

О БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ ЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

В. И. Возлинский

(Москва)

На основе исследования В. В. Румянцева [1] рассматривается устойчивость стационарных движений систем с двумя циклическими координатами. Устанавливаются некоторые свойства бифуркации на определенном виде сечений поверхности стационарных движений. Исследуется особенность бифуркации, отмеченная в работе А. Ю. Ишлинского [2].

1. Рассмотрим сначала некоторые нужные для дальнейшего вопросы теории бифуркации равновесий [3,4], связанные с обобщением ее на случай, когда потенциальная энергия зависит от двух параметров.

Пусть система имеет k степеней свободы; $x = \|x_1, \dots, x_k\|$ — вектор пространства конфигураций R ; p_1, p_2 — вещественные параметры, изменяющиеся на осях P_1, P_2 ; $p = \|p_1, p_2\|$ — соответствующий вектор плоскости $P = P_1P_2$; $\Pi(x, p_1, p_2)$ — потенциальная энергия, предполагаемая аналитической.

Уравнение равновесий

$$\text{grad}_x \Pi(x, p_1, p_2) = 0 \quad (1.1)$$

определяет в пространстве RP поверхность равновесий B (см. [1], стр. 924). Гладкие поверхности $C_s \subset B$ будем называть ветвями поверхности B . Точку бифуркации равновесий определим, аналогично [5], как точку ветвления вещественных решений уравнения равновесий: точка (x^0, p^0) поверхности равновесий называется точкой бифуркации равновесий, если в каждой (сколь угодно малой) окрестности этой точки существуют хотя бы две точки (x', p^*) , (x'', p^*) , принадлежащие поверхности равновесий и соответствующие одному значению p^* параметра. Необходимым (но недостаточным) условием того, что некоторая точка поверхности B есть точка бифуркации, является равенство нулю в ней гессиана потенциальной энергии [4].

Множество Γ точек бифуркации будем называть бифуркационной кривой. Этой кривой принадлежат, в частности, линии пересечения ветвей поверхности B .

На поверхности B выполняется закон смены устойчивости при фиксированных значениях p (см., например, [4]).

Иногда оказывается полезным рассматривать не всю поверхность B , а лишь некоторую кривую L на ней, являющуюся сечением поверхности B ($k+1$)-мерной поверхностью, заданной гладкой функцией

$$p_2 = p_2(x, p_1) \quad (1.2)$$

(или $p_1 = p_1(x, p_2)$; такое представление интересно для дальнейшего). Если (1.2) не зависит от x , сечение назовем цилиндрическим (в этом случае (1.2) определяет $(k + 1)$ -мерную «цилиндрическую» поверхность, «образующие» которой — ортогональные дополнения к плоскости P).

Подставляя (1.2) в (1.1), получим проекцию L^* кривой L на подпространство RP_1 . Под устойчивыми (неустойчивыми) точками на L^* будем понимать проекции устойчивых (неустойчивых) точек кривой L . В результате получим на L^* некоторое распределение устойчивости. При этом заранее неизвестно, соответствует ли оно законам [3,4] (как на кривой равновесий систем с одним параметром). Если, формально, такое соответствие есть, будем говорить, что имеет место «распределение Пуанкаре» или «правильное распределение».

Легко видеть, что для цилиндрического сечения L распределение устойчивости на L^* является распределением Пуанкаре. Действительно, в этом случае точки кривой L^* являются при фиксированных p_1 стационарными точками функции $\Pi^*(x, p_1) = \Pi(x, p_1, p_2(p_1))$, т. е. кривая L^* совпадает с кривой равновесий для потенциальной энергии $\Pi^*(x, p_1)$, причем на них совпадает и распределение устойчивости. Это приводит к классическому случаю одного параметра. Не является исключением и сечение, некоторые ветви которого принадлежат бифуркационной кривой, несмотря на то, что на таких ветвях и на соответствующих ветвях кривой L^* гессиан потенциальной энергии тождественно равен нулю. Этот случай рассмотрен в [5].

Если L — нецилиндрическое сечение, то распределение устойчивости на L^* может быть неправильным (в принятом смысле).

Это вытекает из следующего рассуждения. Если L — нецилиндрическое сечение, то точкам M_1^*, M_2^*, \dots на L^* при фиксированном значении p_1 соответствуют точки M_1, M_2, \dots на L при различных значениях вектора p (фиксированной будет лишь координата p_1 этого вектора). Поэтому на $L^* \subset RP_1$ может не выполняться закон смены устойчивости, в то время как на L в полном пространстве RP он (при фиксированных p) выполняется.

Используя цилиндрические сечения, легко (с учетом [5]) показать, что граница областей устойчивости и неустойчивости на B принадлежит бифуркационной кривой Γ .

Замечание 1.1. Если число параметров равно $m > 2$, то B будет m -мерной поверхностью, Γ — многообразием размерности $\leq m - 1$. Можно рассматривать сечения различной размерности.

2. Рассмотрим консервативную гироскопически несвязанную систему с k позиционными и двумя циклическими координатами.

1°. Существует аналогия [1] между теорией бифуркации стационарных движений таких систем и теорией бифуркации равновесий. В соответствии с этой аналогией обозначения п. 1 примут следующий смысл: x — k -мерный вектор позиционных координат; p — двумерный вектор обобщенных импульсов, соответствующих обобщенным скоростям циклических координат¹; B — поверхность стационарных движений в $(k + 2)$ -

¹ Эти импульсы и скорости будем сокращенно называть циклическими. Циклические импульсы на движениях системы равны константам, которые будем обозначать, как и сами импульсы, p_1, p_2 .

мерном пространстве RP , определяемая уравнением

$$\text{grad}_x W(x, p) = 0 \quad (2.1)$$

где W — потенциал Рауса (приведенная потенциальная энергия) [1,6]:

$$W = \Pi(x) + \frac{1}{2} \sum b_{ij}(x) p_i p_j = \Pi + \frac{1}{2} (Bp, p) \quad (2.2)$$

Здесь $\Pi(x)$ — потенциальная энергия; $A = \|a_{ij}\|$ ($i, j = 1, 2$) — клетка матрицы кинетической энергии, соответствующая произведениям циклических скоростей; $B = \|b_{ij}\| = A^{-1}$ — обратная ей матрица.

Введем также обозначение $\omega = \|\omega_1, \omega_2\|$ — вектор циклических скоростей, изменяющийся на плоскости Ω ($\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$).

В гироскопически несвязанных системах циклические импульсы и циклические скорости связаны соотношением [6]

$$p = A(x) \omega \quad (\omega = B(x) p) \quad (2.3)$$

Циклические скорости постоянны на стационарных движениях, поэтому можно говорить о поверхности B_ω стационарных движений в пространстве $R\Omega$, параметрами которой являются циклические скорости ω_1, ω_2 [7]. Однако, как показано в [1], распределение устойчивости на B_ω , вообще говоря, не будет распределением Пуанкаре. Переход от B к B_ω можно трактовать как замену переменных (2.3).

Замечание 2.1 (см. [1]). В гироскопически связанной системе поверхность B также определяется уравнением (2.1), а поверхность B_ω связана с ней соотношением (2.3). Но распределение устойчивости на этих поверхностях может отличаться от распределения, найденного без учета гироскопических сил в приведенной системе: на участках с четной степенью неустойчивости возможна гироскопическая стабилизация.

2°. Рассмотрим цилиндрическое сечение L_ω поверхности B_ω . Пусть, для определенности, это будет сечение гиперплоскостью¹

$$\omega_2 = \lambda \omega_1 \quad (\lambda — \text{число}) \quad (2.4)$$

Сечению L_ω соответствует (по (2.3)) сечение $L \subset B$ в пространстве RP . Проекцию сечения L_ω на подпространство $R\Omega_1$ и проекцию сечения L на подпространство RP_1 обозначим, соответственно, L_ω^* и L^* . Кривые L_ω^* и L^* связаны соотношением

$$p_1 = (a_{11}(x) + \lambda a_{12}(x)) \omega_1 \quad (2.5)$$

Сечение L уже не будет цилиндрическим, поэтому переход $L_\omega^* \rightarrow L^*$ по (2.5) приводит, вообще говоря, от неправильного (в принятом смысле) распределения опять к неправильному, несмотря на то, что параметром на L^* является импульс p_1 , а не скорость (переход $B_\omega \rightarrow B$ по (2.3) приводит от неправильного распределения к правильному [1]).

Далее будут рассматриваться те законы распределения Пуанкаре, которые справедливы не только на цилиндрическом сечении поверхности

¹ Предполагается, что гиперплоскость (2.4) не является касательной гиперплоскостью для поверхности стационарных движений.

B , но (при некотором условии) и на цилиндрическом сечении поверхности B_ω , а в системах с одной циклической координатой — на кривой B_ω .

3°. Пусть преобразование (2.3) невырождено при $x = 0$:

$$\det A(0) \neq 0 \quad (2.6)$$

Для систем с одной циклической координатой (для них A — число) условие (2.6) означает, что кинетическая энергия не равна тождественно по ω нулю на стационарном движении $x = 0$; это условие практически всегда выполнено (в противном случае задача вырождается в статическую — как, например, задача устойчивости тривиального стационарного «движения» тяжелой точки, подвешенной на нити).

Из [3-5] и сказанного выше вытекают следующие утверждения.

(1) Пусть в системе с одной циклической координатой кривая B_ω содержит тривиальную ветвь — прямую $x = 0$ и выполнено (2.6). Тогда для кривой B_ω справедливы положения:

(a) точки смены устойчивости на тривиальной ветви являются точками бифуркации;

(b) изолированные точки бифуркации на тривиальной ветви при $\omega \neq 0$ либо являются точками смены устойчивости, либо лежат внутри области неустойчивости.

(2) Пусть цилиндрическое сечение L_ω поверхности B_ω гиперплоскостью (2.4) содержит тривиальную ветвь $x = 0$ и выполнено условие (2.6). Тогда на проекции $L_\omega^* \subset R\Omega_1$ этого сечения выполняются положения (a), (b).

Действительно, легко видеть, что в RP положения (a), (b) выполняются (см. [5]). Далее, в системах с одной циклической координатой при условии (2.6) неопредельным [3,5] точкам бифуркации на B взаимно однозначно соответствуют неопредельные точки бифуркации на B_ω . Но на тривиальной ветви $x = 0$ все точки бифуркации неопредельные. Отсюда следует утверждение (1). С учетом последней сноски несложно доказать и утверждение (2).

Замечание 2.2. В утверждении (2) рассматривается цилиндрическое сечение гиперплоскостью (2.4), однако положение (a) справедливо и для произвольных цилиндрических сечений. По поводу положения (b) заметим, что в цилиндрических сечениях, отличных от (2.4), потенциал Рауса не сводится, вообще говоря, к виду (2.4) из [5]. Для таких сечений положение (b) справедливо в случае, когда через рассматриваемую точку бифуркации проходит нечетное число ветвей (при некоторых условиях [4,5], обычно выполняющихся в практических задачах). Обычно в точке бифуркации ветвь $x = 0$ пересекается с одной нетривиальной ветвью.

4°. Рассмотрим случай вырожденного при $x = 0$ преобразования (2.3):

$$\det A(0) = 0 \quad (2.7)$$

Он представляет практический интерес в системах с двумя циклическими координатами при $\text{rang } A(0) = 1$.

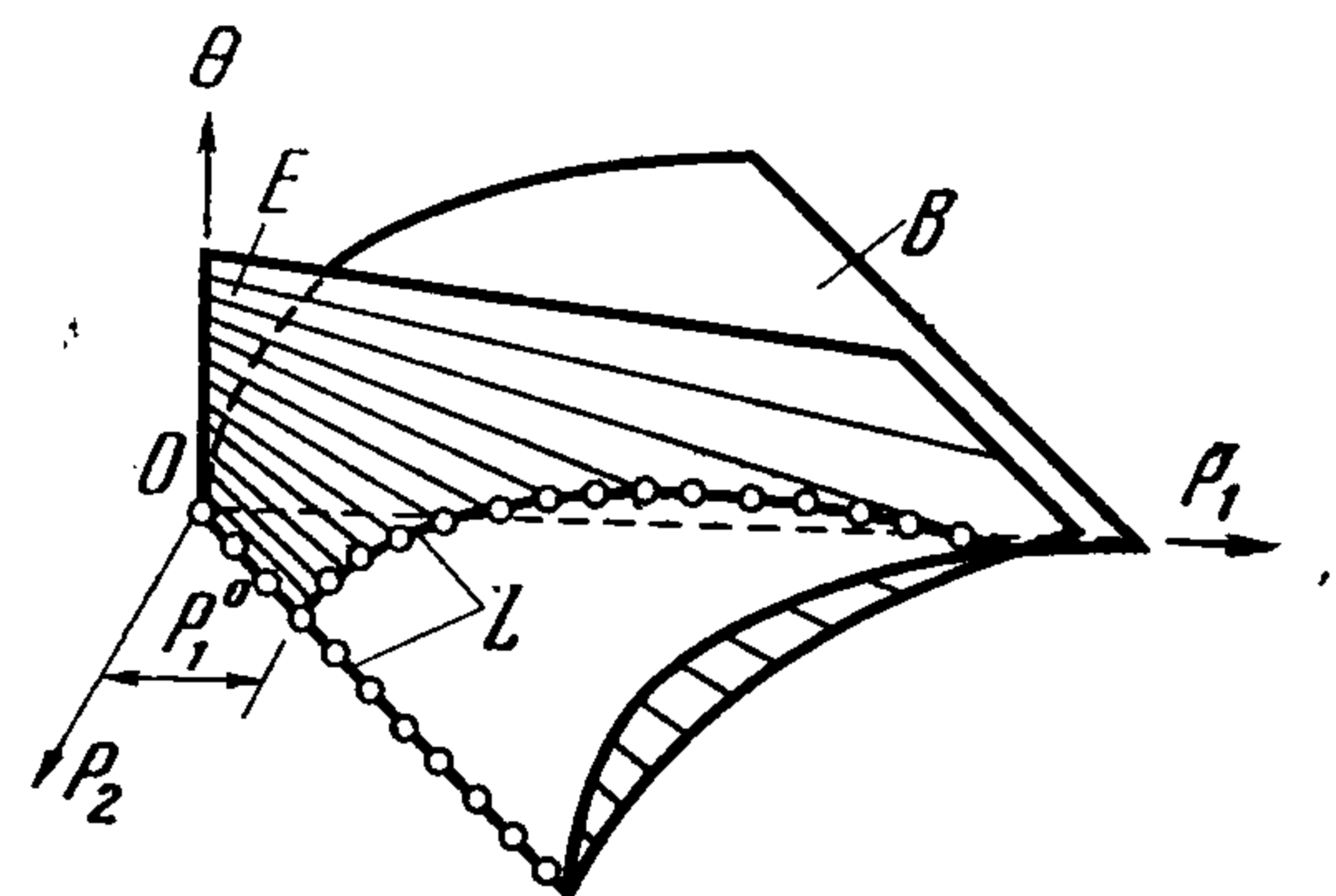
Выражения (2.2), (2.1) не определены при $x = 0$. Поскольку $A(0)$ — симметрическая матрица второго порядка, собственная прямая g этой матрицы ортогональна собственной прямой союзной матрицы $A^s(0)$. Так как, кроме того, матрица $A(0)$ знакоположительна, то квадратичная

форма $(A^s(0)p, p)$ равна нулю тогда и только тогда, когда $p \in g$. Поэтому входящая в (2.2) квадратичная форма

$$(B(x)p, p) = \frac{(A^s(x)p, p)}{\det A(x)}$$

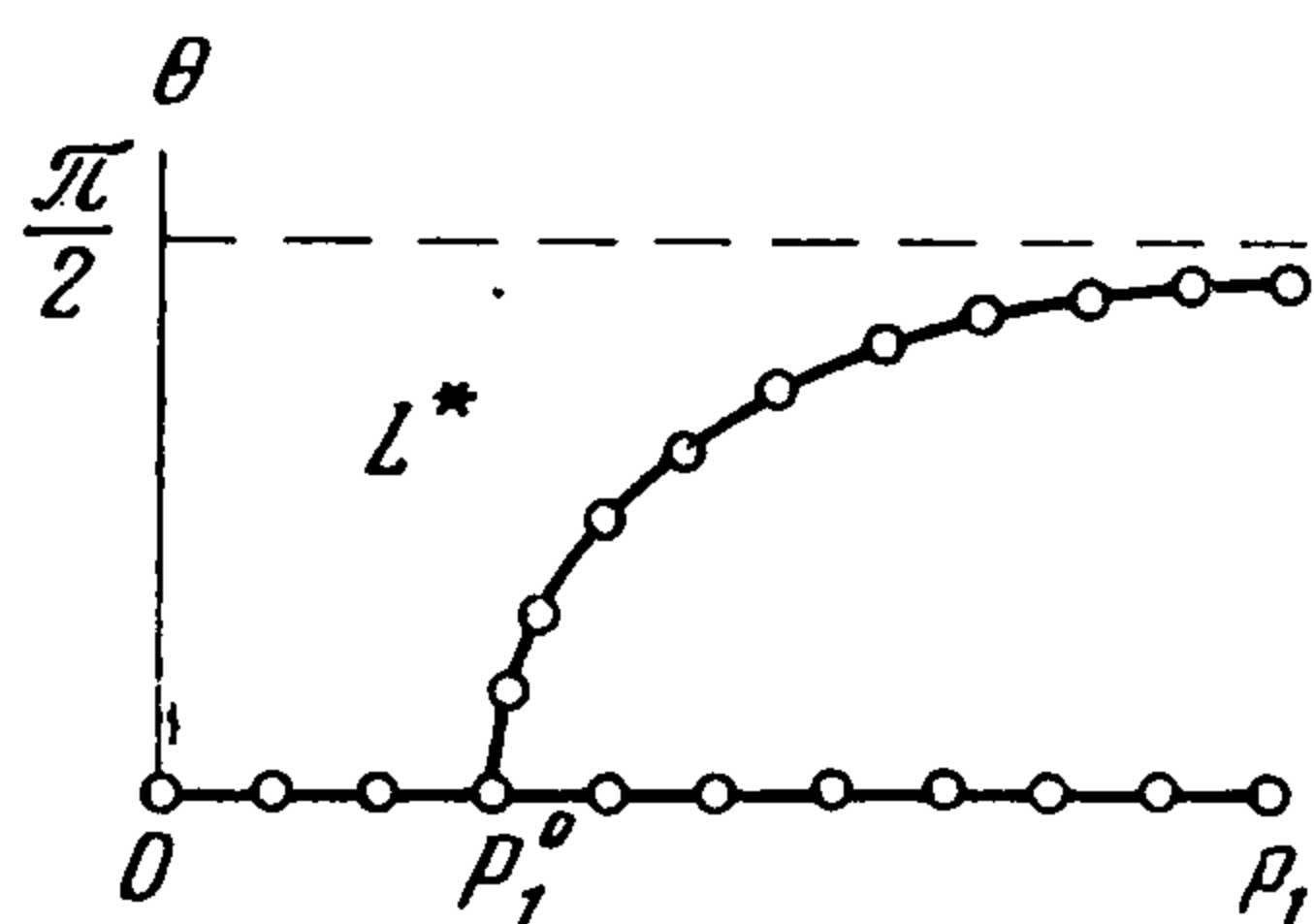
может иметь при $x \rightarrow 0$ конечный предел только при $p \in g$ (см. пример в [6], стр. 277). То же относится к выражению $\text{grad}_x W(x, p)$. Отсюда, при условии (2.7) либо не существует стационарных движений $x = 0, p \neq 0$, либо поверхность B содержит при $x = 0$ прямую g и только ее. Этой прямой соответствует в пространстве $R\Omega$ вся плоскость $x = 0$. Отсюда ясно, что в случае (2.7) на цилиндрических сечениях L_w поверхности B_w может нарушаться положение (b) п. 3° (но на цилиндрических сечениях поверхности B оно, очевидно, сохраняет силу и в случае (2.7)).

5°. В качестве иллюстрации к пп. 2°—4° рассмотрим поверхность B на фиг. 1, которая приблизительно соответствует поверхности стационарных движений продолговатого тела с неподвижной точкой в случае Лагранжа. Здесь θ — угол нутации. $0 \leq \theta \leq 1/2\pi$ ($\theta = 0$, если центр тяжести находится ниже точки подвеса, на вертикальной прямой, проходящей через эту точку); p_1, p_2 — циклические импульсы, соответствующие скоростям $\omega_1 = \dot{\psi}$, $\omega_2 = \dot{\varphi}$ прецессии и собственного вращения соответственно (участок поверхности при $p_2 > p_1$ не показан). Линейчатая поверхность E (заштрихована на фиг. 1) определена условием $\omega_2 = 0$; L — соответствующее ей сечение. На фиг. 2 показана проекция L^* этого сечения на плоскость θp_1 . Кружочки означают, что кривые L и L^* устойчивы¹. Видимость противоречия закону смены устойчивости на фиг. 2 объясняется тем, что сечение L нецилиндрическое. На цилиндрических сечениях в пространстве $\theta p_1 p_2$, как видно из фиг. 1, такого противоречия нет. В пространстве $\theta \omega_1 \omega_2$ на цилиндрическом сечении плоскостью $\omega_2 = 0$, очевидно, нарушается положение (b) п. 3°. Это объясняется вырожденностью матрицы A при $\theta = 0$ (см. зависимость (22) в [6], стр. 278).



Фиг. 1

3. Рассмотрим систему из работы [2]: осесимметричное продолговатое тело, подвешенное на абсолютно гибкой безынерционной струне, верхний конец которой свободно вращается в вертикальном подшипнике, а нижний (точка O) закреплен на оси симметрии тела, выше его центра тяжести (точки C). Точку O_1 выхода струны из подшипника при-



Фиг. 2

мем за начало неподвижной прямоугольной системы осей $O_1 \xi \eta \zeta$ с направленной вертикально вверх осью ζ . Точку C — за начало двух систем: $C \xi' \eta' \zeta'$ и $Cxyz$. Оси первой из них направим параллельно осям ξ, η, ζ ; оси второй (жестко связанной с телом) будем считать главными центральными осями инерции тела, причем ось z направим по оси симметрии в сторону точки O .

Данная механическая система имеет пять степеней свободы. Рассмотрим две системы обобщенных координат:

$$1) \alpha, \beta, \theta, \psi, \varphi; \quad 2) \alpha, \beta, \theta, \gamma, \varphi \quad (3.1)$$

Здесь θ, ψ, φ — углы нутации, прецессии и чистого вращения тела в системах $C \xi' \eta' \zeta', Cxyz$; α, β — углы нутации и прецессии струны как твердого тела в системе

¹ Ср. с примером в [1,7], который получается из рассматриваемого наложением связи $\omega_2 = 0$.

$O_1\xi\eta\zeta$ (ось струны принята направленной от O к O_1); $\gamma = \beta - \psi$. Предполагается $0 \leq \alpha \leq 1/2\pi$; $-1/2\pi \leq \theta \leq 1/2\pi$. Заметим, что углы ψ , β совпадают с точностью до знака с углами между осью η и проекцией на горизонтальную плоскость соответственно оси z и оси струны [8]. Легко проверить, что в системе координат (3.1₁) — одна циклическая координата φ ; в системе (3.1₂) — две циклические координаты: β и φ , т. е. максимально возможное их число. Поэтому в дальнейшем используется система координат (3.1₂). Рассматриваемая механическая система гироскопически связана.

В [2,8] (в принятых выше обозначениях) скорость β' циклической координаты β принята за параметр, и рассматриваются стационарные движения, на которых скорость φ' другой циклической координаты равна нулю. Таким образом, рассматривается цилиндрическое сечение поверхности B_ω стационарных движений, заданное условием $\varphi' = 0$. Кривая (6) в [2] представляет проекцию этого сечения на подпространство $\alpha\theta\beta'$. Она имеет особенность: тривиальная ветвь не теряет устойчивости в точках бифуркации (т. е. на ней нарушается положение (b) из п.2). Эта особенность сохраняется и в случае, если за параметр принять не скорость β' , а соответствующий ей импульс p_β . Ниже показано, что эта особенность вызвана вырожденностью преобразования (2.3) на тривиальном движении; то, что она сохраняется и при параметре p_β , объясняется тем, что условие $\varphi' = 0$ задает в пространстве RP нецилиндрическое сечение.

Введем следующие безразмерные параметры и функции:

$$m^2 = \frac{Ml^2}{A}, \quad n^2 = \frac{Ma^2}{A}, \quad v = \frac{C}{A}, \quad \omega_1 = \frac{A\beta'}{\mu}$$

$$\omega_2 = \frac{A\varphi'}{\mu}, \quad p_1 = \frac{p_\beta}{\mu}, \quad p_2 = \frac{p_\varphi}{\mu} \quad (\mu = \sqrt{Ag} \sqrt{AM})$$

$$\Phi(\alpha, \theta, \gamma) = m^2 \sin^2 \alpha + n^2 \sin^2 \theta + 2mn \sin \alpha \sin \theta \cos \gamma$$

Здесь l — длина струны (между O_1 и O); a — расстояние между точками O и C ($l > a$); M — масса тела; g — ускорение силы тяжести; A, C ($A > C$) — главные центральные моменты инерции тела, экваториальный и аксиальный соответственно; p_β, p_φ — циклические импульсы; $\omega_1, \omega_2, p_1, p_2$ — безразмерные циклические скорости и импульсы. Далее все выражения записаны с точностью до нормирующих множителей.

Матрица части кинетической энергии, являющейся квадратичной формой циклических скоростей, обратная ей матрица и потенциал Рауса имеют, соответственно, следующий вид:

$$A \| a_{ij} \| = \begin{vmatrix} v \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \Phi & v \cos \theta \\ v \cos \theta & v \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

$$B = \| b_{ij} \| = \frac{1}{v(\sin^2 \theta + \Phi)} \begin{vmatrix} v & -v \cos \theta \\ -v \cos \theta & v \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \Phi \end{vmatrix}$$

$$W = -(m \cos \alpha + n \cos \theta) + \frac{(p_1 - p_2 \cos \theta)^2}{2(\sin^2 \theta + \Phi)} + \frac{p_2^2}{2v} \quad (3.3)$$

Уравнения стационарных движений, определяющие поверхность B в пространстве RP переменных $\alpha, \theta, \gamma; p_1, p_2$:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = m \sin \alpha - \frac{\Phi_\alpha (p_1 - p_2 \cos \theta)^2}{2(\sin^2 \theta + \Phi)^2} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = n \sin \theta + \frac{\sin \theta (p_1 - p_2 \cos \theta)}{(\sin^2 \theta + \Phi)^2} \left[p_2 - p_1 \cos \theta + p_2 \Phi - \frac{(p_1 - p_2 \cos \theta) \Phi_\theta}{2 \sin \theta} \right] = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma} = -\frac{(p_1 - p_2 \cos \theta)^2 \Phi_\gamma}{2(\sin^2 \theta + \Phi)^2} = 0 \quad (3.6)$$

Здесь $\Phi_\alpha, \Phi_\theta, \Phi_\gamma$ — частные производные Φ по α, θ, γ .

Из (3.4), (3.5) следует, что не существует стационарных движений, на которых $\alpha = 0$, $\theta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ и стационарных движений, на которых $\theta = 0$, $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$; из (3.6) следует, что при $\alpha \neq 0$, $\theta \neq 0$ поверхность стационарных движений лежит в подпространстве $\gamma = 0$ (это отмечалось в [8]). При $\alpha = \theta = 0$ имеет практический смысл стационарные движения рассматривать также при $\gamma = 0$, что в дальнейшем и предполагается.

При $\alpha = \theta = 0$ матрица (3.2) вырождена, и выражения (3.3) — (3.6) не определены. Эти неопределенности могут быть раскрыты на собственной прямой $p_1 = p_2$ матрицы (3.2). Именно, учтя, что $\Phi(\alpha, \theta, \gamma)$ — знакоположительная функция при любых α, θ, γ , легко проверить, что пределы выражений (3.4) — (3.6) и второго слагаемого выражения (3.3) равны нулю при $p_1 = p_2$, $\alpha \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow 0$ (γ — любое). Следовательно, поверхность V содержит при $\alpha = \theta = 0$ ветвь $p_1 = p_2$. Проверяется, что при $p_1 = p_2$, $\alpha \neq 0$, $\theta \neq 0$ система уравнений (3.4) — (3.6) несовместна, т. е. цилиндрическое сечение] гиперплоскостью $p_1 = p_2$ представляет собой (в подпространстве $\gamma = 0$) единственную прямую $\alpha = \theta = 0$, $p_1 = p_2$. Эта прямая вся устойчива, имеется в виду устойчивость по отношению к части переменных $\alpha, \theta, \alpha', \theta', p_1, p_2$. Действительно, с учетом того, что гироскопические силы [1] не могут нарушить устойчивости, из [9] следует, что для такой устойчивости стационарного движения $\alpha = \theta = \gamma = 0$, $p_1 = p_2$ достаточно, чтобы приращение потенциала Рауса было положительно определенной функцией по отношению к части переменных α, θ (т. е., чтобы оно было знакоположительно и равно нулю тогда и только тогда, когда $\alpha = \theta = 0$ [9]). Легко проверить, что потенциал Рауса (3.3) этим свойством обладает.

В силу вырожденности матрицы (3.2) при $\alpha = \theta = 0$ рассмотренной прямой соответствует в $R\Omega$ вся плоскость Ω , также устойчивая. Поэтому тривиальная ветвь любого цилиндрического сечения в $R\Omega$ будет вся устойчива, независимо от наличия на ней точек бифуркации. Это относится, в частности, к рассмотренному в [2] цилиндрическому сечению гиперплоскостью $\omega_2 = 0$. Проекцию L_{ω}^* этого сечения на подпространство $\alpha\theta\omega_1$ можно получить, подставив (2.3) в (3.4), (3.5) при $\omega_2 = 0$, $\gamma = 0$ (с точностью до обозначений она совпадает с кривой (6) из [2]). Проекцию L^* на подпространство $\alpha\theta p_1$ можно получить подстановкой $p_1 = a_{11}(x)\omega_1$ (см. (2.5)) в уравнение кривой L_{ω}^* . Очевидно, L^* имеет ту же особенность, что и L_{ω}^* , причем условие $\omega_2 = 0$ задает в RP нецилиндрическое сечение L . Принципиальная сторона этого явления видна на фиг. 1, 2, относящихся к более простому примеру (см. п. 2).

Поступила 10 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
2. Ишлинский А. Ю. Пример бифуркации, не приводящей к появлению неустойчивых форм стационарного движения. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 1.
3. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. Acta math., 1885, vol. 7.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. — Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.
5. Возлинский В. И. О связи бифуркации равновесий консервативных систем с распределением устойчивости на кривой равновесий. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
6. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М., Физматгиз, 1960.
7. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Об устойчивости стационарных движений голономных и неголономных систем. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
8. Темченко М. Е. Об устойчивости одного из положений динамического равновесия одной механической системы. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 1.
9. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. Моск. ун-та, 1957, № 4.