Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

К ЗАДАЧЕ ОБ ИГРОВОЙ ВСТРЕЧЕ ДВИЖЕНИЙ

А. И. Субботин

(Свердловск)

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о встрече вполне управляемых движений, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dy \,/\, d\tau = Ay + Bu \tag{1.1}$$

$$dz \,/\, d\tau = Az + Bv \tag{1.2}$$

Здесь $y(\tau) = \{y_1(\tau), \ldots, y_n(\tau)\}$ — вектор фазовых координат первого, преследующего объекта, $z(\tau) = \{z_1(\tau), \ldots, z_n(\tau)\}$ — вектор фазовых координат второго, преследуемого объекта; A, B — постоянные матрицы соответствующих размерностей; r-мерные управляющие воздействия u, v — стеснены ограничениями [2]

$$\int_\tau^\infty \|u(t)\|^2 dt \leqslant \mu^2(\tau), \qquad \int_\tau^\infty \|v(t)\|^2 dt \leqslant \nu^2(\tau) \qquad (\tau \geqslant t_0) \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем

$$\|w\| = (w_1^2 + \ldots + w_r^2)^{1/2} \tag{1.4}$$

Пусть в начальный момент $\tau = t_0$ заданы

$$y(t_0) = y^\circ,\ z(t_0) = z^\circ,\ y^\circ \neq z^\circ, \quad \mu(t_0) = \mu^\circ > \nu(t_0) = \nu^\circ \tag{1.5}$$

Будем считать, что в момент времени $\tau = \vartheta$ произошла встреча движений $y(\tau)$ и $z(\tau)$, если при $\tau = \vartheta$ впервые

$$y_i(\vartheta) = z_i(\vartheta) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

Величину ϑ будем называть моментом встречи, а $(\vartheta - t_0) = T(t_0)$ — временем до встречи. Будем рассматривать задачу о встрече, как игру двух лиц [1], где показателем, оценивающим действия игроков, является время до встречи T_{uv}, зависящее от выбора стратегий $u[y, z, \mu, \nu]$ и $v[y, z, \mu, \nu]$. При этом первый игрок (преследователь) выбором стратегии $u[y, z, \mu, \nu]$, стесненной первым условием (1.3), стремится минимизировать время до встречи, а второй игрок (преследуемый) выбирает такие стратегии $v[y, z, \mu, \nu]$, удовлетворяющие второму условию (1.3), что встреча движений $y(\tau)$ и $z(\tau)$ не происходит вообще или время до встречи является максимальным. В соответствии с игровой постановкой задачи оптимальным поведением для первого игрока является выбор стратегии $u[y, z, \mu, \nu]$, обеспечивающей $\min_u \max_v T_{uv}$, а для второго игрока — выбор стратегии $v[y, z, \mu, \nu]$, доставляющей $\max_v \min_u T_{uv}$.

Как показано в работе [2], в случае встречи по всем координатам (1.6) и ограничений вида (1.3) единственной стратегией преследователя, обеспечивающей $\min_u \max_v T_{uv}$, будет правило экстремального прицеливания, т. е. прицеливание в каждый момент τ в точку касания $c(\tau)$ областей достижимости движений $y(\tau)$ и $z(\tau)$, отвечающих моменту поглощения $t = \vartheta_0$. (Управление, прицеливающее движение системы (1.1) или (1.2) в точку $c(\tau)$, будем в дальнейшем обозначать соответственно u° или v°.) Таким образом, $T_{u^\circ v^\circ} \geqslant T_{u^\circ v}$, причем равенство здесь имеет место лишь при $v = v^\circ$. В этой же работе [2] приведен пример, в котором построено такое управление $u = u^*$, что в случае выбора преследуемым игроком $v = v^\circ$, а преследователем $u = u^*$ встреча происходит раньше, чем за время $T_{u^\circ v^\circ}$. Точно так же можно показать, что при выборе преследуемым игроком программного управления $v = v_{t^\circ}{}^\circ(\tau)$, прицеливающего в начальной момент времени $\tau = t_0$ движение системы (1.2) в точку $c(t_0)$, можно указать такое управление $u = u_*$, что встреча движений происходит раньше, чем за время $T_{u^\circ v^\circ}$. Следовательно, неравенство $T_{uv^\circ} \geqslant T_{u^\circ v^\circ}$, вообще говоря, неверно, и стратегия $v = v^\circ$ не обеспечивает $\max_v \min_u T_{uv}$, а пара стратегий $u = u^\circ$, $v = v^\circ$ не доставляет седловую точку рассматриваемой игры.

Ниже строится управление $v(\tau) = v[y(\tau), z(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau), t_0]$, при выборе которого и при любом допустимом поведении преследователя встреча происходит не раньше, чем за время $T_\varepsilon(t_0) = T_{u^\circ v^\circ}(t_0) - \delta$, где δ — сколь угодно мало. Будет доказано, таким образом, что имеет место

$$\sup_v \inf_u T_{uv}(t_0) = \min_u \max_v T_{uv}(t_0) \tag{1.7}$$

Это управление $v = v[y(\tau), z(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau), t_0]$ формируется в каждый момент времени τ, исходя из реализовавшихся $y(\tau)$, $z(\tau)$, $\mu(\tau)$, $\nu(\tau)$, и не использует информацию о выборе управления $u(\tau)$ в тот же момент τ. Заметим, что учет состояния системы при $t = t_0 < \tau$ вводит в управление элемент последействия.

2. Построение управления. При построении искомой стретегии используем метод, предложенный в [3].

Будем сопоставлять рассматриваемой задаче о встрече следующую задачу об оптимальном быстродействии: при фиксированном τ найти управление $w(t)$, стесненное ограничением

$$\int_\tau^\infty \|w(t)\|^2 dt \leqslant \zeta^2(\tau) \tag{2.1}$$

и переводящее систему

$$dx/dt = Ax + Bw \tag{2.2}$$

из положения $x(\tau)$ в положение $x(\tau + T) = 0$ за наименьшее возможное время $T = T^\circ$. Область $\zeta > 0$, $T^\circ[x, \zeta] < \infty$ в пространстве $\{x, \zeta\}$ будем обозначать символом G.

Предположим, что в начальный момент $\tau = t_0$ преследуемый игрок располагает ресурсом $\nu(t_0) - \varepsilon(t_0)$, отличающимся от истинного ресурса

$\nu(t_0)$ на некоторую малую величину $\varepsilon(t_0) = \varepsilon^\circ > 0$. Так как точка $\{y^\circ - z^\circ, \mu^\circ - \nu^\circ\}$ принадлежит области G, то точка $\{y^\circ - z^\circ, \mu^\circ - (\nu^\circ - \varepsilon^\circ)\}$ тем более принадлежит этой области. Функция $T^\circ[x, \zeta]$ в окрестности любой точки, лежащей в области G, будет [2] непрерывной по x и ζ, поэтому

$$0 \leqslant T^\circ[y^\circ - z^\circ, \mu^\circ - \nu^\circ] - T^\circ[y^\circ - z^\circ, \mu^\circ - (\nu^\circ - \varepsilon^\circ)] \leqslant \delta_1(\varepsilon^\circ) \quad (2.3)$$

$$\lim_{\varepsilon^\circ \to 0} \delta_1(\varepsilon^\circ) = 0$$

Пусть в начальный момент $\tau = t_0$ выбрано достаточно малое ε°, которое определит $T^\circ[x^\circ, \zeta^\circ]$, где

$$x = y - z, \qquad \zeta = \mu - (\nu - \varepsilon) \quad (2.4)$$

и момент $\vartheta_\varepsilon(t_0) = t_0 + T^\circ[x^\circ, \zeta^\circ]$. В любой момент времени $\tau \geqslant t_0$ будем подбирать $\varepsilon(\tau)$ так, чтобы

$$\vartheta_\varepsilon(\tau) = \tau + T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)] = \vartheta_\varepsilon(t_0) = \mathrm{const} \quad (2.5)$$

К моменту времени τ реализовавшиеся $y(\tau)$, $z(\tau)$, $\mu(\tau)$, $\nu(\tau)$ известны преследуемому игроку, поэтому из уравнения (2.5) в силу свойств функции $T^\circ[x, \zeta]$ можно определить единственное $\varepsilon(\tau) = \varepsilon[y(\tau), z(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau)]$, удовлетворяющее (2.5). Эта величина $\varepsilon(\tau)$, используемая при построении стратегии $v = v_\varepsilon$, является новой переменной.

При исследовании данной задачи о встрече и при построении искомой стратегии $v = v_\varepsilon$ основную роль будут играть управления $u = u^\circ$, $v = v^\circ$, прицеливающие движения систем (1.1), (1.2) в точку касания областей достижимости $H^{(1)}[y(\tau), \mu(\tau), \vartheta_\varepsilon]$ и $H^{(2)}[z(\tau), \nu(\tau) - \varepsilon(\tau), \vartheta_\varepsilon]$; эти управления определяются равенствами [2]

$$u^\circ(\tau) = \frac{w_\tau^\circ(\tau)\,\mu(\tau)}{\mu(\tau) - (\nu(\tau) - \varepsilon(\tau))}, \qquad v^\circ(\tau) = \frac{w_\tau^\circ(\tau)\,(\nu(\tau) - \varepsilon(\tau))}{\mu(\tau) - (\nu(\tau) - \varepsilon(\tau))} \quad (2.6)$$

Здесь $w_\tau^\circ(t)$, $t \geqslant \tau$ — решение задачи (2.1), (2.2) при

$$x(\tau) = y(\tau) - z(\tau), \quad \zeta(\tau) = \mu(\tau) - (\nu(\tau) - \varepsilon(\tau))$$

Определим теперь стратегию $v = v_\varepsilon$. Пусть

$$\eta(\tau) = \frac{\varepsilon(\tau)}{\nu(\tau)}, \qquad \xi(\tau) = \frac{\zeta(\tau)}{\nu(\tau)} \quad (2.7)$$

$$\varphi(\eta, \xi) = \frac{(1 + \eta/\xi)}{(1 - \eta)^2} \qquad (\xi > 0, \ \eta < 0) \quad (2.8)$$

$$v_\varepsilon(\tau) = \begin{cases} \varphi(\eta(\tau), \xi(\tau))\, v^\circ(\tau) & (t_0 \leqslant \tau \leqslant t^*) \\ 0 & (\tau > t^*) \end{cases} \quad (2.9)$$

Здесь t^* — первый момент времени, когда

$$\frac{\nu(\tau) - \varepsilon(\tau)}{\zeta(\tau)} = \gamma$$

Величина γ будет указана в п. 3. Таким образом, формальное построение стратегии $v = v_\varepsilon$ завершено, в п. 3 будет показано, что эта стратегия действительно решает поставленную задачу.

Ниже приведены основные выкладки, которые используются в п. 3 при исследовании построенной стратегии. Прежде всего, используя условия (2.5), получим

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\frac{1}{2\zeta}(\|w^\circ\|^2 + 2(w^\circ, \delta w)) \qquad (\delta w = w - w^\circ) \tag{2.10}$$

Теперь определим $d\varepsilon / d\tau$. Из (2.4) имеем

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{d\zeta}{d\tau} - \frac{d\mu}{d\tau} + \frac{d\nu}{d\tau} \tag{2.11}$$

Преобразуем правую часть этого равенства, используя следующие соотношения:

$$\frac{d\mu}{d\tau} = -\frac{\|u(\tau)\|^2}{2\mu}, \qquad \frac{d\nu}{d\tau} = -\frac{\|v(\tau)\|^2}{2\nu} \tag{2.12}$$

вытекающие из (1.3). Из (2.10) — (2.12) имеем

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{d\zeta}{d\tau} - \frac{d\mu}{d\tau} + \frac{d\nu}{d\tau} = -\frac{1}{2\zeta}(\|w^\circ\|^2 + 2(w^\circ, \delta w)) + \frac{\|u\|^2}{2\mu} - \frac{\|v\|^2}{2\nu} \tag{2.13}$$

Пусть

$$\delta u = u - u^\circ, \quad \delta v = v - v^\circ \tag{2.14}$$

так как $u - v = w$ и $u^\circ - v^\circ = w^\circ$, то $\delta w = \delta u - \delta v$. Учитывая эти соотношения, (2.13) можно преобразовать к виду

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{\|\delta u\|^2}{2\mu} - \frac{\|\delta v\|^2}{2(\nu - \varepsilon)} + \frac{\varepsilon\|v\|^2}{2(\nu-\varepsilon)\nu} \tag{2.15}$$

Из 2.7 получим

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{1}{\nu}\left(\frac{d\varepsilon}{d\tau} - \eta\frac{d\nu}{d\tau}\right), \qquad \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{\nu}\left(\frac{d\zeta}{d\tau} - \xi\frac{d\nu}{d\tau}\right) \tag{2.16}$$

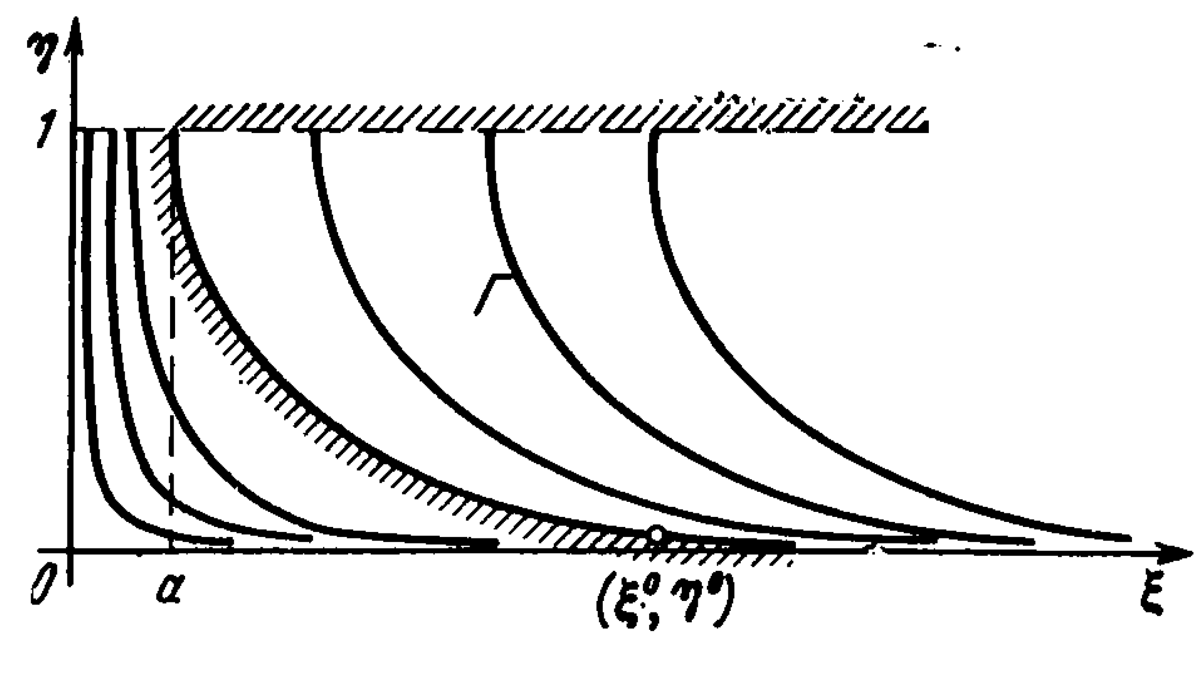
где $d\varepsilon/d\tau$, $d\nu/d\tau$, $d\zeta/d\tau$ определяются из (2.15), (2.12), (2.10).

Рассмотрим функцию

$$V(\eta, \xi) = \eta - \eta(\xi) \tag{2.17}$$

где $\eta(\xi)$ — некоторая кривая из семейства кривых, заданных уравнением

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\eta(2-\eta+1/\xi)}{(1-\eta)^2} \qquad (0 \leqslant \eta < 1, \ \xi > 0) \tag{2.18}$$



Фиг. 1

Вид этих кривых представлен на фигуре. Заметим, что

$$\psi(\eta, \xi) = \frac{\eta(2-\eta+1/\xi)}{(1-\eta)^2} \geqslant 0 \qquad (0 \leqslant \eta < 1, \ \xi > 0) \tag{2.19}$$

$$\varphi(\eta, \xi) \equiv \psi(\eta, \xi) + 1 \tag{2.20}$$

Вычислим $dV / d\tau$ в окрестности некоторой кривой из рассматриваемого семейства, предполагая $v = \varphi v^\circ$, согласно (2.9). Имеем

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{d\eta}{d\tau} - \frac{d\eta}{d\xi}\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{d\eta}{d\tau} + \psi(\eta, \xi)\frac{d\xi}{d\tau}$$

Учитывая (2.16), получим

$$\frac{dV}{d\tau}=\frac{1}{\nu}\left(\frac{d\varepsilon}{d\tau}-\frac{d\nu}{d\tau}\eta\right)+\frac{\psi}{\nu}\left(\frac{d\zeta}{d\tau}-\frac{d\nu}{d\tau}\xi\right)=\frac{1}{\nu}A-\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{d\tau}\eta \qquad (2.21)$$

$$\left(A=\frac{d\varepsilon}{d\tau}+\psi\frac{d\zeta}{d\tau}-\psi\xi\frac{d\nu}{d\tau}\right)$$

Из (2.15), (2.12), (2.10) следует

$$A=\frac{\|\delta u\|^2}{2\mu}-\frac{\|\delta v\|^2}{2(\nu-\varepsilon)}+\frac{\|v\|^2\varepsilon}{2\nu(\nu-\varepsilon)}+\psi\left[-\frac{1}{2\zeta}(\|w^\circ\|^2+2(w^\circ,\ \delta w))+\right.$$

$$\left.+\xi\frac{\|v\|^2}{2\nu}\right]=\frac{\|\delta u\|^2}{2\mu}-\frac{\psi(w^\circ,\ \delta u)}{\zeta}-\frac{\|\delta v\|^2}{2(\nu-\varepsilon)}+\frac{\varepsilon\|v\|^2}{2\nu(\nu-\varepsilon)}+$$

$$+\frac{\psi}{\zeta}(w^\circ,\ \delta v)-\frac{\psi}{2\zeta}\|w^\circ\|^2+\frac{\psi}{2\nu}\xi\|v\|^2$$

Оказывается, что $A\geqslant 0$, тогда, принимая во внимание (2.21) и $d\nu/d\tau\leqslant 0$, имеем

$$\left(\frac{dV}{d\tau}\right)_{v=\varphi v^\circ}\geqslant 0 \qquad (2.22)$$

3. Исследование стратегии $v=v_\varepsilon$. Покажем, что построенная стратегия $v=v_\varepsilon$ решает поставленную задачу. Прежде чем переходить к доказательству этого утверждения, отметим следующее обстоятельство. При построении стратегии $v=v_\varepsilon$ преследуемый игрок предполагает, что он в каждый момент времени τ имеет ресурс $\nu(\tau)-\varepsilon(\tau)$, отличающийся от истинного ресурса на величину $\varepsilon(\tau)$, этот предполагаемый ресурс не может быть больше истинного, поэтому все время до встречи должно выполняться неравенство

$$\varepsilon(\tau)\geqslant 0 \qquad (t_0\leqslant\tau\leqslant\vartheta) \qquad (3.1)$$

Это неравенство будет проверено ниже по ходу исследования стратегии v_ε.

Пусть δ — произвольное указанное наперед положительное число. Покажем, что можно указать такие ε° и γ (см. (2.9)), чтобы стратегия $v=v_\varepsilon$ обеспечивала встречу не раньше, чем за время $T_{u^\circ v^\circ}(t_0)-\delta$. Сначала определим ε°. Пусть $\delta_1=\delta/2$, из (2.3) следует, что можно указать такое $\varepsilon^\circ(\delta_1)>0$, при котором

$$T^\circ[y^\circ-z^\circ,\ \mu^\circ-\nu^\circ]-T^\circ[y^\circ-z^\circ,\ \mu^\circ-(\nu^\circ-\varepsilon^\circ)]=T_{u^\circ v^\circ}(t_0)-T^\circ[y^\circ-z^\circ,\ \mu^\circ-$$

$$-(\nu^\circ-\varepsilon^\circ)]\leqslant\delta_1=\delta/2 \qquad (3.2)$$

Будем теперь считать, что $\varepsilon^\circ>0$ выбрано в соответствии с (3.2). Таким образом, в момент $\tau=t_0$ будут известны ν°, ε°, ζ°, которые определяют точку $\{\eta^\circ=\varepsilon^\circ/\nu^\circ,\ \xi^\circ=\zeta^\circ/\nu^\circ)\}$ и кривую из рассматриваемого семейства (2.18), на которой эта точка находится. Не ограничивая общности, можно считать, что сначала управление $v=v_\varepsilon$ выбирается в соответствии с первой из формул (2.9). Тогда из неравенства $(dV/d\tau_{\ v=\varphi v^\circ})\geqslant 0$ вытекает, что точка $\{\eta(\tau),\ \xi(\tau)\}$ может переходить только с нижних на вышележащие кривые семейства (2.18), по крайней мере, до тех пор, пока выполняется неравенство

$$\frac{\nu(\tau)-\varepsilon(\tau)}{\zeta(\tau)}=\frac{1-\eta(\tau)}{\xi(\tau)}\geqslant\gamma$$

и, следовательно, управление выбирается в виде $v=\varphi v^\circ$.

При этом точка $\{\eta(\tau),\ \xi(\tau)\}$ все время будет оставаться в области Γ (фигура). Действительно, точка $\{\eta,\ \xi\}$ не может оказаться ниже кривой, на которой лежит $\{\eta^\circ,\ \xi^\circ\}$, так как $(dV/d\tau)_{v=\varphi v^\circ}\geqslant 0$, и не может пересечь прямую $\eta=1$, потому что в этом случае, учитывая $\xi(\tau)\geqslant a>0$, имели бы $(1-\eta(\tau))/\xi(\tau)=0<\gamma$.

Пусть $\gamma > 0$ некоторая постоянная величина. Докажем следующее утверждение (*A*). Если для любого τ $(t_0 \leqslant \tau \leqslant \tau^* < \vartheta_\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\frac{1-\eta(\tau)}{\xi(\tau)} \equiv \frac{\nu(\tau)-\varepsilon(\tau)}{\zeta(\tau)} \geqslant \gamma \tag{3.3}$$

и $v = \varphi v^\circ$, то на отрезке времени $[t_0, \tau^*]$ встреча движений не происходит.

При доказательстве утверждения (*A*) воспользуемся двумя вспомогательными положениями.

1°. Пусть

$$0 < M \leqslant T^\circ\,[x(\tau), \zeta(\tau)] \leqslant N \qquad (M,\ N = \mathrm{const}) \tag{3.4}$$

$$\zeta(\tau) \geqslant \alpha > 0, \qquad t_0 \leqslant \tau \leqslant \tau^* \tag{3.5}$$

Тогда для любого τ из $[t_0, \tau^*]$ имеем $x(\tau) \neq 0$.

Это положение вытекает из свойств функции $T^\circ\,[x, \zeta]$.

2°. Если при $t_0 \leqslant \tau \leqslant \tau^* < \vartheta_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\eta(\tau) \leqslant 1-\beta \qquad (\beta = \mathrm{const} > 0) \tag{3.6}$$

а $v = \varphi v^\circ$, причем точка $\{\eta(\tau), \xi(\tau)\}$ остается в области Г, то

$$\nu(\tau) \geqslant \alpha > 0, \qquad t_0 \leqslant \tau \leqslant \tau^* < \vartheta_\varepsilon \tag{3.7}$$

Чтобы доказать (3.7), рассмотрим выражение

$$\frac{d\nu}{d\tau} = -\frac{\|v\|^2}{2\nu} = -\frac{\varphi^2\|v^\circ\|^2}{2\nu} = -\varphi^2(1-\eta)(\nu-\varepsilon)\frac{\|w^\circ\|^2}{2\zeta^2} \tag{3.8}$$

Так как $\{\eta, \xi\} \in$ Г, то $\xi \geqslant a > 0$ (фигура). Учитывая (3.6), получим

$$\varphi(\eta(\tau), \xi(\tau)) = \frac{1+\eta(\tau)/\xi(\tau)}{(1-\eta(\tau))^2} \leqslant K_1 \qquad (K_1 = \mathrm{const}) \tag{3.9}$$

Покажем теперь, что

$$\frac{\|w^\circ(\tau)\|^2}{\zeta^2(\tau)} \leqslant K_2 \qquad (K_2 = \mathrm{const},\ t_0 \leqslant \tau \leqslant \tau^* < \vartheta_\varepsilon) \tag{3.10}$$

Действительно, $\|w^0(\tau)\|^2$ и $\zeta^2(\tau)$ являются [2] определенно положительными квадратичными формами от координат вектора $x(\tau)$ с переменными непрерывными по τ, ограниченными при $t_0 \leqslant \tau \leqslant \tau^* < \vartheta_\varepsilon$ коэффициентами, поэтому отношение этих форм удовлетворяет неравенству (3.10). Из (3.8) — (3.10) теперь вытекает, что $d\nu / d\tau \geqslant -K_3\nu$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant \tau^* < \vartheta_\varepsilon$, поэтому из условия $\nu^\circ > 0$ следует (3.7).

Докажем теперь утверждение (*A*). Выше было показано, что в рассматриваемом случае точка $\{\eta(\tau), \xi(\tau)\}$ остается в области Г, поэтому $\eta(\tau) = \varepsilon(\tau) / \nu(\tau) \geqslant 0$ и $\varepsilon(\tau) \geqslant 0$, таким образом, условие (3.1) выполняется. Для любой точки, принадлежащей области Г, имеем $\xi(\tau) \geqslant a > 0$, поэтому из (3.3) получим $1-\eta \geqslant \gamma a$, $\eta \leqslant 1-\gamma a$. Из 2° теперь следует, что $\nu(\tau) \geqslant \alpha > 0$ $(t_0 \leqslant \tau \leqslant \tau^*)$, так как $\xi(\tau) = \zeta(\tau) / \nu(\tau) \geqslant a$, то $\zeta(\tau) \geqslant \alpha a > 0$, т. е. имеет место (3.5). Заметим, что при любом $\tau_* < \vartheta_\varepsilon$ условие (3.4) есть следствие равенства (2.5), поэтому из 1° получим $x(\tau) = y(\tau) - z(\tau) \neq 0$ $(t_0 \leqslant \tau \leqslant \tau^* < \vartheta_\varepsilon)$. Утверждение (*A*) доказано.

Таким образом, если бы при любом $\tau < \vartheta_\varepsilon$ имело место неравенство (3.3), то встреча происходила бы не раньше, чем в момент времени $\vartheta_\varepsilon\,(t_0) = T_{u^\circ v^\circ}(t_0) - \delta / 2 + t_0$.

Пусть, однако, в момент τ^* впервые

$$\frac{[\nu(\tau^*) - \varepsilon(\tau^*)]}{\zeta(\tau^*)} = \gamma$$

Можно рассматривать лишь случай, когда

$$t_0 \leqslant \tau^* \leqslant \vartheta_\varepsilon - {}^1/_2\,\delta \tag{3.11}$$

так как построенная стратегия $v = v_\varepsilon$ должна обеспечивать встречу не раньше, чем в момент времени $T_{u^\circ v^\circ}(t_0) + t_0 - \delta = \vartheta_\varepsilon(t_0) - {}^1/_2\,\delta$. Но согласно (2.9) при $\tau \geqslant \tau^*$

имеем $v(\tau) \equiv 0$, поэтому наименьшее возможное время, до встречи от момента τ^* будет равно $T^\circ[x, (\tau^*), \mu(\tau^*)]$, причем из (3.3) и (2.4) имеем $\mu(\tau^*) = \zeta(\tau^*) + \gamma\zeta(\tau^*)$. Таким образом, в момент времени τ^* выполняются соотношения

$$\tau^* + T^\circ[x(\tau^*), \zeta(\tau^*)] = \vartheta_\varepsilon(t_0), \qquad \tau^* + T^\circ[x(\tau^*), \zeta(\tau^*) + \gamma\zeta(\tau^*)] = \vartheta^\circ \qquad (3.12)$$

Здесь ϑ° — наименьший возможный момент встречи (при условии $v(\tau) = 0$, $\tau > \tau^*$).

Докажем следующее утверждение.

3°. Пусть для $\{x, \zeta\} \in G$ имеют место равенства

$$T[x, \zeta] = K = \mathrm{const} > 0, \qquad (3.13)$$

Тогда

$$T^\circ[x, \zeta] - T^\circ[x, \zeta + \gamma\zeta] = \omega(x, \zeta, \gamma) \to 0 \qquad \text{при } \gamma \to 0 \qquad (3.14)$$

равномерно по всем x и ζ, удовлетворяющим (3.13).

При фиксированных x и ζ условие (3.14) выполняется в силу непрерывности по ζ функции $T^\circ[x, \zeta]$, поэтому остается показать, что $\omega(x, \zeta, \gamma) \to 0$ при $\gamma \to 0$ равномерно по x и ζ. Для этого выпишем уравнение для определения $T = T^\circ[x, \zeta]$

$$(D_T x, x)^{1/2} - \zeta = 0 \qquad (3.15)$$

Здесь $(D_T x, x)$ — определенно положительная форма, коэффициенты которой являются непрерывными функциями T $(T > 0)$. Запишем уравнение (3.15) в виде

$$(D_T q, q)^{1/2} - 1 = 0, \qquad (q = x / \zeta) \qquad (3.16)$$

Так как $(D_k q, q)$ — определенно положительная квадратичная форма, то множество Q всех q, для которых $(D_k q, q)^{1/2} - 1 = 0$, замкнуто. Для определения $T = T^\circ[x, \zeta + \gamma\zeta]$ имеем уравнение

$$(D_T q, q)^{1/2} - (1 + \gamma) = 0$$

Корень этого уравнения непрерывно зависит от q и γ, поэтому $\omega(x, \zeta, \gamma)$ также является непрерывной функцией лишь q и γ, определенной, во всяком случае, при $q \in Q$ и $\gamma \geqslant 0$.

Так как q принадлежит замкнутому множеству Q, то (3.14) выполняется равномерно по всем q из Q или, что то же самое, равномерно по всем x и ζ, удовлетворяющим (3.13). Утверждение 3° доказано.

Из (2.5) и (3.11) следует, что в рассматриваемом случае $1/2\,\delta \leqslant K \leqslant \vartheta_\varepsilon(t_0)$. Используя 3°, можно определить для любого K из рассматриваемого отрезка такое $\gamma(K)$, что $\omega(x, \zeta, \gamma) \leqslant 1/2\,\delta$ равномерно по x и ζ.

Возьмем теперь $\gamma = \min_k \gamma(K)(1/2\,\delta \leqslant K \leqslant \vartheta_\varepsilon(t_0))$. Покажем, что при таком γ встреча произойдет не раньше, чем за время $T_{u^\circ v^\circ}(t_0) - \delta$. В самом деле, $\omega(x, \zeta, \gamma) \leqslant 1/2\,\delta$ т. е. $T^\circ[x, \zeta] - T^\circ[x, \zeta + \gamma\zeta] \leqslant 1/2\,\delta$, поэтому (см. (3.12))

$$\vartheta_\varepsilon(t_0) - \vartheta^\circ \leqslant \delta / 2, \qquad \vartheta \geqslant \vartheta_\varepsilon - \delta / 2 = t_0 + T_{u^\circ v^\circ}(t_0) - \delta$$

Поступила 5 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Репин Ю. М., Третьяков В. Е. О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1965, № 4.
2. Красовский Н. Н. К задаче о преследовании в случае линейных однотипных объектов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
3. Красовский Н. Н., Третьяков В. Е. К задаче о встрече движений. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, вып. 2.
4. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр. Усп. матем. н., 1966, т. 21, вып. 4 (130).