие к началу отражения. Отражение с учетом граничной плоскости для простых законов сжатия рассматривалось ранее в работах [5-7,12].

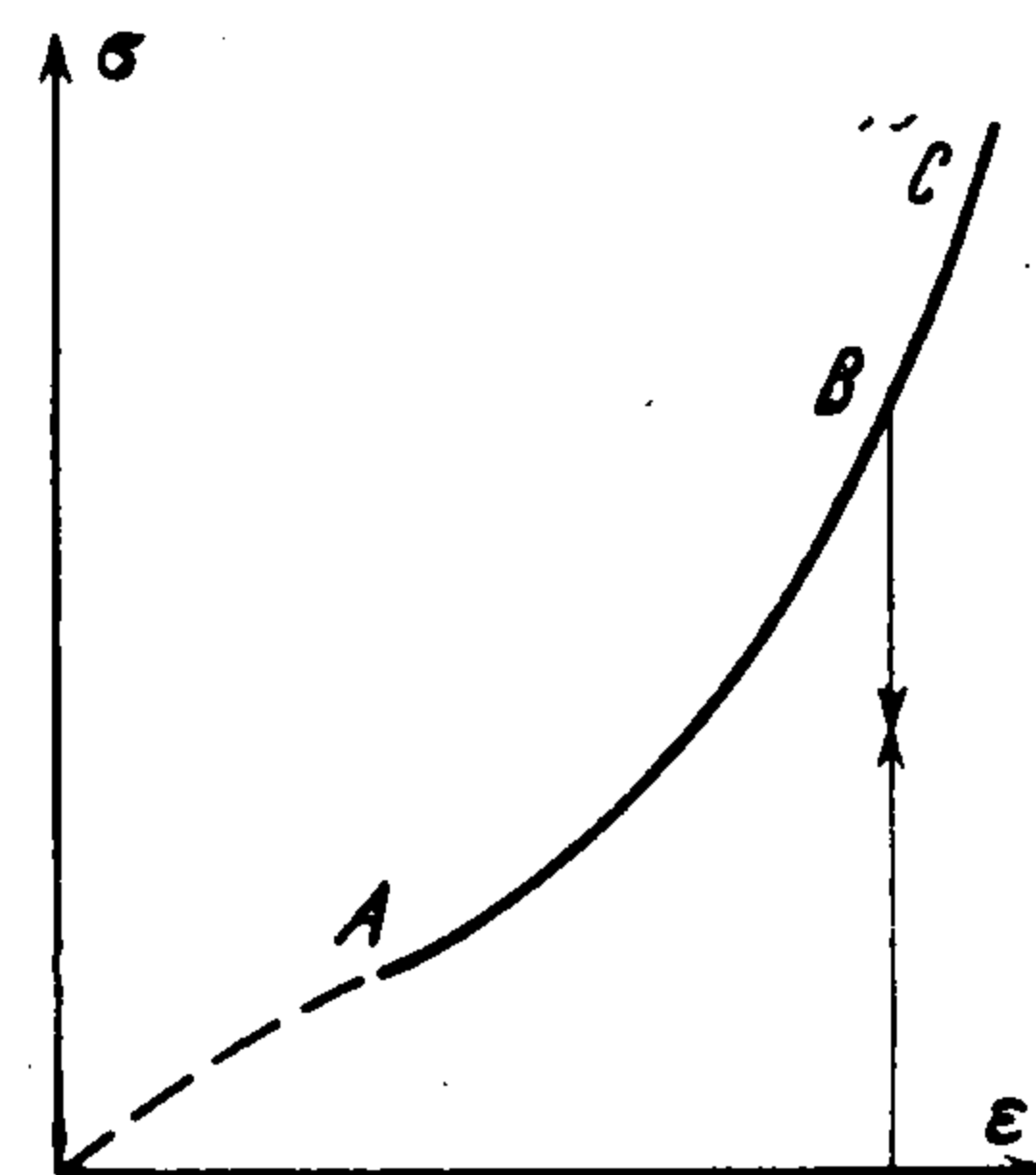
1. Две среды, из которых первая заполняет плоско-параллельный слой, а вторая — полупространство, соприкасаются вдоль плоскости. Будем рассматривать одномерные плоские движения, поляризованные перпендикулярно этой плоскости. Диаграмму одноосного сжатия первой среды будем предполагать в виде, представленном на фиг. 1. Ниже изучается режим ударных волн, этому режиму соответствует рабочий участок выше точки А, который предполагаем вогнутым вверх. Экспериментальные факты обнаруживают сжимаемость плотных сред (грунтов, металлов и др.) при весьма высоких давлениях. Поэтому наличия вертикальной асимптоты у диаграммы сжатия не предполагается. Разгрузка и повторная нагрузка происходят при сохранении плотности частицы. Вторая среда,

либо пластическая и тогда описывается аналогичной диаграммой сжатия, либо линейно-упругая. Уравнения рабочей части этих диаграмм будем записывать в виде

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1^\circ f_1(\varepsilon), & \sigma_1^\circ > 0 & \text{(для первой среды)} \\ \sigma &= \sigma_2^\circ f_2(\varepsilon), & \sigma_2^\circ > 0 & \text{(для второй среды)} \end{aligned}$$

Где $\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ$ — постоянные коэффициенты, имеющие размерность напряжения.

Будем обозначать $a_1 = \sigma_1^\circ / \rho_1, a_2 = \sigma_2^\circ / \rho_2$, где ρ_1, ρ_2 — плотности сред. Напряжение сжатия и деформацию сжатия считаем положительными.



Фиг. 1

Будем описывать движение в координатах Лагранжа h, t , причем ось h направим перпендикулярно плоскости раздела сред. Движение описывается уравнениями ($v(h, t)$ — скорость частицы)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial h} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial h} + \varepsilon'(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ есть обращение зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, в частности $\varepsilon'(\sigma) = 0$ в режиме разгрузки. В области, в которой происходит разгрузка $\varepsilon = \text{const}$, поэтому там

$$v = v(t), \quad \sigma(h, t) = -\rho v'(t) h + C \quad (1.2)$$

На ударной волне выполняются два механических условия сохранения

$$v_- - v_+ = (\varepsilon_- - \varepsilon_+) h'(t), \quad \sigma_- - \sigma_+ = \rho (v_- - v_+) h'(t) \quad (1.3)$$

величины, отмеченные индексом плюс, относятся к состоянию перед фронтом, отмеченные индексом минус — за фронтом; через $h(t)$ обозначена координата фронта ударной волны.

Пусть граница раздела сред есть плоскость $h = h_0$. Предполагая полный контакт, требуем на ней непрерывности напряжений и смещений

$$\sigma_1(h_0, t) = \sigma_2(h_0, t), \quad v_1(h_0, t) = v_2(h_0, t) \quad (1.4)$$

индексы 1 и 2 обозначают стороны плоскости раздела.

2. Пусть первая среда заполняет слой $0 \leq h \leq h_0$, а на плоскости $h = 0$ приложено внешнее напряжение $\sigma_0(t)$, причем

$$\sigma_0(0) \neq 0, \quad \sigma_0(t) > 0, \quad \sigma_0'(t) < 0 \quad \text{при } t \geq 0$$

Если $\sigma_0(0)$ достаточно велико, то от граничной плоскости начнет распространяться ударный фронт, за которым частицы будут находиться в состоянии разгрузки. Обозначив координату фронта через $h_*(t)$, получим для описания падающей волны [2] уравнения

$$v = \varepsilon_* h_*', \quad a_1^2 f_1[\varepsilon(h_*)] = \varepsilon_* h_*'^2, \quad h_* h_*' \varepsilon_* = \frac{1}{\rho_1} \int_0^t \sigma_0(\tau) d\tau, \quad h_*(0) = 0 \quad (2.1)$$

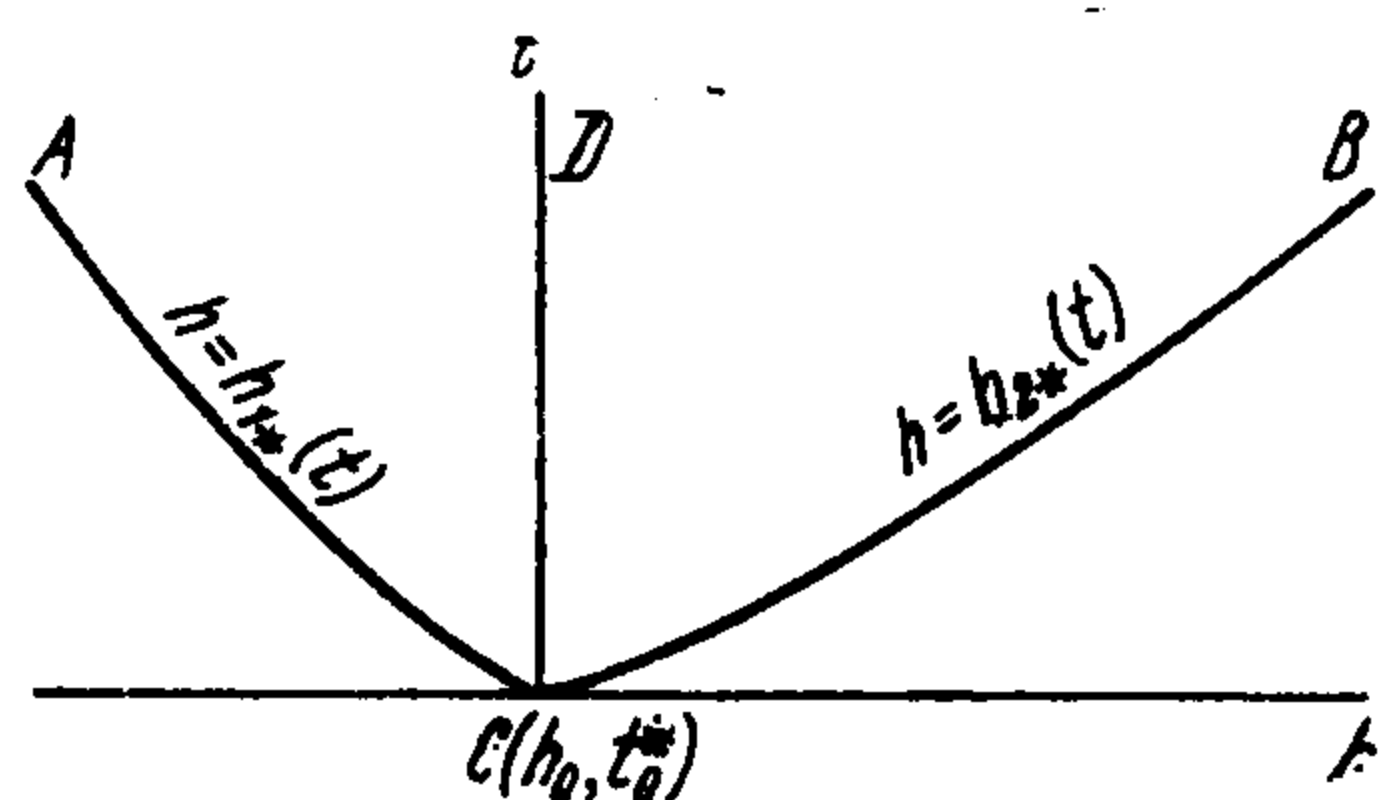
Если вторая среда пластическая, то при условии, что падающая на границу раздела волна достаточно интенсивна, по второй среде также пойдет ударная волна.

Если вторая среда идеально упругая, то для скорости частиц и напряжения, получим

$$v_2(h, t) = V\left(t - \frac{h - h_0}{a_2}\right), \quad \sigma_2(h, t) = \rho_2 a_2 v_2(h, t) \quad (2.2)$$

Здесь через $V(t)$ обозначено $V(t) = v_2(h_0, t)$, а a_2 — скорость упругой волны во второй среде.

3. Будем предполагать, что вторая среда в некотором смысле более жесткая, чем первая (см. ниже п. 5). В таком случае от границы раздела начнет распространяться в обратном направлении ударная отраженная волна. Этой волной слой $0 \leq h \leq h_0$ разделяется на две части



Фиг. 2

$$h_{1*}(t) \leq h \leq h_0 \quad (\text{область } 1)$$

$$0 \leq h \leq h_{1*}(t) \quad (\text{область } 3)$$

Относительно режима в области 1 каких-либо априорных предположений не делается.

В области 3 происходит нагружение или разгрузка частиц с сохранением плотности; перед фронтом отраженной волны достигается то напряжение $\sigma_b(h)$, которое было наибольшим для соответствующей частицы в падающей волне. Это независимая гипотеза, связанная с требованием устойчивости ударной волны (см., например, [1]). Поэтому в области 3 имеем

$$v_3(h, t) = v_3(t), \quad \sigma_3(h, t) = -\rho_1 v_3'(t) h + \sigma_0(t) \quad (3.1)$$

При этом уже учтено граничное условие на плоскости $h = 0$. Так как $\sigma_3(h_{1*}, t) = \sigma_b(h_{1*})$, то

$$v_3'(t) = \frac{\sigma_0(t) - \sigma_b(h_{1*})}{\rho h_{1*}(t)} \quad \text{или} \quad v_3(t) = v(t_0) + \frac{1}{\rho} \int_{t_0}^t \frac{\sigma_0(\tau) - \sigma_b(h_{1*})}{h_{1*}(\tau)} d\tau \quad (3.2)$$

Начальное условие $v_3(t_0) = v(t_0)$ вытекает из теоремы о количестве движения для массы, принадлежащей области 3 в момент $t_0 + 0$. Условия (1.3) применительно к фронту отраженной волны порождают уравнения

$$f_1[\varepsilon_1(h_{1*})] - f_1[\varepsilon(h_{1*})] = \frac{(v_1 - v_3) h_{1*}'}{a_1^2}, \quad \varepsilon_1(h_{1*}) - \varepsilon(h_{1*}) = \frac{v_1 - v_3}{h_{1*}'} \quad (3.3)$$

Эти же условия для проходящей волны дают

$$f_2[\varepsilon_2(h_{2*})] = v_2 h_{2*}' / a_2^2, \quad \varepsilon_2(h_{2*}) = v_2 / h_{2*}' \quad (3.4)$$

Возникает следующая краевая задача для квазилинейных систем уравнений первого порядка гиперболического типа. Рассматриваются две области на плоскости h, t (фиг. 2).

ACD , ограниченная прямой $h = h_0$ и линией $h = h_{1*}(t)$
 BCE , ограниченная прямой $h = h_0$ и линией $h = h_{2*}(t)$

Требуется найти функции

$$\sigma_1(h, t), v_1(h, t) \text{ в области } ACD, \quad \sigma_2(h, t), v_2(h, t) \text{ в области } BCD$$

а также функции $h_{1*}(t), h_{2*}(t)$ при $t > t_0$ по следующим условиям.

Функции $\sigma_1(h, t), v_1(h, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial h} + \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial h} + \varepsilon_1'(\sigma_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = 0 \quad (h, t) \in ACD$$

и граничным условиям (3.3) на неизвестной линии AC .

Функции $\sigma_2(h, t), v_2(h, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial h} + \rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial h} + \varepsilon_2'(\sigma_2) \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = 0 \quad (h, t) \in BCD$$

и граничным условиям (3.4) на неизвестной линии BC .

При $h = h_0$ искомые функции связаны граничными условиями (1.4); функция $v_3(t)$ дается формулой (3.2). Функции $\varepsilon(h), \sigma_b(h)$ предполагаются известными из предварительно решенной задачи о падающей волне. Естественно, что решение подобной задачи в сколько-нибудь простом виде возможно только в весьма частных случаях.

Однако, не решая задачи в целом, можно сделать некоторые качественные выводы о свойствах ее решения.

а) Из условий (3.3) получаем

$$\left(\frac{h_{1*}}{a_1}\right)^2 = \frac{f_1[\varepsilon_1(h_{1*})] - f[\varepsilon(h_{1*})]}{\varepsilon_1(h_{1*}) - \varepsilon(h_{1*})} \quad (3.5)$$

Правая часть есть монотонно возрастающая функция от ε_1 при фиксированном значении ε . Это следует из того, что $f_1''(\varepsilon) > 0$ на рассматриваемом участке диаграммы. Разность $\varepsilon_1(h) - \varepsilon(h)$ есть монотонно возрастающая функция от h , как это следует из наличия необратимых потерь на ударной волне. Поэтому

$$\varepsilon_1(h) - \varepsilon(h) < \varepsilon_1(h_0) - \varepsilon(h_0) = \Delta_0$$

В результате получаем оценки для скорости фронта отраженной волны

$$f_1'[\varepsilon(h_{1*})] \leq \left(\frac{h_{1*}'}{a_1}\right) \leq \frac{f_1[\varepsilon(0) + \Delta_0] - f_1[\varepsilon(0)]}{\Delta_0} = C \quad (3.6)$$

Можно принять приближенно, как это было сделано в [2], что

$$\frac{h_{1*}'}{a_1} = - \sqrt{f'[\varepsilon(h_{1*})]}$$

Для времени распространения волны от границы раздела до частицы с координатой h_{1*} получим

$$t = t_0 + \frac{1}{a_1} \int_{h_{1*}}^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{f'[\varepsilon(h)]}} \quad (h_{1*} < h_0)$$

Если падающая волна продолжала бы распространяться при $t > t_0$, не встречая границы раздела, то для нее имели бы

$$t = t_0 + \frac{1}{a_1} \int_{h_0}^{h_*} \left(\frac{\varepsilon(h)}{f[\varepsilon(h)]}\right)^{1/2} dh \quad (h_* > h_0)$$

Исключая t , получим непосредственную приближенную зависимость между h_{1*} и h_* (см. формулу (2.5) в [2]).

б) Если падающая волна — нестационарная, то отраженная ударная волна не может достигнуть граничной плоскости; она истощается раньше, чем достигнет границы. Заметим, что $v_1 \geq 0$ при $h_{1*} \leq h \leq h_0$.

Действительно,

$$\frac{\partial v_1}{\partial h} = -\varepsilon'_1(\sigma_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} \leq 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial h} = -\varepsilon'_2(\sigma_2) \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} \leq 0, \quad v_{2*} = \varepsilon_{2*} h'_{2*} > 0$$

Так как $v_1 = v_2$ при $h = h_0$, то отсюда следует неравенство $v_1 > 0$. Если отражение происходит от жесткой стенки, то $v_1 \equiv 0$. В формуле (3.2) примем h_{1*} за переменную интегрирования. Тогда

$$v_3(t) = v(t_0) - \frac{1}{\rho_1} \int_{h_{1*}}^{h_0} \frac{\sigma_b(h) - \sigma_0[t(h)]}{h |h'_{1*}|} dh$$

Так как

$$|h'_{1*}| \leq aC, \quad \sigma_b(h) - \sigma_0[t(h)] > \sigma_b(h_0) - \sigma_0(t_0)$$

то

$$v_3(t) \leq v(t_0) - \frac{\sigma_b(h_0) - \sigma_0(t_0)}{\rho_1 a_1 C} \int_{h_{1*}}^{h_0} \frac{dh}{h}$$

Интеграл в этой формуле, будучи взят по промежутку $0, h_0$, расходится; отсюда следует, что разность $v_1 - v_3$ первоначально отрицательная это следует из (3.3), обратится в нуль, прежде чем отраженная волна достигнет граничной плоскости $h = 0$. Ударная волна в тот же момент перестанет существовать. Слой $0 \leq h \leq h_0$ «отвердевает» и его напряженное состояние в дальнейшем повторяет закон изменения внешнего напряжения.

в) Для падающей волны справедливо соотношение

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{\sigma(h_*, t) - \sigma_0(t)}{\rho h_*}$$

а для «предвестника» отраженной волны имеем (3.2). Отсюда следует, что

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{dv_3}{dt}\right)_{t=t_0}$$

Но, кроме того,

$$(v)_{t=t_0} = (v_3)_{t=t_0}$$

или

$$v_3(t) = v(t_0) + v'(t_0)(t - t_0) + O[(t - t_0)^2] \quad (3.7)$$

Другими словами, в начале отражения поле скоростей «предвестника» совпадает с полем скоростей падающей волны с точностью до малых величин второго порядка (по времени). При этом, говоря о падающей волне, рассматриваем ее движение, которое имело бы место при отсутствии границы раздела.

4. Ошибочность гипотезы о том, что в отраженной и преломленной волнах непосредственно после начала отражения наступает разгрузка можно показать при следующем условии:

$$\frac{f_1(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0} < \frac{f_1(\varepsilon) - f_1(\varepsilon_0)}{\varepsilon - \varepsilon_0} \quad (\varepsilon_0 < \varepsilon) \quad (4.1)$$

характерном для режима ударных волн и справедливом на вогнутом вверх участке диаграммы сжатия.

Доказательство проведем от противного, предположив, что гипотеза разгрузки имеет место.

Если вторая среда также пластическая, то

$$v_1(h, t) = v_1(h_0, t) = V(t), \quad v_2(h, t) = v_2(h_0, t) = V(t) \quad (4.2)$$

Остается удовлетворить четырем условиям (3.3) и (3.4) на ударных волнах и первому условию (1.4) на плоскости контакта. Для определения пяти функций $\varepsilon_1(h)$, $h_{1*}(t)$, $V(t)$, $\varepsilon_2(h)$, $h_{2*}(t)$ получим пять уравнений

$$\begin{aligned} f_1(\varepsilon_1(h_{1*})) - f(\varepsilon(h_{1*})) &= \frac{(V - v_3) h_{1*}'}{a_1^2}, & \varepsilon_1(h_{1*}) - \varepsilon(h_{1*}) &= \frac{V - v_3}{h_{1*}'} \\ f_1(\varepsilon_1(h_{1*})) + \frac{V'(h_{1*} - h_{2*})}{a_1^2} &= \frac{\rho_2 a_2}{\rho_1 a_1} \frac{V h_{2*}'}{a_2^2} \\ V h_{2*}' &= a_2^2 f_2(\varepsilon_2(h_{2*})), & V &= \varepsilon_2(h_{2*}) h_{2*}' \end{aligned} \quad (4.3)$$

Если вторая среда — упругая, то два последних уравнения системы (4.3) отпадают, а третье принимает вид

$$f_1(\varepsilon_1(h_{1*})) + \frac{V'(h_{1*} - h_0)}{a_1^2} = \frac{\rho_2 a_2}{\rho_1 a_1} \frac{V}{a_1}$$

Покажем, что система (4.3) — следствие гипотезы разгрузки — противоречива¹. Для этого рассмотрим окрестность начала отражения. Пусть H_0 есть расстояние от отражающей плоскости до той плоскости, на которой напряжение при $t = t_0$, будучи линейно продолжено, обращается в нуль

$$H_0 = \frac{\sigma_b(h_0)}{\sigma_b(h_0) - \sigma_b(t_0)} h_0$$

Введем безразмерный параметр $\tau = (t - t_0)a_1 / H_0$. Искомые функции предполагаем в виде разложений асимптотических:

для падающей волны

$$\begin{aligned} \frac{h_* - h_0}{H_0} &= h' \tau + h'' \tau^2 + \dots, & \varepsilon(h) &= \varepsilon_0 + \varepsilon' \frac{h - h_0}{H_0} + \dots \\ \frac{v(t)}{a_1} &= v^\circ + v' \tau + \dots, & \frac{\sigma_0(t)}{\rho a_1^2} &= \sigma^\circ + \sigma' \tau \end{aligned} \quad (4.4)$$

для отраженной волны

$$\begin{aligned} \frac{h_{1*} - h_0}{H_0} &= h_1' \tau + h_1'' \tau^2 + \dots, & \varepsilon_1(h_{1*}) &= \varepsilon_{10} + \varepsilon_1' \tau + \dots \\ \frac{V(t)}{a_1} &= V^\circ + V' \tau + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

для проходящей волны

$$\frac{h_{2*} - h_0}{H_0} = h_2' \tau + h_2'' \tau^2 + \dots, \quad \varepsilon_2(h_{2*}) = \varepsilon_{20} + \varepsilon_2' \tau + \dots \quad (4.6)$$

¹ Впервые система общего вида, аналогичная (4.3), была предложена в [8].

Невыписанные слагаемые имеют порядок $O(\tau)$ или $O(\tau^2)$ соответственно.

Из уравнений (2.1), находим коэффициенты разложений (4.4)

$$\begin{aligned} v^\circ &= \sqrt{\varepsilon_0 f_1(\varepsilon_0)}, & h' &= \sqrt{\varepsilon_0^{-1} f_1(\varepsilon_0)}, & v' &= \frac{H_0}{h_0} (\sigma^\circ - f_1(\varepsilon_0)) \\ \varepsilon' &= \frac{2\varepsilon_0 v'}{\varepsilon_0 f_1'(\varepsilon_0) + f_1(\varepsilon_0)}, & h'' &= \frac{v' \varepsilon_0 f_1'(\varepsilon_0) - f_1(\varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 \varepsilon_0 f_1'(\varepsilon_0) + f_1(\varepsilon_0)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Отсюда видно, в частности, что $v' \leq 0$, $\varepsilon' \leq 0$, $h'' \leq 0$, т. е. скорость частиц, скорость фронта, деформация в падающей волне убывают (не возрастают) по мере распространения.

Из (4.5), (4.6) и системы (4.3) получим уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} f_1(\varepsilon_{10}) - f_1(\varepsilon_0) &= (V^\circ - v^\circ) h_1', & (\varepsilon_{10} - \varepsilon_0) h_1' &= V^\circ - v^\circ \\ f_1(\varepsilon_{10}) &= (\rho_2 / \rho_1) V^\circ h_2', & f_2(\varepsilon_{20}) &= (a_1 / a_2)^2 V^\circ h_2', & \varepsilon_{20} h_2' &= V^\circ \end{aligned} \quad (4.8)$$

и уравнения второго приближения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1' f_1'(\varepsilon_{10}) - \varepsilon' h_1' f_1'(\varepsilon_0) &= (V^\circ - v^\circ) 2h_1'' + (V' - v') h_1' \\ (\varepsilon_{10} - \varepsilon_0) 2h_1'' + (\varepsilon_1' - \varepsilon' h_1') h_1' &= V' - v' \\ \varepsilon_1' f_1'(\varepsilon_{10}) + V' h_1' &= (\rho_2 / \rho_1) V h_2' + V^\circ 2h_2'' + V' h_2' \\ \varepsilon_2' f_2'(\varepsilon_{20}) &= (a_1 / a_2)^2 (V' h_2' + V^\circ 2h_2''), & \varepsilon_2' h_2' + \varepsilon_{20} 2h_2'' &= V' \end{aligned} \quad (4.9)$$

Если закон сжатия во второй среде линейный при нагружении в частности, если она идеально упругая, то третьи уравнения в системах (4.8) и (4.9) заменяются соответственно на

$$f_1(\varepsilon_{10}) = \frac{\rho_2 a_2}{\rho_1 a_1} V^\circ, \quad \varepsilon_1' f_1'(\varepsilon_{10}) + V' h_1' = \frac{\rho_2 a_2}{\rho_1 a_1} V'$$

При этом два последних уравнения как в (4.8), так и в (4.9) отпадают. Обратимся к системе (4.9). Из двух последних уравнений может быть найдена величина h_2'' :

$$h_2'' = k_0 V', \quad k_0 = \frac{\varepsilon_{20} f_2'(\varepsilon_{20}) - f_2(\varepsilon_{20})}{2\varepsilon_{20} [\varepsilon_{20} f_2'(\varepsilon_{20}) + f_2(\varepsilon_{20})]}, \quad |2k_0 \varepsilon_{20}| \leq 1$$

и в результате третье уравнение в системе (4.9) примет вид

$$\varepsilon_1' f_1'(\varepsilon_{10}) + V' h_1' = c V' \quad (c > 0) \quad (4.10)$$

Здесь

$$c = \begin{cases} [(\rho_2 / \rho_1) (2k_0 \varepsilon_{20} + 1) + 1] h_2', & \text{если вторая среда пластическая} \\ \rho_2 a_2 / \rho_1 a_1 & \text{если вторая среда упругая} \end{cases}$$

В обоих случаях для определения неизвестных коэффициентов ε_1' , h_1'' , V' послужит система, состоящая из первых двух уравнений (4.9) и уравнения (4.10). Определитель Δ этой системы

$$\Delta = -2(\varepsilon_{10} - \varepsilon_0) \{ (c - h_1') [h_1'^2 + f_1'(\varepsilon_{10})] - 2h_1' f_1'(\varepsilon_{10}) \} < 0$$

Следовательно, уравнения разрешимы и для V' получаем

$$V' = - \frac{4f_1'(\varepsilon_{10}) \varepsilon_0 [f_1(\varepsilon_{10}) - f_1(\varepsilon_0)] - f(\varepsilon_0)(\varepsilon_{10} - \varepsilon_0)}{\Delta \varepsilon_0 f_1'(\varepsilon_0) + f(\varepsilon_0)}$$

Отсюда видно, что $V' > 0$; из (4.10) следует, что также $\varepsilon_1' > 0$. Для напряжения на отражающей плоскости имеем

$$\sigma_1(h_0, t) = \sigma_1(h_0, t_0) + \rho_1 a_1^2 c V' \tau + \dots \quad (4.11)$$

Формула (4.11) показывает, что вопреки предположению о разгрузке, напряжение на границе контакта возрастает. Напряжение на ударной волне, а следовательно, и во всей области 1 также возрастает. Этот анализ оставляет открытым вопрос о характере явления в случае, когда закон сжатия в первой среде линейный при нагружении. Если вторая среда упругая, то гипотеза разгрузки оправдывается. Действительно падающая волна описывается в замкнутой форме

$$f_1(\varepsilon) = \varepsilon, \quad h_*' = a_1, \quad \varepsilon(t) = \frac{I(t)}{\rho_1 a_1^2 t} \quad \left(I(t) = \int_0^t \sigma_0(\tau) d\tau \right) \quad (4.12)$$

Для отраженной волны получаем $h_{1*}' = -a_1$ и третье уравнение системы (4.3) принимает вид

$$(t - t_0) V'(t) + \kappa_1 V(t) = F(t) \quad (t_0 \leq t) \quad (4.13)$$

$$F(t) = a_1 \varepsilon(2t_0 - t) + v_3(t), \quad \kappa_1 = \rho_2 a_2 / \rho_1 a_1 + 1$$

Так как $\kappa_1 > 0$, то (4.13) надо интегрировать при начальном условии $|V(t_0)| < +\infty$. Получим

$$V(t) = (t - t_0)^{-\kappa_1} \int_{t_0}^t F(\tau) (t - t_0)^{\kappa_1 - 1} d\tau \quad (4.14)$$

Пусть функция $F(\tau)$ — монотонно убывающая. В самом деле

$$a_1 \rho_1 F(t) = \frac{I(2t_0 - t)}{2t_0 - t} + \rho_1 a_1 v(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{[I(2t_0 - \tau) / (2t_0 - \tau)] - \sigma_0(\tau)}{2t_0 - \tau} d\tau$$

$$a_1 \rho_1 F'(t) = \frac{\sigma_0(t) - \sigma_0(2t_0 - t)}{2t_0 - t}$$

Так как $\sigma_0(t)$ монотонно убывает, то $F(t)$ также убывает монотонно. Если (4.14) преобразовать к виду

$$V(t) = \int_0^1 F(t_0 + s(t - t_0)) s^{\kappa_1 - 1} ds$$

то становится ясно, что $V(t)$ убывает, а с ней вместе и $\sigma_1(h_0, t)$. Аналогичное доказательство проходит в том случае, когда вторая среда пластическая, но линейная при нагружении.

5. Рассмотрим частный случай, когда падающая волна стационарная имеет вид ступени. Разложения (4.4) — (4.6) сводятся к первым своим слагаемым и дают точное решение задачи. При этом оказывается, что отраженная и проходящая волны также стационарные. Задача сводится к решению системы (4.8). Возможность однозначной

разрешимости этой системы необходима также для оправдания рассуждений п. 4, так как на нее опирается представление искомых функций в виде разложений (4.5) и (4.6). Остановимся прежде всего на случае, когда вторая среда линейная при нагружении. Тогда (4.8) сводится к уравнениям

$$f_1(\varepsilon_{10}) - f(\varepsilon_0) = (V^\circ - v^\circ)h_1', \quad (\varepsilon_{10} - \varepsilon_0)h_1' = V^\circ - v^\circ, \quad f_1(\varepsilon_{10}) = V^\circ (\rho_2 a_2 / \rho_1 a_1) \quad (5.1)$$

Здесь a_2 обозначает скорость постоянную распространения возмущений во второй среде.

Обозначим

$$X = \varepsilon_{10} - \varepsilon_0, \quad Y = f_1(\varepsilon_{10}) - f(\varepsilon_0), \quad h_1' = -\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$$

Исключая $V^\circ - v^\circ$ и $f_1(\varepsilon_{10})$ из (5.1), получаем

$$X = \sigma^\circ \frac{\kappa - 1}{(\kappa_0 + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}) \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}, \quad Y = \sigma^\circ \frac{(\kappa - 1) \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}{\kappa_0 + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} \quad (5.2)$$

$$\kappa_0 = \frac{\rho_2 a_2}{\rho_1 a_1}, \quad \kappa = \frac{\rho_2 a_2}{\rho_1 a}, \quad \sigma^\circ = \frac{\sigma_0(0)}{\rho_1 a_1^2} \quad \left(a = \frac{a_1 \sigma^\circ}{v^\circ} \right)$$

Здесь a — скорость ударной падающей волны в момент ее столкновения с границей раздела.

Уравнения (5.2) наглядно интерпретируются геометрически фиг. 3. Они дают параметрическое представление линии PQ в системе координат XY . Легко проверяется, что линия PQ изображает монотонно убывающую функцию, значение которой при $\alpha = \pi/2$ есть $\sigma^\circ (\kappa - 1) > 0$. При $\alpha \rightarrow 0$ функция стремится к нулю. Следовательно, существует и притом только одна точка пересечения кривой PQ и диаграммы сжатия MN . Зная эту точку, находим искомые элементы движения

$$h_1' = -\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \varepsilon_{10} = \varepsilon_0 + X, \quad V^\circ - v^\circ = -(\varepsilon_{10} - \varepsilon_0) \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$$

Этим не только доказана однозначная разрешимость системы (5.1), но и дается способ численного графического определения искомых величин. Он может быть усовершенствован применением подвижной координатной системы XY на прозрачной бумаге, на которой можно нанести и семейство линий PQ .

Важной характеристикой будет коэффициент отражения

$$K = \frac{\sigma_1(h_0, t_0)}{\sigma(h_0, t_0)}$$

При постановке задачи предполагалось, что $K > 1$. Условия, когда это осуществляется, могут быть теперь указаны. Из (5.2) получим

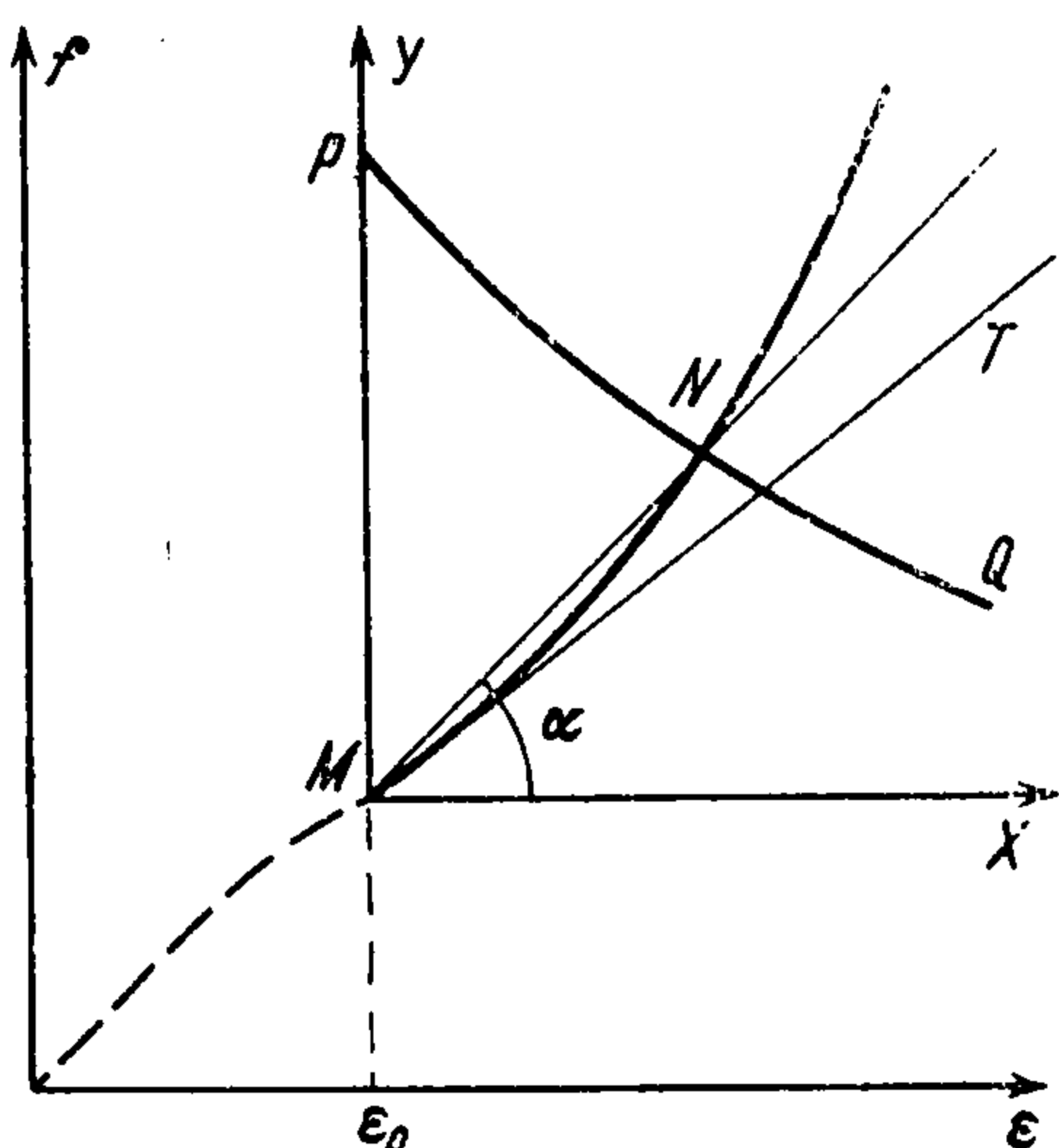
$$K = \frac{\kappa_0 + \kappa \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}{\kappa_0 + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} \quad (5.3)$$

Неравенство $K > 1$ означает, как видим, что

$$a_2 \rho_2 > a \rho_1 \quad (5.4)$$

в согласии с [2], где для определения a был предложен приближенный прием.

Доказательство однозначной разрешимости системы (4.8) ценой некоторых осложнений может быть распространено на тот случай, когда вторая среда пластическая с произвольным законом сжатия, подчиняющимся лишь ограничению общего характера. Будем предполагать, что $\varepsilon^{-1} f_2(\varepsilon) / \varepsilon$ есть неубывающая функция. Тогда можно



Фиг. 3

доказать, что h_2' как функция V° , определенная уравнениями

$$h_2' = \frac{V^\circ}{\varepsilon_{20}} = \frac{a_2}{a_1} \sqrt{\frac{f_2(\varepsilon_{20})}{\varepsilon_{20}}}$$

есть также неубывающая функция. Справедлива оценка

$$h_2' = \frac{a_2}{a_1} \varphi(V^\circ) \geq \frac{a_2^\circ}{a_1}, \quad a_2^\circ = a_2 \sqrt{f_2'(0)}$$

Здесь a_2° — скорость распространения малых возмущений во второй среде.

Первые три уравнения системы (4.8) могут быть записаны в виде (5.5)

$$Y = (v^\circ - V^\circ) \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}, \quad X = (v^\circ - V^\circ) / \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}, \quad (v^\circ - V^\circ) \sqrt{\operatorname{tg} \alpha} + \sigma^\circ = \kappa_0 V^\circ \varphi(V^\circ)$$

Будем предполагать снова вторую среду «более жесткой», чем первую, в том смысле, что

$$\rho_2 a_2^\circ / \rho_1 a > 1 \quad (5.6)$$

Тогда при фиксированном значении α ($0 \leq \alpha \leq 1/2 \pi$) третье уравнение системы (5.5) определяет единственное значение V° на отрезке $0 \leq V^\circ \leq v^\circ$. Коэффициент отражения при этом оказывается большим единицы. Это проще всего усмотреть из чертежа (фиг. 4), на котором OC есть график правой части уравнения, а прямые mn , $m'n'$, $m''n''$ изображают левую часть при различных фиксированных значениях α . Точка P расположена ниже кривой OC , что вытекает из неравенства

$$\frac{\kappa_0 V^\circ \varphi(V^\circ)}{\sigma^\circ} \geq \frac{\rho_2 a_2^\circ}{\rho_1 a} > 1$$

Этим обеспечено пересечение в области $0 < V^\circ < v^\circ$. Формулы

$$X = \frac{\kappa \varphi(V^\circ) - 1}{(\kappa_0 + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}) \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} \sigma^\circ, \quad Y = \frac{(\kappa \varphi(V^\circ) - 1) \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}{\kappa_0 + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} \sigma^\circ \quad (5.7)$$

по-прежнему дают параметрическое представление линии на плоскости XY . Эта линия изображает монотонно убывающую функцию, так как при изменении α от $1/2 \pi$ до 0 координата X возрастает (это следует из второй формулы (5.5)), а Y убывает. Это показывает вторая формула (5.7). Поэтому линия (5.7) имеет единственную точку пересечения с кривой

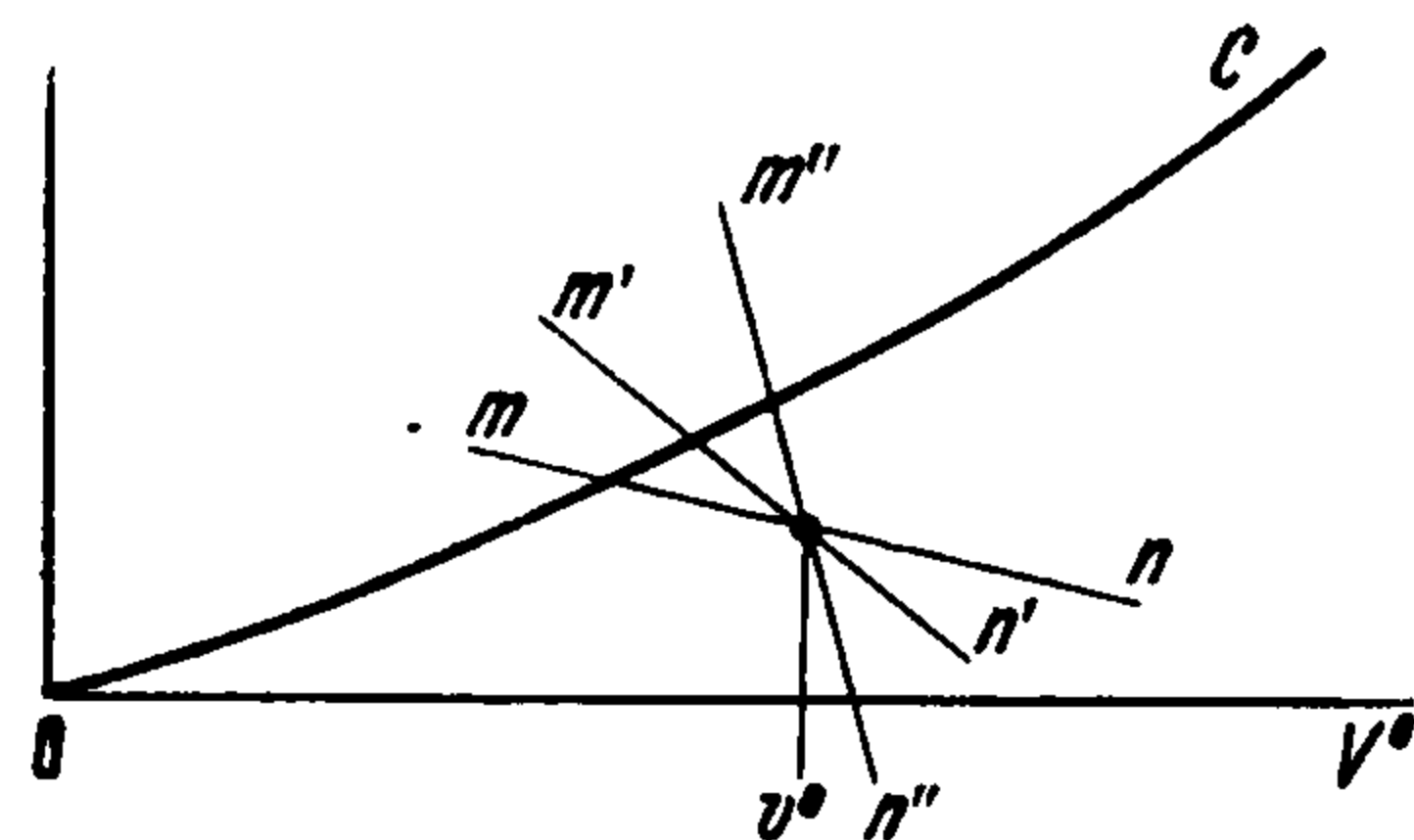
$$Y = f_1(X + \varepsilon_0) - f_1(\varepsilon_0)$$

что и требовалось доказать.

Для коэффициента отражения получаем

$$K = \frac{\kappa_0 + \kappa \varphi(V^\circ) \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}{\kappa_0 + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} > 1$$

$$\left(\kappa \varphi(V^\circ) \geq \frac{\rho_2 a_2^\circ}{\rho_1 a} > 1 \right)$$



Фиг. 4

6. Для выяснения количественной стороны эффектов, теория которых изложена в пп. 3—5 было выполнено численное решение задачи отражения пластической волны. При этом рассмотрен случай отражения от жесткой стенки.

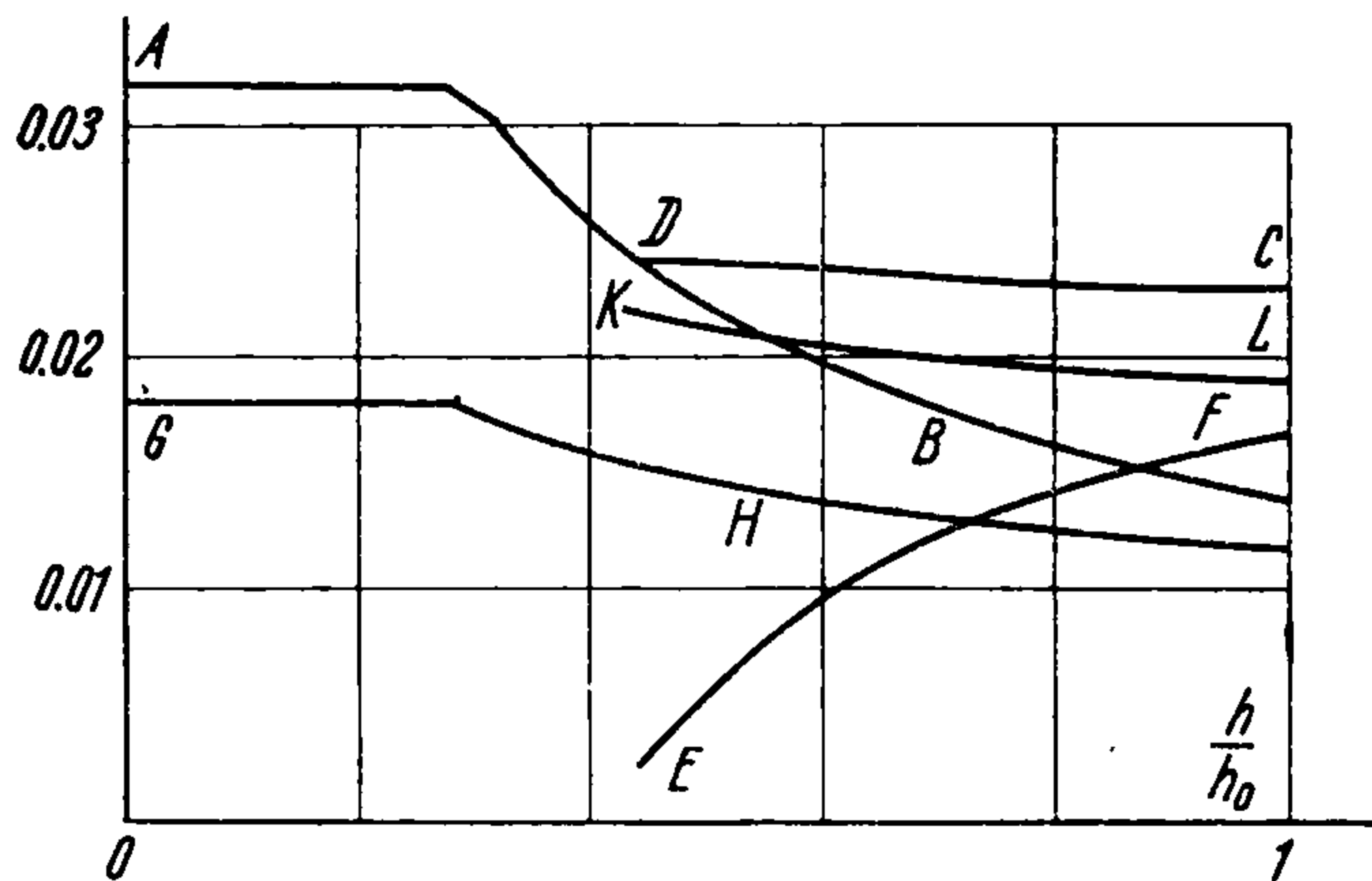
Рабочий участок закона сжатия описывался степенной функцией $\sigma = \rho_1 a_1^2 \varepsilon^m$. Внешнее напряжение в зависимости от времени задавалось функцией

$$\sigma_0(t) = \sigma_0(0) \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \quad t > \theta \\ (1 - t/\theta)^n & \text{при } 0 < t < \theta \end{cases}$$

Безразмерными параметрами задачи были величины

$$m, n, \sigma^\circ = \frac{\sigma_0(0)}{\rho_1 a_1^2}, \quad s = \frac{a_1 \theta}{h_0}, \quad h^\circ = \frac{h}{h_0}, \quad t^\circ = \frac{t}{\theta}$$

Для численного расчета область распространения $0 \leq h^0 \leq 1$ разделялась на N равных частей (было принято $N = 50$). Уравнения (2.1) падающей волны интегрировались численно методом Эйлера. Так как искомые функции изменяются весьма плавно, то этот метод давал достаточную точность. Отраженная волна рассчитывалась двумя способами. Первый основывался на гипотезе разгрузки и сводился к численному интегрированию двух первых уравнений системы (4.3).



Фиг. 5

отражающей стенке $v = 0$ и на ударной волне.

Ниже приводятся результаты счета для следующих трех комбинаций параметров

| | σ | θ | n | m |
|---|-----------|----------|-----|-----|
| 1 | 10^{-3} | 1.7 | 0 | 2 |
| 2 | 10^{-2} | 50 | 10 | 2 |
| 3 | 10^{-2} | 50 | 10 | 1 |

Результаты расчета варианта 1 представлены на фиг. 5, где даны зависимости от h функций: ε — кривая AB ; $h_1' 10^{-1}$ кривая KL ; ε_1 — кривая CD ; $v_3 10$ — кривая EF , $h' 10^{-1}$ — кривая GH .

Можно отметить возрастание скорости распространения отраженной волны со временем и возрастание напряжения деформации на ударной волне. Между ударной волной и стенкой, как показал расчет, имеет место возрастание напряжения вплоть до момента исчезновения ударной волны. Возрастание этих величин количественно невелико, именно: от момента отражения до истощения ударной волны скорость ее распространения возрастает приблизительно на 12%, деформация — на 5%, следовательно напряжение — на 8%. Формальный расчет, основанный на гипотезе разгрузки,

дает весьма небольшие отличия, а именно преувеличивает к моменту истощения волны значение h_{1*}' на 1%, значение ε_1 — на 4%. Распределение значений σ и v между отражающей стенкой и ударной волной очень мало отличаются от того, к чему приводит гипотеза разгрузки. В последнем случае должно быть $\sigma(h, t) = \sigma(t)$, $v(h, t) \equiv 0$. При корректном расчете отклонение $\sigma(h, t)$ от постоянного по координате значения не превышает 2%. Значение $v(h, t)$ не превосходит $0.13 v(t_0)$.

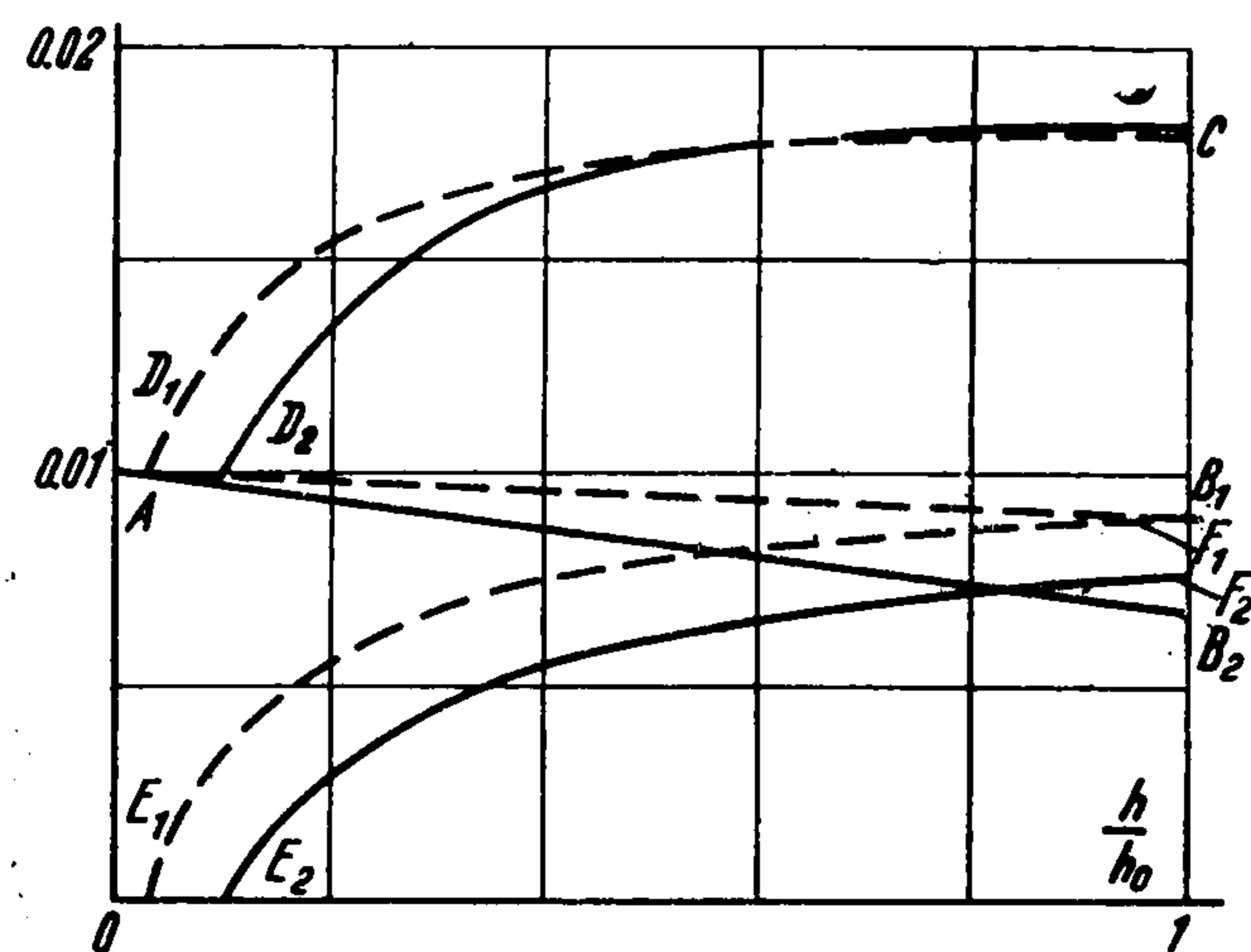
Результаты расчета вариантов 2 и 3 показаны на фиг. 6 (графики для варианта 3 представлены пунктиром) в виде кривых, представляющих зависимости от h величин

$$\varepsilon (AB_1), \varepsilon^2 (AB_2), \varepsilon_1 (CD_1), \varepsilon_1^2 (CD_2), v_3 (E_1F_1), v_3 / \sqrt{10} (E_2F_2)$$

Оба эти варианта характеризуются внешним воздействием, более длительным, чем в варианте 1. Это сказывается на том, что отраженная ударная волна истощается позже. Скорости h_* и h_{1*}' не показаны на фиг. 6, так как они мало изменяются при распространении. Увеличение скорости отраженной волны для варианта 2 здесь весьма

Наряду с этим, было проведено численное решение корректно поставленной задачи, в которой заранее не предполагался режим разгрузки. Выбор режима осуществлялся в процессе счета. Уравнения (1.1) были заменены разностными уравнениями. Граничные условия задавались на

отражающей стенке $v = 0$ и на ударной волне.



Фиг. 6

мало; оно составляет не больше 1% и в дальнейшем сменяется замедлением. Значения h_{1*}' и ε_1 , рассчитанные по корректной теории и по гипотезе разгрузки, практически не отличаются (совпадают с точностью до четырех значащих цифр). В варианте 2, сразу после отражения, наступает режим нагрузки, который, однако, сменяется в дальнейшем разгрузкой. Это представлено на фиг. 7, на которой явление изображено на плоскости переменных h/h_0 и t/θ . Линия PO_1 — годограф падающей волны, O_1R — отраженной; область RO_1S есть область нагрузки, QRS — область разгрузки. Относительная разность между максимальным и минимальным значением $\sigma(h, t)$ в этой области составляет меньше 0.5%.

В итоге можно сформулировать следующие выводы, относящиеся к явлению отражения — преломления пластических волн в рамках принятой до сих пор постановки задачи в том случае, когда внешняя нагрузка имеет характер взрывного воздействия, разгрузка предполагается жесткой, коэффициент отражения — большим единицы.

1) Если падающая волна нестационарная, то отраженная ударная волна не достигает граничной плоскости, на которой приложено внешнее давление. Истощение ударной волны происходит тем позднее, чем ближе падающая волна к стационарной.

2) При весьма общих предположениях о законах сжатия в обеих средах, система (4.8) конечных нелинейных уравнений, к которым сводится задача об отражении — преломлении стационарной волны, имеет решение, притом единственное в предполагаемом режиме $K > 1$. Даны рекомендации по графоаналитическому построению решения.

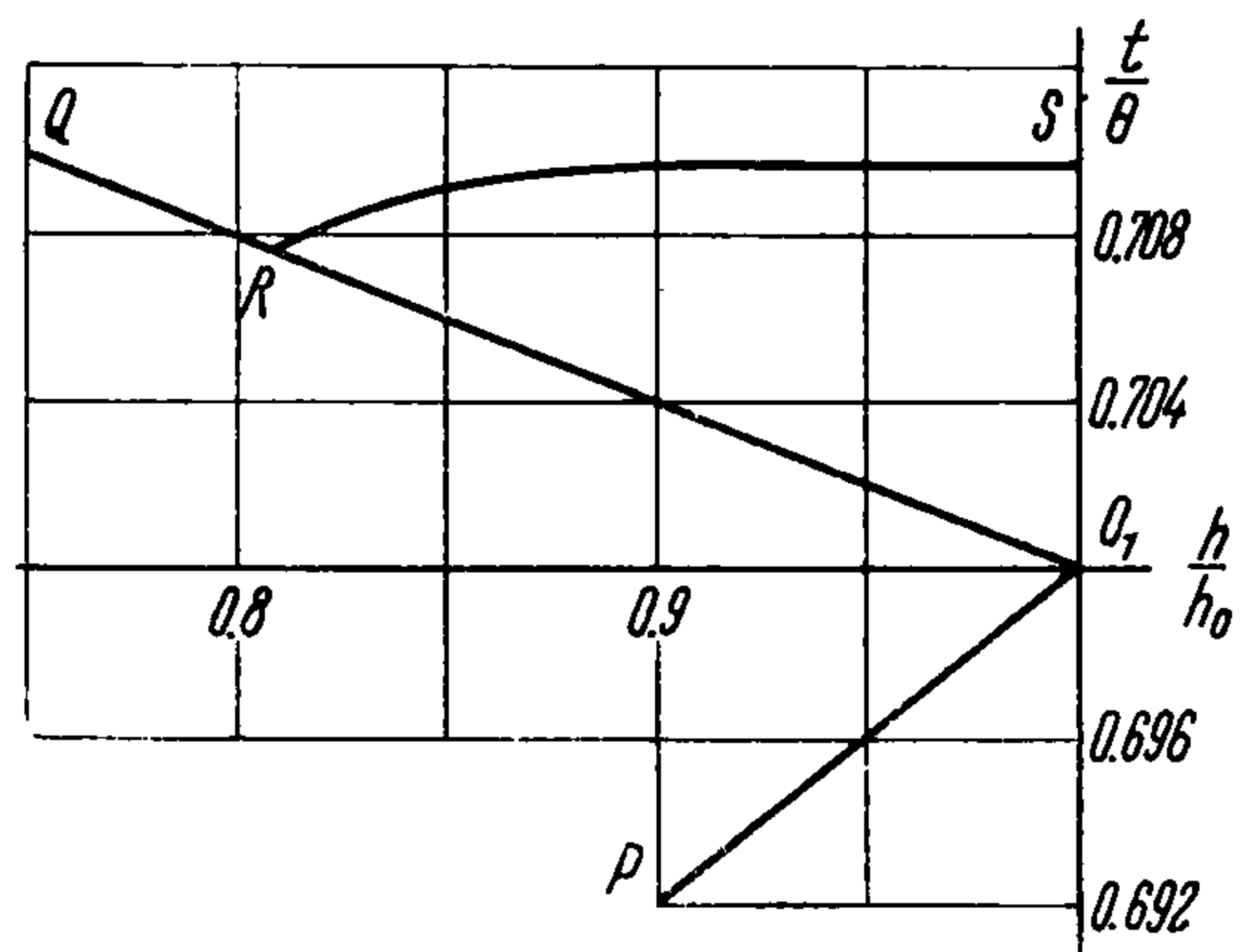
3) В начале отражения поле скоростей предвестника совпадает с полем скоростей падающей волны с точностью до малых величин второго порядка (см. п. 3 формула (3.7)). На этом основано решение задачи в [1-3], где не учитывалось¹ влияние граничной плоскости $h = 0$. Подобные решения естественно имеют ограниченное значение, будучи приближенными для начальной стадии после отражения. Они лучше описывают явление для более длинных волн, чем для коротких. Впрочем, величины, относящиеся к моменту соударения падающей волны с преградой, они дают точно (см. также [4]).

4) Общепринятая априорная гипотеза о режиме разгрузки в области отраженной волны, вообще, неверна. Ее ошибочность доказана для случая, когда диаграмма сжатия первой среды вогнута вверх на рабочем участке, а на закон сжатия во второй среде не наложено специальных ограничений.

5) Если диаграммы нагружения в первой и второй средах линейные, то существует решение, согласное с гипотезой разгрузки.

6) Погрешности в определении искоемых функций, которые вносятся некорректностью задачи с гипотезой разгрузки, оказываются количественно весьма малыми. Это показывает численный расчет ряда примеров с отражением от жесткой стенки, проведенный при различных комбинациях входных параметров. Два подобных примера приводятся в данной статье п. 6.

7) Заметим, что здесь не рассматривалось отражение от подвижной преграды на границе двух сред. В этом случае характер отражения иной и требует другого подхода для анализа явления в начальной стадии. Однако два предельных варианта, когда масса преграды обращается в нуль или в бесконечность, описываются настоящей теорией. Это заставляет ожидать, что и при отражении от подвижной преграды могут встретиться случаи, противоречащие гипотезе разгрузки.



Фиг. 7

¹ В [1] предполагалось, что поле скоростей предвестника во все моменты времени совпадает с полем скоростей продолженной падающей волны. Это есть самостоятельное предположение вопреки неправильной ссылке на непрерывность смещений (см., например, [1], стр. 97).

Вопрос о том, как следует разумно ставить задачи об отражении пластических волн, не может рассматриваться в отрыве от того, с какой целью и для каких материалов ставится задача. До сих пор подобные задачи изучались в связи с потребностями строительной техники. Точность эксперимента и ожидаемая точность ответа, как правило, в этих случаях много грубее, чем те тонкие искажения, которые обнаружены нашими расчетами. Многие исходные предположения о жесткости разгрузки, об аппроксимации диаграммы сжатия и др. делаются авторами с большой легкостью. Эта легкость оправдывается отсутствием надежных и стабильных данных о свойствах многих реальных материалов. На этом фоне фактические погрешности, вносимые некорректностью гипотезы разгрузки, кажутся мало значащими. Поэтому расчеты отражения и преломления, основанные на гипотезе разгрузки и, следовательно, в принципе некорректные, следует признать удовлетворительными для решения многих практических вопросов.

Поступила 25 IV 1967

Институт проблем механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Зволнинский Н. В., Рыков Г. В. Отражение пластической волны от преграды. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
2. Зволнинский Н. В., Рыков Г. В. Отражение плоской пластической волны и преломление на границе полупространств. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
3. Зволнинский Н. В., Рыков Г. В. Отражение и преломление плоских пластических волн. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5.
4. Weidlinger P., Matthews T. Shock and reflection in a nonlinear medium J. of the End Mech. Division Proc. Amer. Soc. Civil Engrs., 1965, vol. 91, June, EM3.
5. Ляхов Г. М., Поляков Н. И. Взаимодействие ударной волны в упруго-пластической среде со смещающейся преградой. ПМТФ, 1962, № 5.
6. Нарожная З. В. Об экспериментальном определении скорости разгрузки в грунте при динамических процессах. Физика горения и взрыва, 1965, № 1.
7. Dzygadło Z., Kaliski S., Solarz L., Włodarczyk E. Drgania i fale, cz. 3. Dynamiczne problemy teorii sprężystości i plastyczności, Warszawa — Bemowo, 1964 (Rozdział VII, § 4).
8. Ляхов Г. М., Осадченко Р. А., Полякова Н. И. Взаимодействие ударной волны в пластической среде со смещающейся преградой с учетом влияния свободной поверхности. Физика горения и взрыва, 1965, № 3.
9. Ляхов Г. М. Взаимодействие ударной волны в пластической среде с сооружением. Материалы Всесоюз. симпозиума по распространению упруго-пластических волн в сплошных средах. Баку, Изд. АН АзССР, 1966.
10. Нарожная З. В. Отражение плоской взрывной волны в грунте от подстилающего слоя. — В кн.: Материалы Всесоюз. симпозиума по распространению упруго-пластических волн в сплошных средах. Баку, Изд. АН АзССР, 1966.
11. Włodarczyk E. Propagation and reflexion of plane and spherical shock — wave an elasticplastic body and a barotropic liquid Proc. vibration problem, 1964, vol. 5, No. 4.
12. Kaliski S., Osiecki J. Problem odbicia się fale odciążenia od sztywnej ści any dla ciała o sztywnej charakterystyce odciążenia Biul. Wojsk. Akad. Techn., 1959, vol. 8, No. 2 (85).