

## О НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

В. М. Е н т о в

(Москва)

Интерес к исследованию задач нелинейной фильтрации, т. е. фильтрации, не следующей закону Дарси, обусловлен прежде всего их важностью для приложений. Движение парафинистых нефтей, нефтей, содержащих асфальтены, водо-нефтяных эмульсий и даже движение воды в глинизированных породах является не-newтоновским и характеризуется более или менее сильным отклонением от линейной зависимости между скоростью фильтрации  $w$  и градиентом давления  $\text{grad } p$ .

Из всех нелинейных законов фильтрации наиболее важен так называемый закон фильтрации с предельным градиентом

$$\text{grad } p = -\frac{\mu}{k} w - \gamma \frac{w}{w} \quad (w > 0), \quad |\text{grad } p| \leq \gamma = \text{const} \quad (w = 0) \quad (0.1)$$

Он был введен для описания фильтрации воды в глине [1,2] и вязко-пластических (бингамовских) жидкостей [3,4], однако имеет более широкую область применимости.

Именно он выполняется в некоторой промежуточной области скоростей фильтрации (не слишком малых, но и не настолько больших, чтобы сказались инерционные эффекты), если только при больших скоростях сдвига зависимость между касательными напряжениями и скоростями сдвига приближается к линейной.

При таком подходе закон фильтрации (0.1) применим к большинству случаев; при этом область фильтрации естественно разбивается на область движения, где связь между градиентом давления и скоростью фильтрации линейна, и застойные зоны, где жидкость покоится (или, если соотношения (0.1) выполняются приближенно, движется с пренебрежимо малыми скоростями). В задачах нефтедобычи застойные зоны представляют собой области потерянной нефти (или области, откуда нефть может быть извлечена лишь весьма медленно). Отсюда ясно, что определение размеров застойных зон представляет собой основную задачу теории нелинейной фильтрации.

Образование застойных зон требует перестройки потока в связи с изменением фильтрационных сопротивлений и возможно лишь в существенно неоднородных системах.

Ниже задача построения картины течения и определения границ застойных зон рассматривается для ряда симметричных конфигураций источников и стоков. При этом используется преобразование Чаплыгина ([6], см. также [7,8]), на роль которого в задачах нелинейной фильтрации впервые указал С. А. Христианович ([9], см. также [10]). В плоскости годографа скорости фильтрации задачи рассматриваемого типа сводятся к решению краевых задач для линейного уравнения в полуполосе с продольным разрезом. Получены оценки для решений и связанные с ними оценки для размеров застойной зоны на физической плоскости. Построены предельные решения, определяющие характер течения вблизи острия застойной зоны и позволяющие дать простые нижние оценки для ее размеров.

Отметим, что близкие по постановке задачи рассмотрены в работе [5], однако в ней с целью упрощения был изменен вид закона фильтрации, и задача была сведена к решению уравнения Лапласа в области с неизвестной границей.

§ 1. Основные уравнения. Рассмотрим плоское движение несжимаемой жидкости, подчиняющееся произвольному (вообще говоря, нелинейному) закону фильтрации, который запишем в форме, предложенной С. А. Христиановичем [9]

$$\text{grad } H = -\frac{w}{\mu} \Phi(w) \quad \left( H = \frac{k}{\mu} (p + \rho g z) \right) \quad (1.1)$$

Здесь  $H$  — приведенный напор;  $p$  — давление,  $\rho g$  и  $\mu$  — удельный вес и вязкость жидкости,  $z$  — вертикальная координата,  $k$  — проницаемость, отвечающая линейному участку закона фильтрации. Обозначая через  $\theta$  угол между осью  $x$  и вектором скорости фильтрации, систему уравнений движения можно представить в виде

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\Phi(w) \cos \theta, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\Phi(w) \sin \theta, \quad \frac{\partial (w \cos \theta)}{\partial x} + \frac{\partial (w \sin \theta)}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

Уравнение неразрывности будет тождественно удовлетворено, если ввести функцию тока  $\psi$  соотношениями

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -w \sin \theta, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = w \cos \theta \quad (1.3)$$

Как известно [9,10], уравнения фильтрации станут линейными, если принять  $w$  и  $\theta$  за независимые переменные, а  $\psi$  и  $H$  за искомые функции. После преобразования имеем систему уравнений [9,10]

$$\Phi^2 \frac{\partial \psi}{\partial w} + w \Phi'(w) \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \quad \Phi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - w^2 \frac{\partial H}{\partial w} = 0 \quad (1.4)$$

Из этой системы можно исключить  $H$  и получить для  $\psi$  уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{w \Phi(w)}{\Phi'(w)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} + \left[ 2w - \frac{\Phi(w)}{\Phi'(w)} - \frac{w \Phi(w) \Phi''(w)}{[\Phi'(w)]^2} \right] \frac{\partial \psi}{\partial w} = 0 \quad (1.5)$$

Среди нелинейных законов фильтрации наибольший интерес, как ввиду его сравнительной простоты, так и в связи с возможными практическими приложениями, представляет закон фильтрации с предельным градиентом

$$\Phi(w) = w + \lambda \quad (w > 0), \quad 0 \leq \Phi(w) \leq \lambda \quad (w = 0) \quad (1.6)$$

Закон фильтрации (1.6) предполагает возможность образования застойных зон-областей, в которых  $w \equiv 0$ . Вне этих зон, в области течения, уравнение (1.5) переходит в

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + w(w + \lambda) \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} + (w - \lambda) \frac{\partial \psi}{\partial w} = 0 \quad (1.7)$$

Если функция тока  $\psi$  найдена, то напор  $H$  может быть найден из системы (1.4), принимающей вид

$$(w + \lambda)^2 \frac{\partial \psi}{\partial w} + w \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \quad (w + \lambda) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - w^2 \frac{\partial H}{\partial w} = 0 \quad (1.8)$$

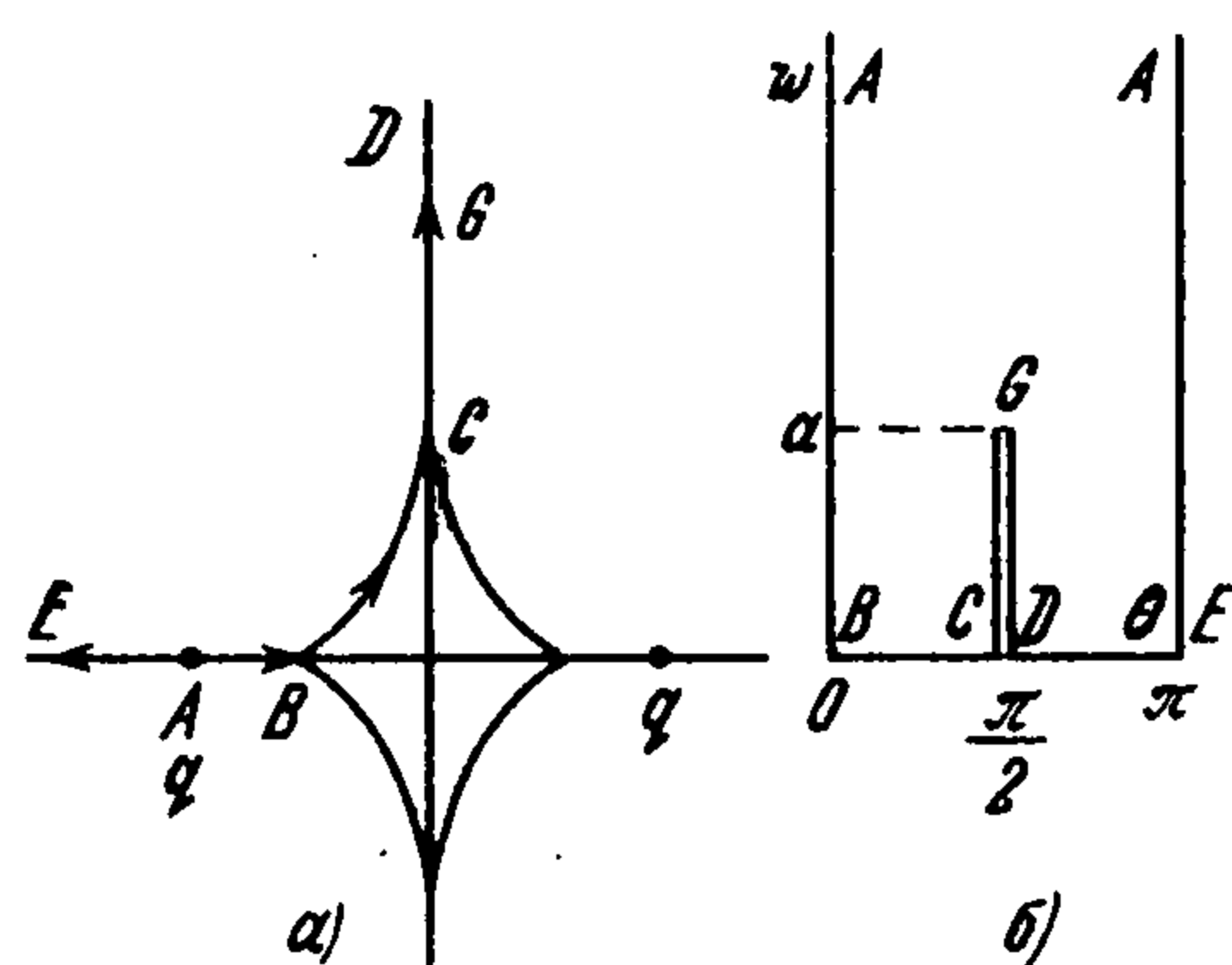
Граничные условия для системы (1.8) или уравнения (1.7) формулируются обычным образом, единственная особенность состоит в том, что границы застойных зон одновременно являются и линиями тока  $\psi = \text{const}$  и линиями нулевой скорости  $w = 0$ .

Наконец, если  $\psi$  и  $H$  найдены в функции  $w$  и  $\theta$ , то образом некоторой линии  $C$  плоскости  $w\theta$  на плоскости исходных независимых переменных  $xu$  будет кривая, определяемая уравнениями [9,10]

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \int_C \frac{\cos \theta}{\Phi(w)} dH + \frac{\sin \theta}{w} d\psi = x_0 - \int_C \frac{\cos \theta}{w + \lambda} dH + \frac{\sin \theta}{w} d\psi \\ y &= y_0 - \int_C \frac{\sin \theta}{\Phi(w)} dH - \frac{\cos \theta}{w} d\psi = y_0 - \int_C \frac{\sin \theta}{w + \lambda} dH - \frac{\cos \theta}{w} d\psi \end{aligned} \quad (1.9)$$

В этих соотношениях  $\psi$  и  $H$  предполагаются выраженными через  $w$  и  $\theta$ .

**§ 2. Отображение симметричных областей.** 1°. Возможность эффективного решения плоской задачи нелинейной фильтрации при помощи преобразования годографа связана с существованием взаимно-однозначного отображения плоскости течения  $xu$  на достаточно простую область плоскости годографа  $w\theta$ . Рассмотрим несколько простых задач, для которых это выполнимо. Пусть в плоскости имеется два точечных источника с интенсивностями  $q$  на расстоянии  $2L$  один от другого. Тогда картина течения будет симметрична относительно осей  $x$  и  $y$  (фиг. 1), и в начале координат



Фиг. 1

го отображения плоскости течения  $xu$  на достаточно простую область плоскости годографа  $w\theta$ . Рассмотрим несколько простых задач, для которых это выполнимо. Пусть в плоскости имеется два точечных источника с интенсивностями  $q$  на расстоянии  $2L$  один от другого. Тогда картина течения будет симметрична относительно осей  $x$  и  $y$  (фиг. 1), и в начале координат

$$w = 0, \quad |\text{grad } H| = 0 \quad (x = y = 0) \quad (2.1)$$

Допустим, что искомые функции  $\psi$  и  $H$  непрерывны вместе со своими первыми производными вплоть до границы области движения. Тогда из (2.1) немедленно следует, что начало координат окружено застойной зоной, в которой  $w = 0$ . Далее, на границе застойной зоны  $w = 0$ , а градиент напора равен по модулю  $\lambda$  и направлен вдоль границы. Отсюда получается, что в критических точках границы застойной зоны (т.е. тех точках, где сливаются линии тока, ограничивающие застойную зону), граница застойной зоны имеет точки возврата (фиг. 1а).

Картину течения фиг. 1а легко отобразить на плоскость годографа (фиг. 1б). Второй квадрант плоскости течения на плоскости  $w\theta$  переходит в полубесконечную полосу с разрезом  $ABCGDEA$ . Длина разреза  $CG = a$  равна максимальному значению на оси  $y$  скорости фильтрации, достигаемому в некоторой точке  $G$ . Заранее нельзя исключить случай, когда застойная зона захватывает всю ось  $y$ ; тогда фиг. 1а точка  $C$  уходит в бесконечность, а на фиг. 1б точка  $G$  сливается с  $C$  и  $D$ .

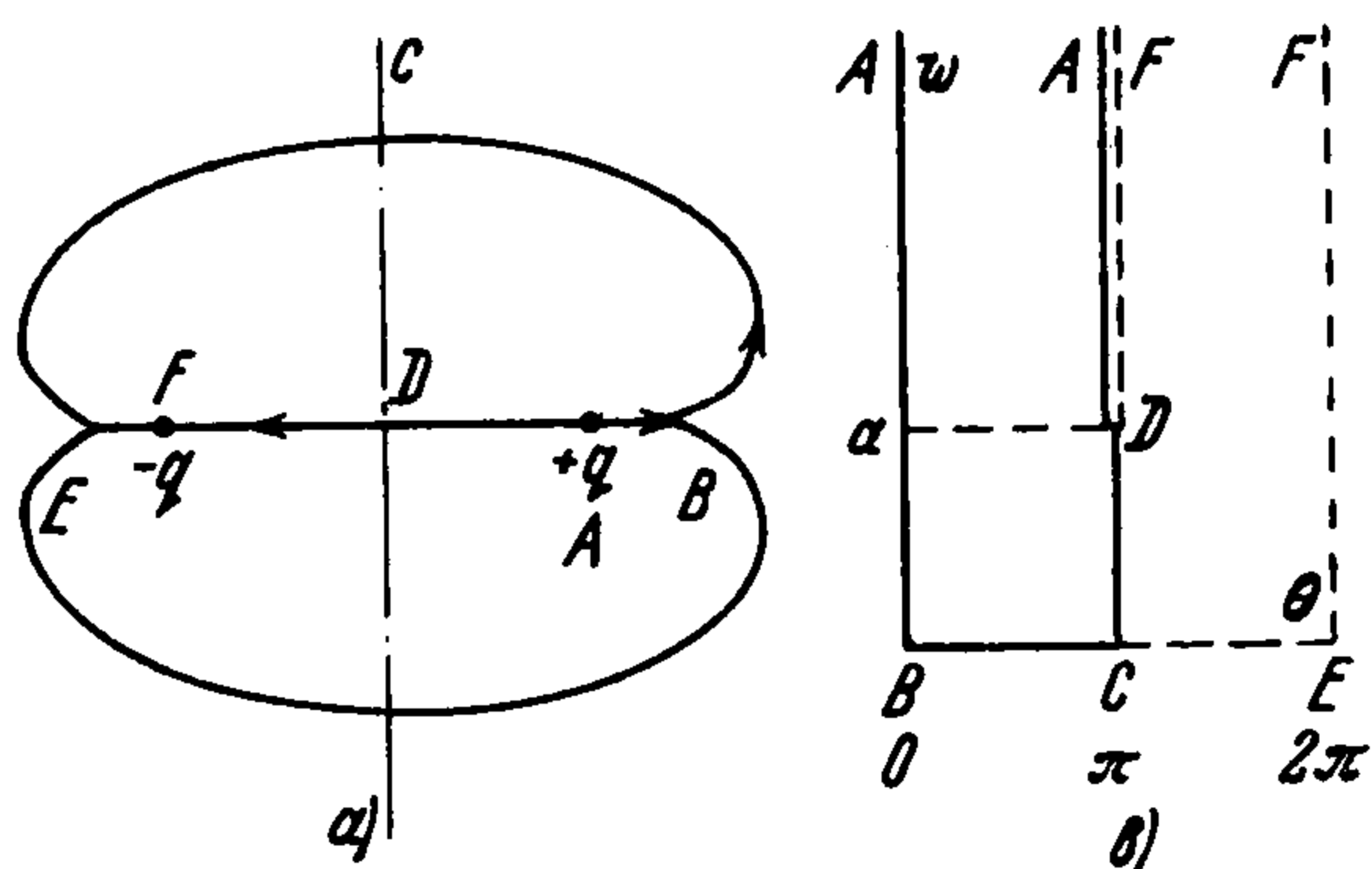
Для определения  $\psi$  нужно решить уравнение (1.8) в области  $ABCGDE$  при следующих граничных условиях:

$$\psi = 0 \quad \text{на } ABCGD, \quad \psi = \frac{q}{2} \quad \text{на } EA, \quad \psi = \frac{q}{2} \left(1 - \frac{2(\pi - \theta)}{\pi}\right) \quad \text{на } DE \quad (2.2)$$

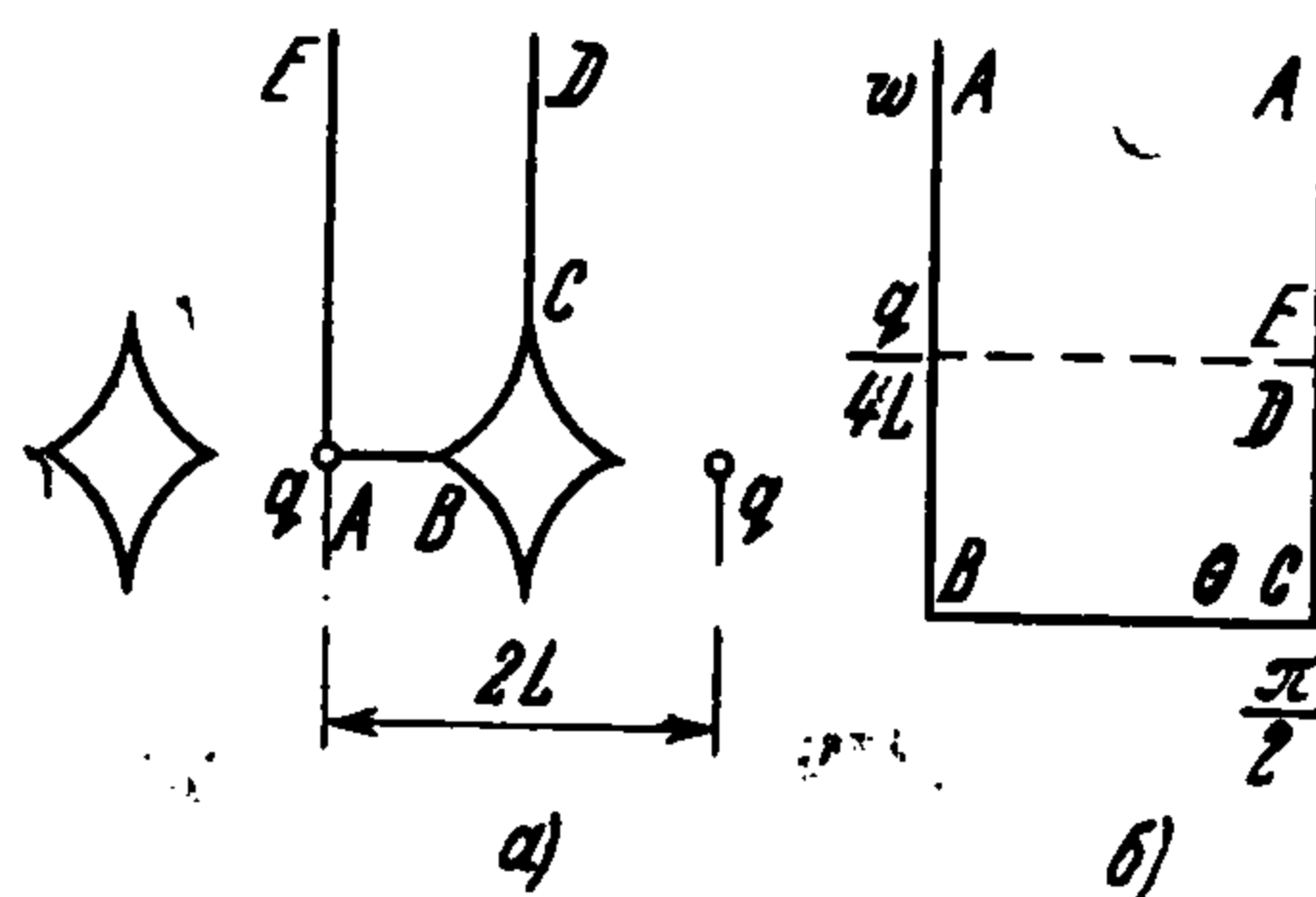
Последнее условие следует из того обстоятельства, что на бесконечности картина течения асимптотически совпадает с полем одиночного точечного источника интенсивности  $2q$ .

2°. Предположим теперь, что в предыдущем примере один из источников заменен на сток той же интенсивности. Тогда должна образоваться внешняя застойная зона (фиг. 2а).

Действительно, если предположить, что внешней застойной зоны нет, то возможно появление линий тока сколь угодно большой длины. В силу закона фильтрации (1.6) перепад напора  $H$  между любыми двумя точками

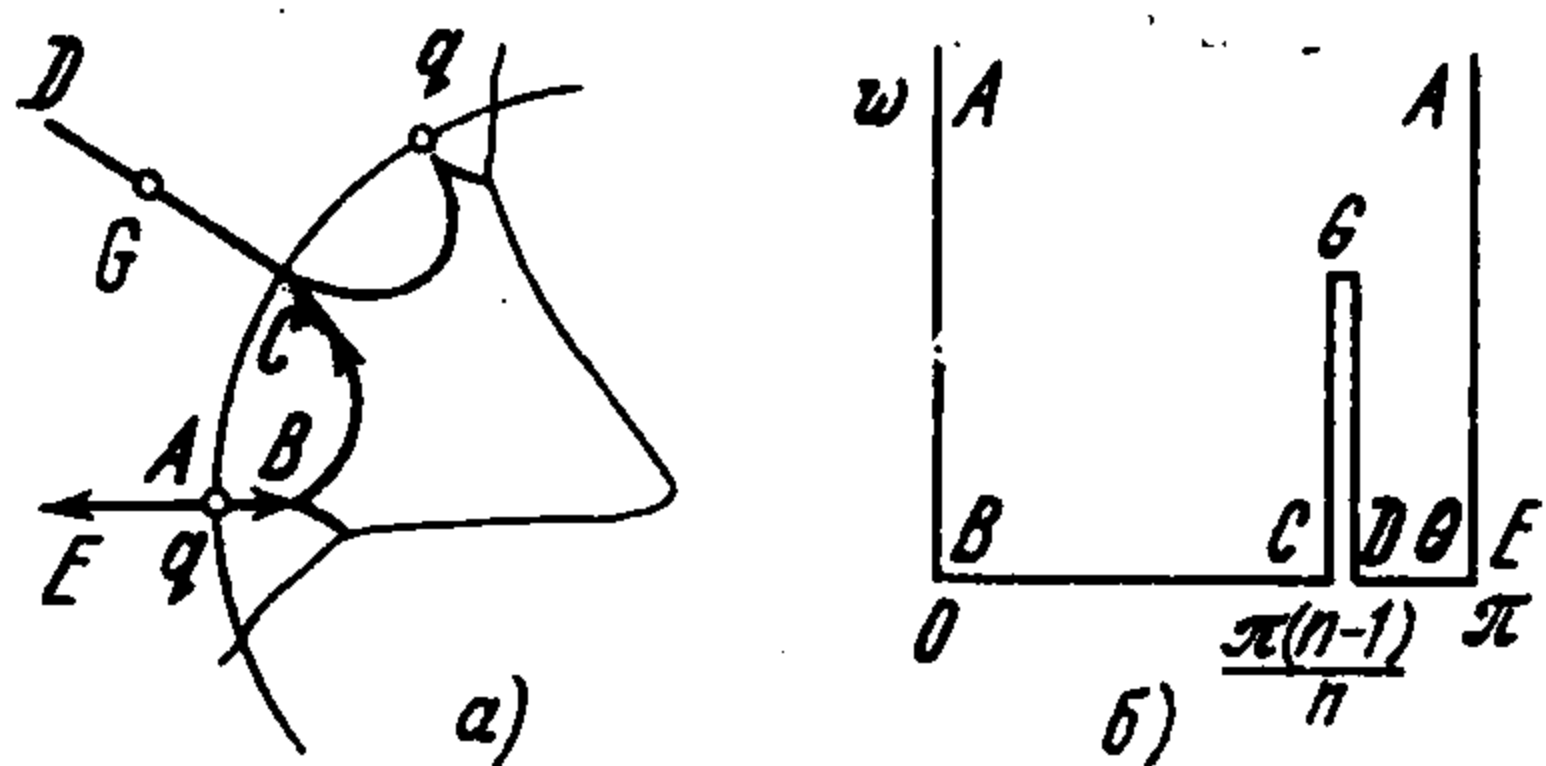


Фиг. 2

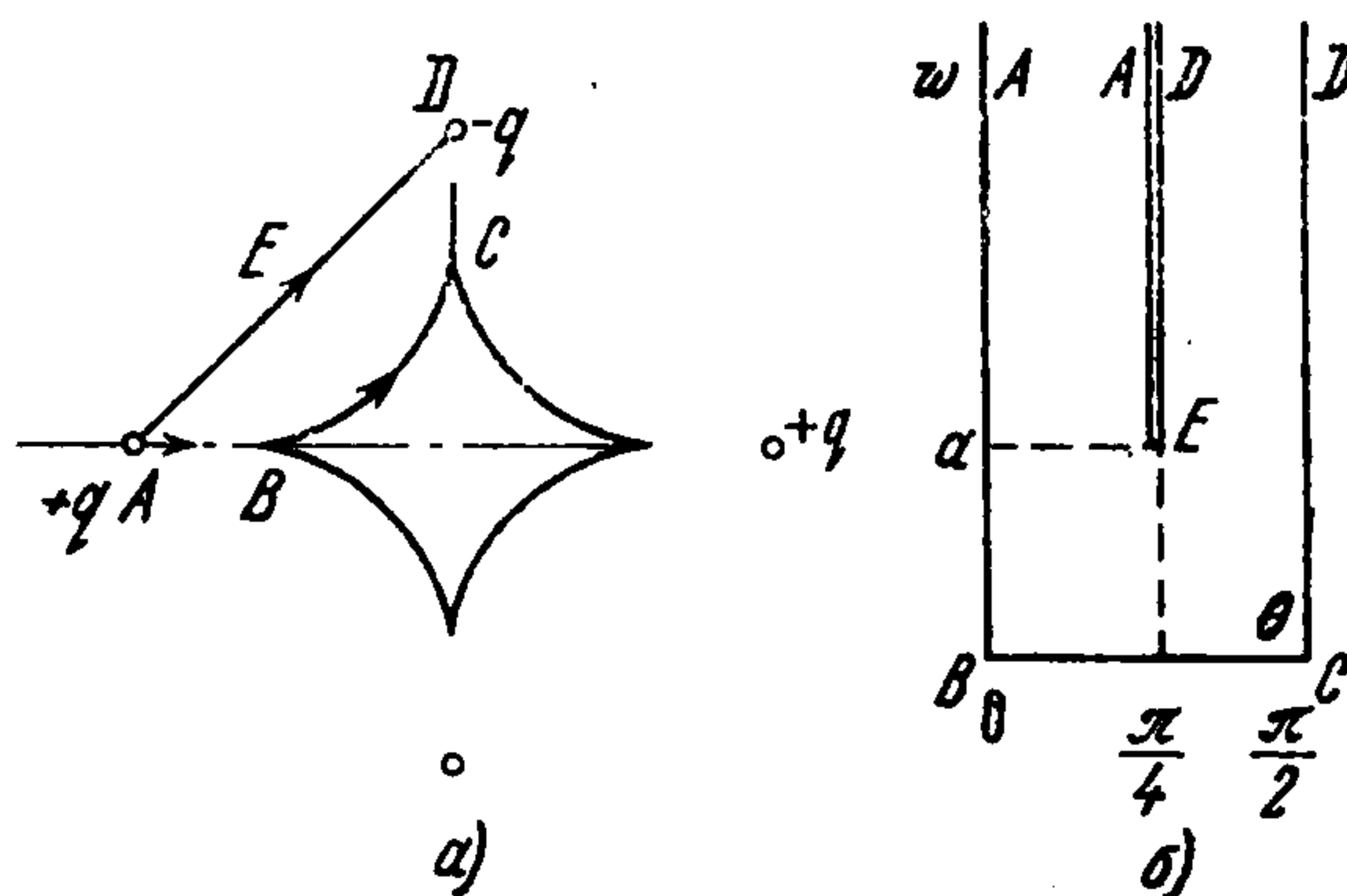


Фиг. 3

линии тока не меньше, чем  $\lambda l$ , где  $l$  — длина дуги линии тока. В то же время, поскольку источник и сток можно окружить двумя замкнутыми «эквипотенциалами», то перепад напора для всех линий тока между этими



Фиг. 4



Фиг. 5

эквипотенциалами конечен. Ввиду того, что течение симметрично относительно оси  $x$  и антисимметрично относительно оси  $y$ , снова часть области движения, лежащая в первом квадранте, отображается на полуполосу в плоскости годографа  $w\theta$  (фиг. 2б). При этом

$$\psi = 0 \text{ на } ABC, \quad \psi = 1/2q \text{ на } DA, \quad H = \text{const на } CD$$

С учетом второго уравнения (1.4) отсюда получаем

$$\psi = 0 \text{ на } ABC, \quad \psi = 1/2q \text{ на } DA, \quad \partial\psi/\partial\theta = 0 \text{ на } CD \quad (2.3)$$

Длина отрезка  $CD = a$  на плоскости  $w\theta$  также подлежит определению.

Приведенные два примера типичны как в отношении качественной картины течения в физической плоскости, так и в отношении задачи, возникающей в плоскости  $w\theta$ . Существует значительное число симметричных конфигураций источников и стоков,

для которых также легко построить образ на плоскости  $w\theta$ . Например, для бесконечного ряда источников (фиг. 3,а) основной элемент плоскости течения  $ABCDE$  отображается на полубесконечную полосу (фиг. 3,б), причем в этом случае задача для функции тока получается проще, так как не является смешанной:  $\psi = 0$  на границе  $ABCD$  и  $\psi = 1/4q$  на  $EA$  (фиг. 3,б). Аналогичным образом легко построить отображение для двух параллельных рядов источников или источников и стоков, а также для круговых батарей источников и встречающегося в нефтепромысловой практике чередующегося расположения источников и стоков в виде двойкопериодической решетки (так называемые пяти-, семи- и девятиточечные системы расстановки скважин). Приведем для примера отображения для круговой батареи  $n$  источников (фиг. 4) и для элемента пятиточечной схемы (фиг. 5). В обоих этих случаях положение конца разреза  $a$  должно быть дополнительно определено.

**§ 3. Предельные случаи и оценки для решений.** 1°. Из сказанного выше ясно, что ряд важных для приложений задач может быть сведен к определению функции  $\psi$ , удовлетворяющей уравнению (1.7) в полубесконечной полосе  $0 < \theta < \theta_0 = \text{const}$ ,  $0 < w < \infty$  с выброшенным отрезком  $\theta = \theta_1$ ,  $0 < w < a$  (первая задача) или лучом  $\theta = \theta_1$ ,  $a < w < \infty$  (вторая задача). При этом граничные условия имеют вид:

$$\text{в первой задаче} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \psi = 0 & \quad (\theta = 0, 0 \leq w < \infty; w = 0, 0 \leq \theta \leq \theta_1; \theta = \theta_1, 0 \leq w \leq a) \\ \psi = Q \left(1 - \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0 - \theta_1}\right), & \quad (w = 0, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_0), \quad \psi = Q \quad (\theta = \theta_0, 0 \leq w < \infty) \end{aligned}$$

во второй задаче

$$\begin{aligned} \psi = 0 & \quad (\theta = 0, \theta = \theta_0, 0 \leq w < \infty; w = 0, 0 < \theta < \theta_0) \\ \psi = Q & \quad (\theta = \theta_1, a \leq w < \infty) \end{aligned} \quad (3.2)$$

В случае, если картина в плоскости  $w\theta$  обладает дополнительной симметрией, задача может быть сведена к смешанной задаче для полуполосы меньшей ширины.

В общем случае искомые решения могут быть, по-видимому, найдены лишь приближенно. Однако для них можно дать простые оценки, используя граничные условия (3.1) или (3.2) и то, что для уравнения (1.7), очевидно, справедлив принцип максимума (см., например, [11]). В соответствии с этим принципом функция  $\psi$  принимает свое наибольшее и наименьшее значения на границе области, в которой ищется решение.

Рассмотрим вначале первую задачу. Для ее решения очевидна оценка

$$0 \leq \psi(w, \theta) \leq Q\theta / \theta_0 \quad (3.3)$$

Правое неравенство следует из того, что  $Q\theta / \theta_0$  удовлетворяет уравнению (1.7), а в точках границы принимает значения, не меньшие, чем  $\psi$ . Будем теперь изменять величину параметра  $a$ . Пусть  $a$  и  $a' > a$  — два значения параметра  $a$ , а  $\psi_a$  и  $\psi_{a'}$  — отвечающие им решения. Тогда в общей области определения

$$\psi_{a'} \leq \psi_a \quad (3.4)$$

Действительно,  $\psi_{a'}$  и  $\psi_a$  совпадают во всех точках границы области определения за исключением отрезка  $\theta = \theta_1$ ,  $a < w \leq a'$ , на котором  $\psi_a \geq \psi_{a'} = 0$ .

В частности,

$$\psi_{\infty} \leq \psi_a \leq \psi_0 \quad (3.5)$$

где через  $\psi_{\infty}$  и  $\psi_0$  обозначены решения, отвечающие  $a = \infty$  и  $a = 0$ , причем неравенства (3.4) справедливы в общей области определения рассматриваемых решений.

2°. Для дальнейшего понадобятся также некоторые оценки поведения решения вблизи границ области определения.

Пусть  $M$  — некоторая общая точка границ областей определения функций  $\psi_a$  и  $\psi_{a'}$ , а  $P$  — точка внутри области. Поскольку  $\psi_a(M) = \psi_{a'}(M)$  в силу граничных условий, то

$$\psi_a(P) - \psi_a(M) \geq \psi_{a'}(P) - \psi_{a'}(M) \quad (3.6)$$

$$[\psi_a(P) - \psi_a(M)] / r_{PM}^{\alpha} \geq [\psi_{a'}(P) - \psi_{a'}(M)] / r_{PM}^{\alpha} \quad (3.7)$$

Здесь  $\alpha$  — некоторая постоянная,  $r_{PM}$  — расстояние между точками  $P$  и  $M$  в плоскости  $w\theta$ . Переходя в неравенстве (3.7) к пределу при  $P \rightarrow M$ , получаем, что производная решения  $\psi_a$  по  $r^{\alpha}$  в точке границы вдоль любого внутреннего направления не меньше, чем соответствующая производная решения  $\psi_{a'}$ . В частности, это справедливо для производных в направлении внутренней нормали. Число  $\alpha$  в (3.7) следует, естественно, выбирать так, чтобы исключить тривиальные случаи обращения производных в 0 и  $\infty$ , если это возможно.

На участке границы  $\theta = 0$ ,  $0 < w < \infty$  направление внутренней нормали совпадает с направлением возрастания  $\theta$ , и из (3.7) следует

$$0 \leq \partial\psi_{a'} / \partial\theta \leq \partial\psi_a / \partial\theta \leq \partial\psi_0 / \partial\theta \leq Q / \theta_0 \quad (3.8)$$

(здесь использованы также неравенства (3.3) и (3.5)).

Аналогичным образом при  $\theta = \theta_0$ , где направление внутренней нормали противоположно направлению возрастания  $\theta$ ,

$$Q / \theta_0 \leq \partial\psi_0 / \partial\theta \leq \partial\psi_a / \partial\theta \leq \partial\psi_{a'} / \partial\theta \leq \partial\psi_{\infty} / \partial\theta \leq Q / (\theta_0 - \theta_1) \quad (3.9)$$

Далее, на берегах разреза ( $\theta = \theta_1$ ), имеем: слева ( $\theta = \theta_1 - 0$ ,  $0 \leq w \leq a$ )

$$\partial\psi_a / \partial\theta \leq \partial\psi_{a'} / \partial\theta \leq 0 \quad (3.10)$$

и справа,  $\theta = \theta_1 + 0$ ,  $0 \leq w \leq a$

$$Q / (\theta_0 - \theta_1) = \partial\psi_{\infty} / \partial\theta \leq \partial\psi_{a'} / \partial\theta \leq \partial\psi_a / \partial\theta \quad (3.11)$$

Обследуем теперь поведение решения при малых значениях  $w$  в интервале  $0 \leq \theta \leq \theta_1$ . На отрезке  $0 \leq w < a$  решение уравнения (1.7), обращающееся в нуль при  $w = 0$  и  $\theta = 0$ ,  $\theta = \theta_1$ , имеет вид

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} P_m(w) \sin \frac{m\pi\theta}{\theta_1} \quad (3.12)$$

Здесь  $P_m(w)$  — обращающееся при  $w = 0$  в нуль решение гипергеометрического уравнения

$$w(w + \lambda) y'' + (w - \lambda) y' - (\pi m / \theta_1)^2 y = 0 \quad (3.13)$$

Эти решения имеют вид (см., например, [12])

$$P_m(w) = B_m w^2 F(-\alpha_m + 2, \alpha_m + 2, 3, -w/\lambda) \equiv B_m w^2 F_{\alpha_m} \quad (3.14)$$

$\alpha_m = \pi m / \theta_1$ ,  $F$  — символ гипергеометрической функции, причем  $F_{\alpha_m}(w) = 1$  при  $w = 0$ .

В результате имеем

$$\psi = w^2 \sum_{m=1}^{\infty} B_m F_{\alpha_m}(w) \sin \frac{\pi m \theta}{\theta_1} \quad (0 \leq \theta \leq \theta_1, 0 \leq w < a) \quad (3.15)$$

Таким образом, при  $0 \leq \theta < \theta_1$  имеем  $\psi(\theta, w^2) = O(w^2)$  ( $w \rightarrow 0$ ). В результате из (3.7) получаем, полагая показатель  $\alpha = 2$ ,

$$0 \leq \partial \psi_{\alpha'} / \partial (w^2) \leq \partial \psi_{\alpha} / \partial (w^2) \quad (0 \leq \theta \leq \theta_1, w = 0) \quad (3.16)$$

Предыдущие рассуждения не применимы при  $a = 0$ . Однако непосредственно переходя в (3.16) к пределу при  $a \rightarrow 0$ , получим

$$0 \leq \partial \psi_{\alpha'} / \partial (w^2) \leq \partial \psi_{\alpha} / \partial (w^2) \leq \partial \psi_0 / \partial (w^2) \quad (0 \leq \theta \leq \theta_1, w = 0) \quad (3.17)$$

Можно убедиться, что эта оценка не является тривиальной, так как  $\partial \psi_0 / \partial (w^2)$  обращается в бесконечность только в точке  $\theta = \theta_1$ .

3°. Рассмотрим теперь те следствия, которые вытекают из полученных оценок применительно к положению границы застойной зоны, т. е. той линии тока, на которой скорость обращается в нуль. В соотношениях (1.9) при этом  $d\psi$  и  $w$  обращаются в нуль, так что непосредственно они неприменимы. Если, однако, рассматривать линии  $w = \text{const}$  при малых  $w$ , то в силу полученной выше оценки приращение  $\psi$  вдоль таких линий порядка  $w^2$  и

$$\int \frac{\cos \theta}{w} d\psi$$

обращается в нуль при  $w \rightarrow 0$ . В результате соотношения (1.9) для линии тока  $\psi = 0$  примут вид

$$x = x_0 - \int \frac{\cos \theta dH}{w + \lambda}, \quad y = y_0 - \int \frac{\sin \theta dH}{w + \lambda} \quad (3.18)$$

Используя уравнения (1.8), соотношения (3.18) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \int \frac{\cos \theta}{w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} dw - \cos \theta \frac{w + \lambda}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} d\theta \\ y &= y_0 - \int \frac{\sin \theta}{w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} dw - \sin \theta \frac{w + \lambda}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} d\theta \end{aligned} \quad (3.19)$$

Пусть источник помещается в точке  $A$  с координатами  $x_A, 0$ . Тогда ближайшая к нему точка застойной зоны имеет координаты

$$x_B = x_A + \int_0^{\infty} \frac{\partial \psi(w, 0)}{\partial \theta} \frac{dw}{w^2}, \quad y_B = 0 \quad (3.20)$$

(так как в плоскости  $w\theta$  отрезку  $AB$  соответствует полуось  $0 \leq w < \infty$ ,  $\theta = 0$ , проходима в отрицательном направлении). Учитывая неравенства (3.8), получим

$$0 \leq \int_0^{\infty} \frac{\partial \psi_{\alpha'}}{\partial \theta} \frac{dw}{w^2} \leq \int_0^{\infty} \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial \theta} \frac{dw}{w^2} \leq \int_0^{\infty} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \frac{dw}{w^2} \quad (\theta = 0) \quad (3.21)$$

так что

$$x_A \leq x_{Ba'} \leq x_{Ba} \leq x_{B_0} \quad (3.22)$$

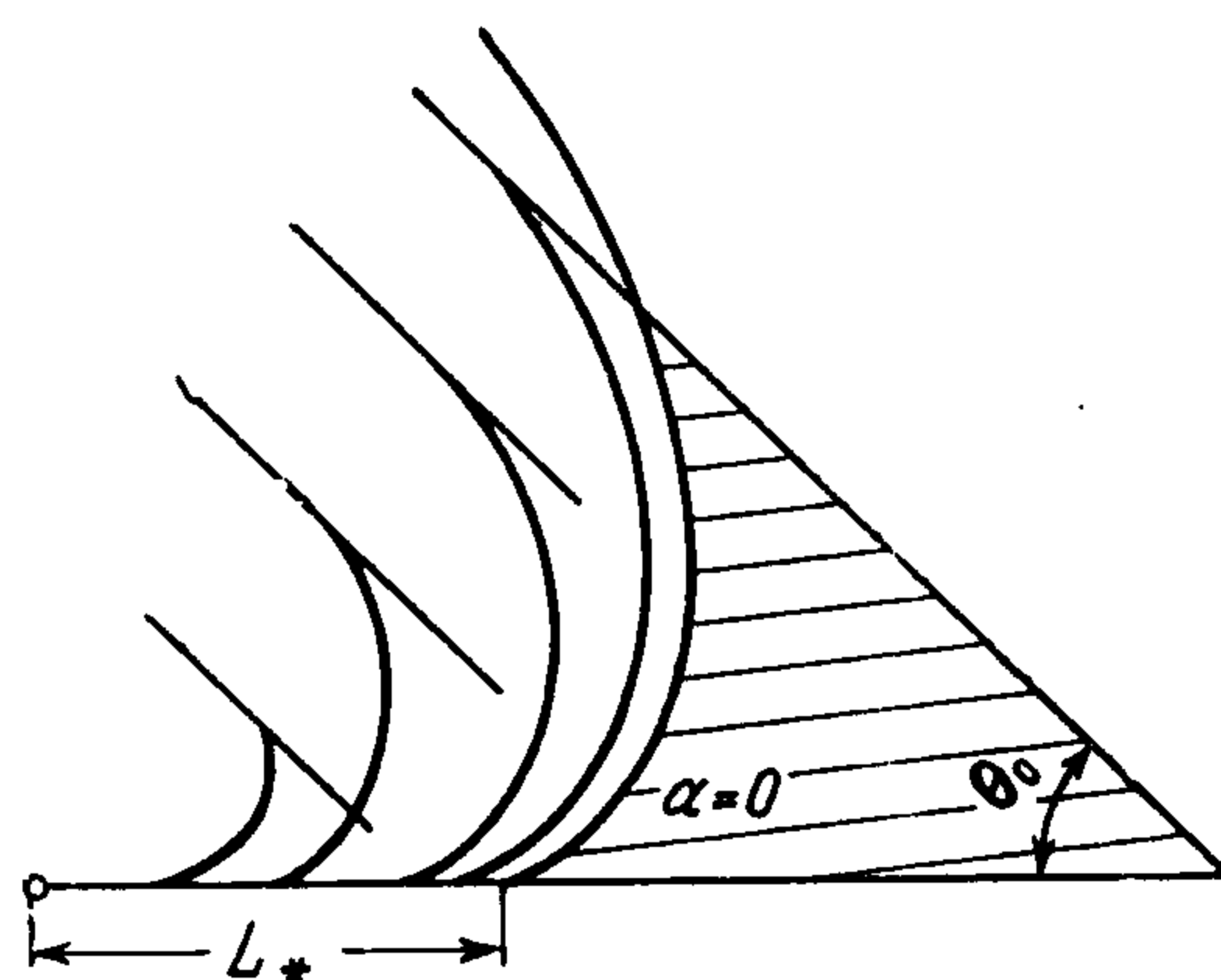
Таким образом, расстояние от источника до застойной зоны монотонно увеличивается с уменьшением параметра  $a$ ; как будет показано ниже,  $x_{B_0} < \infty$ , так что это расстояние остается конечным при  $a \rightarrow 0$ .

Рассмотрим теперь собственно границу застойной зоны, отвечающую отрезку  $w = 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_1$ .

Имеем здесь (3.23)

$$x(\theta) - x(0) = \lambda \int_0^\theta \cos \varphi \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} \frac{\partial \psi(\varphi, w)}{\partial w} d\varphi$$

$$y(\theta) - y(0) = \lambda \int_0^\theta \sin \varphi \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} \frac{\partial \psi(\varphi, w)}{\partial w} d\varphi$$



Фиг. 6

В силу неравенств (3.17) при увеличении  $\theta$  координаты  $y$  и  $x$  увеличиваются монотонно до  $\theta = \pi/2$ , затем  $y$  продолжает увеличиваться, а  $x$  убывает. Из второго соотношения (3.23) и неравенств (3.17) следует при  $\theta_1 \leq \pi$ :

$$0 \leq y_{a'}(\theta) \leq y_a(\theta) \leq y_0(\theta) \quad (3.24)$$

Последние неравенства вместе с (3.22) доказывают, что соответственные ветви границы застойных зон, отвечающих различным значениям  $a$  не пересекаются между собой.

Действительно, легко убедиться, что неравенства (3.21) и (3.22) могут быть заменены на строгие неравенства, так что при  $a < a'$  точка  $B_a$  лежит правее точки  $B_{a'}$ . Если при этом границы застойных зон пересекаются, то в точке пересечения

$$x_a = x_{a'}, \quad y_a = y_{a'}, \quad \theta_a \geq \theta_{a'} \quad (3.25)$$

Легко, однако, видеть, что эти условия противоречивы. Действительно из неравенств (3.24) и монотонного возрастания  $y$  с ростом  $\theta$  следует, что последнее неравенство (3.25) должно быть заменено на равенство, причем в силу (3.23) необходимо также, чтобы  $(1/w) \partial \psi_a / \partial w \equiv (1/w) \partial \psi_{a'} / \partial w$  при  $w = 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_a$ . Но тогда из первого равенства (3.23) следует  $x_a - x_{Ba} = x_{a'} - x_{Ba'}$ , что, в силу сказанного о неравенствах (3.22), противоречит первому требованию (3.25). Из полученных неравенств следует, что расположение застойных зон относительно источника изменяется с уменьшением параметра  $a$  в соответствии с фиг. 6, где показана картина течения в элементе в виде клина с раствором  $2\theta_0$ . (Очевидно, на физической плоскости роль непроницаемых стенок клина играют плоскости симметрии картины течения.) Характерный размер  $L$ , представляющий собой расстояние от источника до непроницаемой стенки монотонно возрастает с уменьшением  $a$  от нуля при  $a = \infty$  до бесконечности при  $a = 0$  (последнее будет доказано ниже). В то же время характерный размер  $AB$  изменяется от нуля до некоторого предельного значения  $L_*$ , достигаемого при  $a = 0$ .

Из фиг. 6 следует весьма простой, хотя и грубый способ оценки снизу размеров застойной зоны: если заданы интенсивность источника  $Q$  и характерный размер  $L_*$ , то застойная зона будет заведомо больше, чем попадающая внутрь клина часть застойной зоны, отвечающей  $a = 0$  (на фиг. 6 заштрихована). Эта оценка будет тем лучше,

чем больше величина  $L$  (при прочих равных условиях). Напротив, при  $L < L_0 \sin \theta_0$  она, очевидно, становится тривиальной. Само предельное решение с  $a = 0$  описывает структуру потока вблизи «острия» застойной зоны.

4°. Все полученные выше оценки относились к первой задаче (п. 1°); однако тем же элементарным способом можно получить оценки для решений второй задачи (условия (3.2)). Сформулируем их кратко, чтобы избежать повторений. В первую очередь, очевидно (обозначения прежние)

$$0 = \psi_\infty \leq \psi_{a'} \leq \psi_a \leq \psi_0 \quad (a' > a) \quad (3.26)$$

причем решение  $\psi_0$  удовлетворяет в данном случае неравенствам

$$\begin{aligned} 0 \leq \psi_0(w, \theta) &\leq Q\theta / \theta_1 & (0 \leq \theta \leq \theta_1) \\ 0 \leq \psi_0(w, \theta) &\leq Q(\theta_0 - \theta) / (\theta_0 - \theta_1) & (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0) \quad (0 \leq w < \infty) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Имеем, далее, на границе  $\theta = 0, 0 < w < \infty$ :

$$0 \leq \partial\psi_{a'} / \partial\theta \leq \partial\psi_a / \partial\theta \leq \partial\psi_0 / \partial\theta \leq Q / \theta_1 \quad (3.28)$$

$$-Q / (\theta_0 - \theta_1) \leq \partial\psi_0 / \partial\theta \leq \partial\psi_a / \partial\theta \leq \partial\psi_{a'} / \partial\theta \leq 0 \quad \text{при } \theta = \theta_0 \quad (3.29)$$

На берегах разреза  $\theta = \theta_1, w > a$ :

$$\begin{aligned} Q / \theta_1 &\leq \partial\psi_0 / \partial\theta \leq \partial\psi_a / \partial\theta \leq \partial\psi_{a'} / \partial\theta & (\text{слева, } \theta = \theta_1 - 0) \\ -Q / (\theta_0 - \theta_1) &\geq \partial\psi_0 / \partial\theta \geq \partial\psi_a / \partial\theta \geq \partial\psi_{a'} / \partial\theta & (\text{справа, } \theta = \theta_1 + 0) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Наконец, при малых  $w$  ( $w < a$ ) имеет место разложение, аналогичное (3.13) (где  $\theta_1$  следует заменить на  $\theta_0$ ), и прежним путем можно получить неравенство

$$0 \leq \partial\psi_{a'} / \partial(w^2) \leq \partial\psi_a / \partial(w^2) \leq \partial\psi_0 / \partial(w^2) \quad (0 \leq \theta \leq \theta_0) \quad (3.31)$$

в котором  $\partial\psi_0 / \partial(w^2)$  обращается в бесконечность при  $\theta = \theta_1$ .

5°. Так же, как и в первой задаче, полученные оценки немедленно приводят к соответствующим оценкам для положения границ застойной зоны. Прежде всего заметим, что положение источника относительно стока определяется выражениями

$$x_D - x_A = - \int \frac{\cos \theta_1}{w^2} \frac{\partial\psi(\theta_1, w)}{\partial\theta} dw, \quad y_D - y_A = - \int \frac{\sin \theta_1}{w^2} \frac{\partial\psi(\theta_1, w)}{\partial\theta} dw \quad (3.32)$$

где интегралы берутся по берегам разреза в направлении  $AED$ . Из (3.32) имеем

$$r_{AD} = \left| \int \frac{1}{w^2} \frac{\partial\psi(\theta_1, w)}{\partial\theta} dw \right| \quad (3.33)$$

что с учетом (3.31) дает

$$r_{ADa} \geq \int_a^\infty \left[ \frac{\partial\psi_0(\theta_1 - 0, w)}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi_0(\theta_1 + 0, w)}{\partial\theta} \right] \frac{dw}{w^2} \geq \left[ \frac{Q}{\theta_1} + \frac{Q}{\theta_0 - \theta_1} \right] \frac{1}{a} \quad (3.34)$$

Для расстояния между источником и острием застойной зоны имеем

$$0 \leq x_{Ba'} - x_A \leq x_{Ba} - x_A = \int_0^\infty \frac{\partial\psi_a(0, w)}{\partial\theta} \frac{dw}{w^2} \leq x_{B_0} - x_A \quad (3.35)$$

(и в этом случае путем несложных дополнительных рассуждений можно заменить неравенства на строгие).

Также полностью проходит и рассуждение, доказывающее, что границы застойных зон, отвечающих различным  $a$ , не пересекаются. Единственное затруднение за-

ключается в том, что здесь уже недостаточно ограничиться случаем  $\theta_1 \leq \pi$ . Если, однако, полагать  $\theta_0 \leq 2\pi$  и использовать рассуждение п. 4° для  $0 \leq \theta \leq \pi$ , а для участка  $\pi \leq \theta \leq \theta_0$  повторить то же рассуждение, отправляясь от стока  $F$ , то легко получить аналогичное (3.35) неравенство

$$0 \leq x_F - x_{Ea'} \leq x_F - x_{Ea} \leq x_F - x_{E_0} \quad (3.36)$$

и следующее важное утверждение.

При фиксированных значениях  $Q$  и  $\lambda$  область течения монотонно расширяется с уменьшением параметра  $a$ . При этом расстояние  $AB$  между источником и острием застойной зоны при  $a \rightarrow 0$  стремится к конечному пределу. Решение, отвечающее  $a = 0$ ; может быть использовано для описания течения вблизи точки  $B$  и для построения грубых оценок минимальных размеров застойной зоны, наподобие того, как было сказано в п. 9°.

§ 4. Предельные решения. 1°. Найдем теперь предельные решения первой и второй задач, отвечающие  $a = 0$ . Их специфическая роль определяется тем, что они могут быть выписаны в достаточно простой форме при помощи элементарных средств. Рассмотрим вначале первую задачу. Полагая  $a = 0$ , приходим к задаче: найти функцию  $\psi(w, \theta)$ , удовлетворяющую уравнению (1.7) в полуполосе  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ ,  $w \geq 0$  и условиям

$$\psi(w, 0) = 0, \quad \psi(0, \theta) = 0 \quad (0 < \theta < \theta_1)$$

$$\psi(0, \theta) = Q \frac{\theta - \theta_1}{\theta_0 - \theta_1} \quad (\theta_1 < \theta < \theta_0), \quad \psi(w, \theta_0) = Q \quad (4.1)$$

Полагая

$$\psi(w, \theta) = Q \theta / \theta_0 + \Psi_0(w, \theta) \quad (4.2)$$

находим, что функция  $\Psi_0$  при  $\theta = 0$  и  $\theta = \theta_0$  обращается в нуль при всех  $w$ , а при  $w = 0$ :

$$\Psi_0(0, \theta) = -Q \theta / \theta_0 \quad (0 < \theta < \theta_1)$$

$$\Psi_0(0, \theta) = -\frac{Q\theta_1 \theta_0 - \theta}{\theta_0 \theta_0 - \theta_1} \quad (\theta_1 < \theta < \theta_0) \quad (4.3)$$

Разлагая решение в ряд Фурье, получим

$$\Psi_0(w, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} P_{0m}(w) \sin \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \quad (4.4)$$

где  $P_{0m}(w)$  — решения уравнения

$$w(w + \lambda) Y'' + (w - \lambda) Y' - \pi^2 m^2 / \theta_0^2 Y = 0 \quad (4.5)$$

обращающееся в нуль при  $w \rightarrow \infty$  и принимающее при  $w = 0$  значение

$$P_{0m}(0) = -\frac{2Q\theta_0}{(\theta_0 - \theta_1) \pi^2 m^2} \sin \frac{\pi m \theta_1}{\theta_0} \quad (4.6)$$

Решение уравнения (4.5), стремящееся при  $w \rightarrow \infty$  к нулю, имеет вид

$$Y = \left( \frac{\lambda}{w + \lambda} \right)^s F(s - 1, s, 2s + 1, \lambda / (w + \lambda)), \quad s = \pi m / \theta \quad (4.7)$$

где  $F$  — символ гипергеометрической функции. Используя известное представление гипергеометрической функции в виде интеграла (см., например, [12])

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 \frac{t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1}}{(1-tz)^\alpha} dt \quad (4.8)$$

с учетом условия (4.6) имеем

$$P_{om}(w) = - \frac{2Q}{\theta_0(\theta_0 - \theta_1)} \sin \frac{\pi m \theta_1}{\theta_0} \frac{\lambda}{w + \lambda} \frac{s+1}{s} \int_0^1 \frac{t^{s-1} (1-t)^s dt}{(w/\lambda + 1 - t)^{s-1}} \quad (4.9)$$

Подставляя (4.9) в (4.4), меняя порядок суммирования и интегрирования, и суммируя получающийся под интегралом ряд, имеем

$$\begin{aligned} \Psi_0(w, \theta) = & - \frac{Q}{\theta_0(\theta_0 - \theta_1)} \frac{\lambda}{w + \lambda} \int_0^1 \left( \frac{w + \lambda}{\lambda t} - 1 \right) \times \\ & \times \operatorname{Re} \left\{ e^{i\pi(\theta - \theta_1)/\theta_0} \left[ \frac{v^{\pi/\theta_0}}{1 - v^{\pi/\theta_0} e^{i\pi(\theta - \theta_0)/\theta_0}} + \int_0^v \frac{\xi^{(\pi - \theta_0)/\theta_0} d\xi}{1 - \xi^{\pi/\theta_0} e^{i\pi(\theta - \theta_1)/\theta_0}} \right] - \right. \\ & \left. - e^{i\pi(\theta + \theta_1)/\theta_0} \left[ \frac{v^{\pi/\theta_0}}{1 - v^{\pi/\theta_0} e^{i\pi(\theta + \theta_1)/\theta_0}} + \int_0^v \frac{\xi^{(\pi - \theta_0)/\theta_0} d\xi}{1 - \xi^{\pi/\theta_0} e^{i\pi(\theta + \theta_1)/\theta_0}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$v = t(1-t) / (w\lambda^{-1} + 1 - t) \quad (4.11)$$

2°. Обследуем подробнее решение, отвечающее  $\theta_0 = 2\theta_1 = \pi$  (рассмотренная первая задача о двух источниках). При этом после несложных преобразований (4.10) примет вид

$$\begin{aligned} \Psi_0(w, \theta) = & - \frac{2Q}{\pi^2} \frac{\lambda}{w + \lambda} \int_0^1 \operatorname{Im} \left\{ \frac{2e^{i\theta} v}{1 + v^2 e^{2i\theta}} + \right. \\ & \left. + e^{i\theta} \int_0^v \frac{2d\xi}{1 + \xi^2 e^{2i\theta}} \right\} \left( \frac{w + \lambda}{\lambda t} - 1 \right) dt = - \frac{4Q}{\pi^2} \frac{\lambda}{w + \lambda} \int_0^1 \left( \frac{w + \lambda}{\lambda t} - 1 \right) \operatorname{Im} \int_0^{ve^{i\theta}} \frac{2d\xi}{(1 + \xi^2)^2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Внутренний интеграл в (4.12) может быть выражен через элементарные функции. Определим теперь положение застойной зоны, отвечающей решению (4.12), относительно источника. Из (3.20) и (4.2) имеем, после подстановки выражения (4.12)

$$x_B - x_A = \int_0^\infty \left[ \frac{Q}{\pi} - \frac{8Q}{\pi^2} \frac{\lambda}{w + \lambda} \int_0^1 \frac{1-t}{(1+v^2)^2} dt \right] \frac{dw}{w^2} \quad (4.13)$$

Легко проверить, что подынтегральное выражение в (4.13) имеет при  $w = 0$  нуль второго порядка, так что интеграл сходится. Интегрируя по частям, переходя затем во внутреннем интеграле к интегрированию по переменной  $v$  и меняя порядок интегрирования, можно свести дело к вычислению одного интеграла и получить

$$x_B - x_A = 0.514 Q / \lambda = 1.62 Q / \pi \lambda \quad (4.14)$$

Вычислим теперь, чтобы проследить ход границы застойной зоны, величину  $\partial \Psi_0 / \partial w$ .

Дифференцируя (4.12), имеем

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial w} = \frac{8Q}{\pi^2 \lambda} \int_0^1 \frac{(1-t)^2 [t - \omega - \omega^2 / (1-t)] \sin \theta (1 - 2v^2) - v^4 \sin 3\theta}{(\omega + 1)^2 (\omega + 1 - t)^2 [1 + 2v^2 \cos 2\theta + v^4]^2} dt; \quad \omega = \frac{w}{\lambda} \quad (4.15)$$

Если положить здесь  $\omega = 0$ , то получим интеграл, равный нулю, так что  $\partial \Psi_0(0, \theta) / \partial w = 0$ .

Координаты границы застойной зоны, как видно из (3.23), определяются, соответственно, действительной и мнимой частями интеграла

$$\lambda \int_0^\theta e^{i\varphi} \left( \frac{1}{w} \frac{\partial \Psi_0}{\partial w} \right)_{w=0} d\varphi = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\lambda}{w} \int_0^\theta e^{i\varphi} \frac{\partial \Psi_0(w, \varphi)}{\partial w} d\varphi \equiv \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\lambda}{w} I_\theta \quad (4.16)$$

Удобно вычислить сначала интеграл  $I_\theta$ . Переходя к интегрированию по  $v$  вместо  $t$ , можно показать, что отношение  $I_\theta / w$  остается конечным при  $w \rightarrow 0$  и  $\theta \neq \pi/2$ , причем

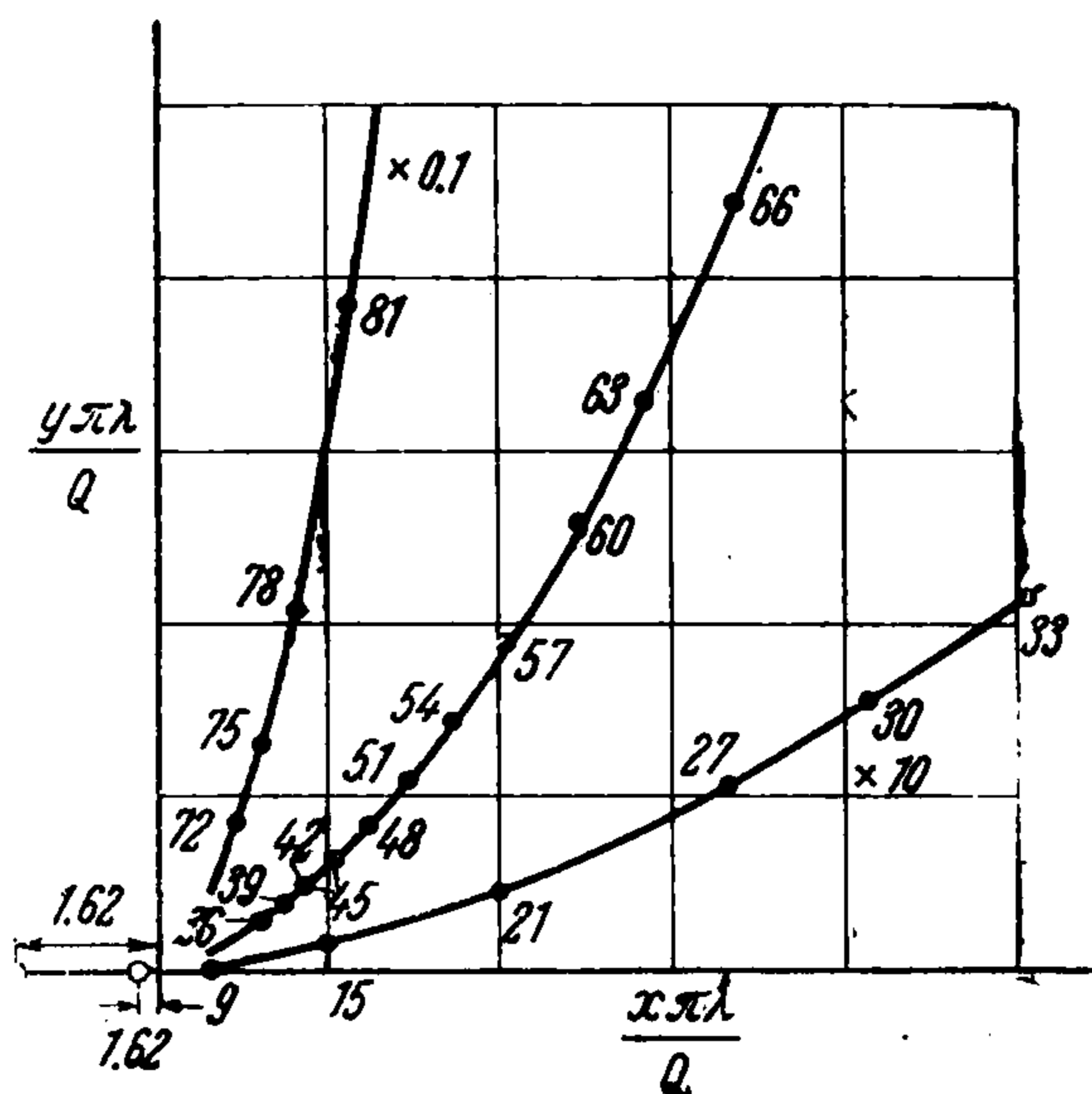
$$\lim_{w \rightarrow 0} I_\theta / w = -\frac{4Q}{\pi^2 \lambda^2} \int_0^1 (1+t)^2 \left[ \frac{1}{1+2t^2 \cos 2\theta + t^4} - \frac{1}{(1+t^2)^2} + (1+i \operatorname{tg} \theta) \frac{2t^2 \sin^2 2\theta}{(1+2t^2 \cos 2\theta + t^4)^2} \right] dt \quad (4.17)$$

Вычисляя интегралы в (4.17) и учитывая (3.23), получим

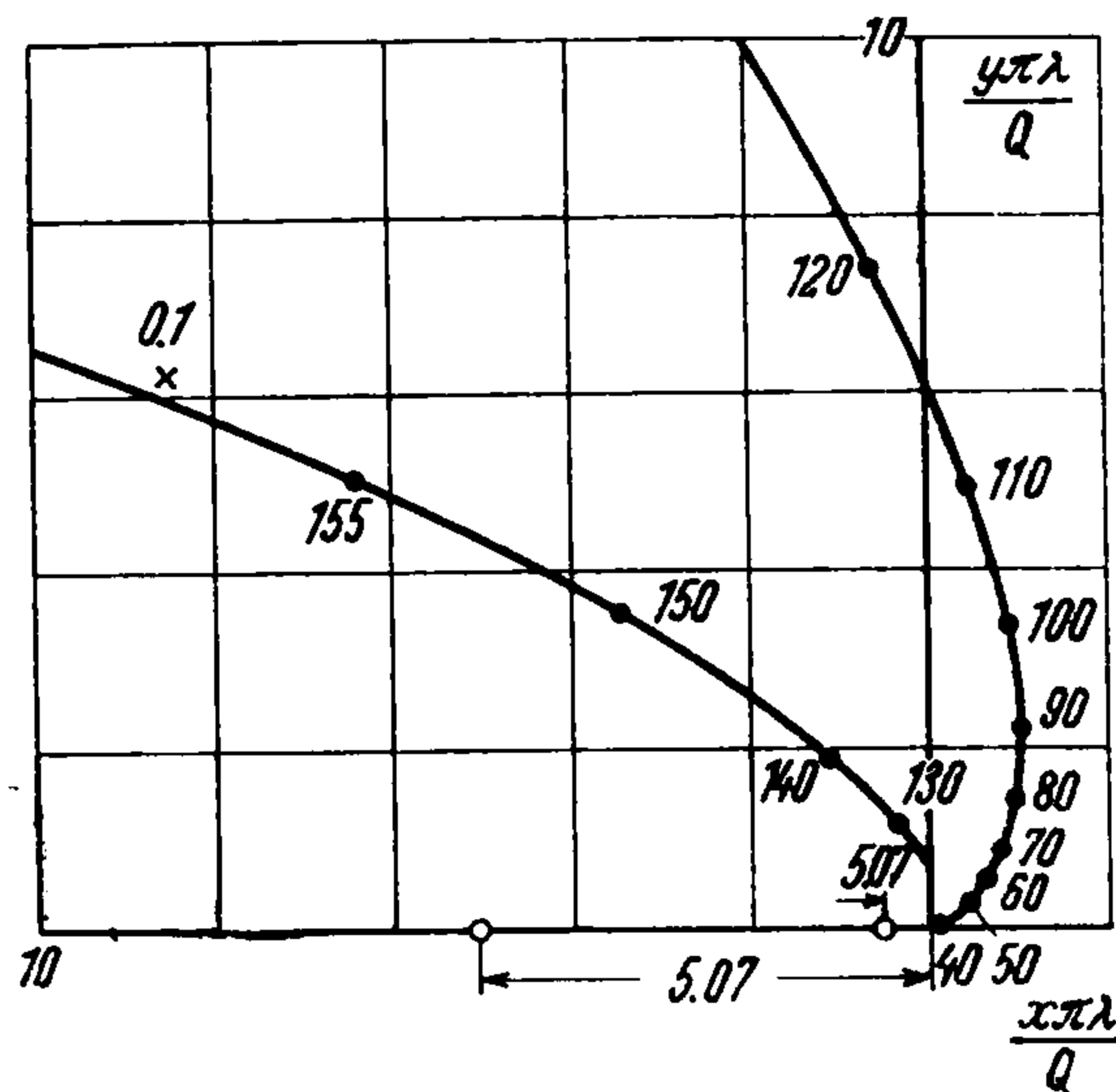
$$x(\theta) = x_B + \frac{4Q}{\pi^2 \lambda} \left[ \frac{\pi}{4} \frac{(1 + \sin \theta)^2}{\cos \theta} - \frac{\pi}{4} - \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \operatorname{tg} \theta \right]$$

$$y(\theta) = \frac{4Q}{\pi^2 \lambda} \operatorname{tg} \theta \left[ \frac{\pi}{4} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{2} - \frac{\theta \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \right] \quad (4.18)$$

Полученные выражения являются искомыми. Как следует из них, предельная при  $a \rightarrow 0$  застойная зона является неограниченной, и ее граница имеет параболические ветви, уходящие в бесконечность. На физической плоскости это отвечает обтека-



Фиг. 7



Фиг. 8

нию бесконечного криволинейного клина. Вид границы показан на фиг. 7; возле точек указаны значения  $\theta$  в градусах. Найденное решение применительно к поставленным выше задачам имеет двойкий смысл. Прежде всего оно описывает картину течения вблизи острия застойной зоны; во-вторых, это же решение может послужить в качестве нулевого приближения при отыскании решений, отвечающих малым  $a$  методом малого параметра.

3°. Перейдем теперь к построению предельного решения второй задачи. При  $a = 0$  полоса  $0 < \theta < \theta_0$  «разрезается» на две части, и решения для обеих получаются одинаковым способом. Рассмотрим поэтому полубесконечную полосу  $0 < w < \infty$ ,  $0 < \theta < \theta_1$ . Искомое решение, обращаясь в нуль при  $\theta = 0$  и  $w = 0$  и в  $Q$  при

$\theta = \theta_1$  представляется в виде

$$\psi(w, \theta) = Q \theta / \theta_1 + \Psi^0(w, \theta) \quad (4.19)$$

где  $\Psi^0(w, \theta)$  обращается в нуль на боковых сторонах полосы и

$$\Psi^0(0, \theta) = -Q \theta / \theta_1 \quad (4.20)$$

Решение разлагается в ряд Фурье

$$\Psi^0(w, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m^0(w) \sin \frac{\pi m \theta}{\theta_1} \quad (4.21)$$

где  $P_m^0(w)$  определяются аналогично тому как определялись  $P_{m0}(w)$  для первой задачи (соотношения (4.4) — (4.9)) и оказываются равными

$$P_m^0(w) = (-1)^m \frac{2Q}{\theta_1} \frac{\lambda}{w + \lambda} (p + 1) \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^p (w/\lambda + 1 - t)^{1-p} dt \quad (4.22)$$

$(p = \pi m / \theta_1)$

Подставляя (4.22) в (4.21), переставляя суммирование и интегрирование и суммируя получающийся под интегралом ряд, получим

$$\Psi^0(w, \theta) = -\frac{2Q}{\theta_1} \frac{\lambda}{w + \lambda} \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{w/\lambda + 1 - t}{t} \frac{v^{\pi/\theta_1} e^{i\theta(\theta_1 + \pi)/\theta_1^2} + v^{2\pi/\theta_1} e^{2i\pi\theta/\theta_1}}{(1 + v^{\pi/\theta_1} e^{i\pi\theta/\theta_1})} dt \quad (4.23)$$

где  $v$  определено равенством (4.11).

Будем рассматривать далее частный случай  $\theta_1 = \pi$ , отвечающий паре источников — сток равной интенсивности. При этом имеем с учетом выражения (4.23)

$$\psi = \frac{Q\theta}{\pi} + \Psi^0(w, \theta) = \frac{Q\theta}{\pi} - \frac{2Q}{\pi} \frac{\lambda}{w + \lambda} \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{(1-t)(2 + ve^{i\theta}) e^{i\theta} dt}{(1 + ve^{i\theta})^2} \quad (4.24)$$

Для производной  $\partial\psi / \partial\theta$  имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{Q}{\pi} - \frac{4Q}{\pi} \operatorname{Re} \frac{\lambda e^{i\theta}}{w + \lambda} \int_0^1 \frac{(1-t) dt}{(1 + ve^{i\theta})^3} \quad (4.25)$$

В результате расстояние от источника до острия застойной зоны определится выражением

$$x_B - x_A = \frac{4Q}{\pi\lambda} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega(\omega + 1)^2} \int_0^1 \frac{(1-t)[1 - 2v - t - vt - \omega(2v - 1)]}{(1 + v)^4 (\omega + 1 - t)} dt \quad (4.26)$$

Переходя здесь к интегрированию по переменной  $v$  и меняя порядок интегрирования, получим

$$x_B - x_A = 1.61 Q / \lambda = 5.07 Q / \pi\lambda \quad (4.27)$$

Для определения формы границы застойной зоны продифференцируем выражение (4.24) дважды по  $w$ , а затем перейдем к пределу при  $w \rightarrow 0$ . В результате получим

$$\chi(\theta) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} \frac{\partial\Psi^0}{\partial w} = \frac{24Q}{\pi\lambda^2} \int_0^1 \frac{t(1+t)[t + \cos\theta(1+t^2)] \sin\theta dt}{(1 + 2t \cos\theta + t^2)^4} \quad (4.28)$$

Вычислим теперь интеграл

$$I_{\varphi} = \int_0^{\varphi} e^{i\theta} \chi(\theta) d\theta = \frac{Q}{2\pi\lambda^2} \left\{ \frac{3 \cos \varphi (1 - \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi} - \frac{3}{2} + \right. \\ \left. + \frac{(1 - \cos \varphi)^2}{\sin^2 \varphi} \left[ 2 \cos \varphi + 2 + \frac{\varphi (1 + 2 \cos \varphi)}{\sin \varphi} \right] + \right. \\ \left. + i \left[ \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \left( 1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right) + \frac{2(1 - \cos \varphi)^2}{\sin \varphi} \left( 1 + \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right) \right] \right\} \quad (4.29)$$

Из (4.29), в частности, следует:

$$I_{\varphi} = \frac{Q}{2\pi\lambda^2} \left( \varphi^2 + i \frac{11}{12} \varphi^3 \right) (1 + O(\varphi^2)) \quad \text{при } \varphi \rightarrow 0 \\ I_{\varphi} = \frac{2Q}{\lambda^2} \left( -\frac{1}{\sin^3 \varphi} + i \frac{3}{2 \sin^2 \varphi} \right) (1 + O(\sin \varphi)) \quad \text{при } \varphi \rightarrow \pi \quad (4.30)$$

Отделяя вещественную и мнимую части  $I_{\varphi}$ , получим координаты точек застойной зоны

$$x(\varphi) = x_B + \lambda \operatorname{Re} I_{\varphi}, \quad y(\varphi) = \lambda \operatorname{Im} I_{\varphi} \quad (4.31)$$

Отвечающий (4.29) вид границы застойной зоны показан на фиг. 8 (цифры обозначают значения  $\varphi$  в градусах).

Полученное решение является асимптотическим подобно приведенному выше решению первой задачи.

Автор благодарен Г. И. Баренблатту, М. Г. Бернардинеру и Р. Л. Салганику за ряд ценных замечаний по содержанию работы и Н. С. Турбановой и Т. Н. Ивановой за проведение вычислений.

Поступила 24 V 1967

НИИ Механики Московского университета

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Роза С. А. Осадки гидротехнических сооружений на глинах с малой влажностью. Гидротехническое строительство, 1950, № 9.
2. Флорин В. А. Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористости с учетом влияния связанной воды. Изв. АН СССР, ОТН, 1951, № 11.
3. Мирзаянзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязко-пластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче. Баку, Азнефтеиздат, 1959.
4. Султанов Б. И. О фильтрации вязко-пластических жидкостей в пористой среде. Изв. АН АзССР, сер. физ.-матем. и техн. н., 1960, № 5.
5. Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Гехтман М. М., Глумов И. Ф. О некоторых особенностях фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
6. Чаплыгин С. А. О газовых струях. М., Унив. тип. 1902; так же М., Гостехтеоретиздат, 1949.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 2, Изд. 6-е. М., Физматгиз, 1963.
8. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околосзвуковой газовой динамики. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
9. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
10. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехтеоретиздат, 1952.
11. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях в частных производных. М., Физматгиз, 1962.
12. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.—Л., Физматгиз, 1963.