

## К ТЕОРИИ РЕЛЕЕВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Р. Н. Рудаков

(Пермь)

Как известно, равновесие подогреваемой снизу жидкости в плоском вертикальном слое или вертикальном канале становится неустойчивым при достижении градиентом температуры критического значения. Наиболее «опасными» — соответствующими наименьшему значению числа Релея — являются возмущения со скоростями, параллельными образующим канала [1]. Ячейстые возмущения, периодические вдоль оси канала, соответствуют более высоким числам Релея [2,3].

В плоском горизонтальном слое и горизонтальных каналах дело обстоит иначе. В горизонтальном слое, подогреваемом снизу, ответственными за кризис равновесия будут периодические в плоскости слоя возмущения определенной длины волны [4]. В горизонтальном круговом цилиндре, как показывают эксперименты [5] и расчет [6], появление неустойчивости также связано с ячейстыми возмущениями.

Ниже исследуется смена формы неустойчивости при изменении угла наклона канала к вертикали. Рассмотрена конвективная устойчивость плоского слоя, произвольно ориентированного по отношению к направлению силы тяжести. Оказывается, что смена неустойчивости — переход от плоскопараллельных возмущений к периодическим вдоль слоя (ячейстым) — происходит при некотором критическом значении  $\alpha_0$  угла наклона плоскости слоя к вертикали. При  $\alpha > \alpha_0$  критические возмущения обладают конечной длиной волны.

При рассмотрении длинноволновых возмущений применен метод малого параметра, основанный на разложении возмущений по степеням безразмерного волнового числа  $k$ . Таким путем удается получить спектр возмущений и критических чисел Релея при малых  $k$ , а также определить критический угол  $\alpha_0$ . Для слоя, ограниченного идеально теплопроводными плоскостями,  $\alpha_0 = 21^\circ$ .

Для исследования нижних уровней неустойчивости при произвольных волновых числах применен метод Галеркина. Краевая задача для амплитуд возмущений сводится к системе однородных линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложений. Диагонализация соответствующей матрицы проведена численно на ЭВЦМ. Найдены собственные числа — критические значения числа Релея — в зависимости от угла наклона  $\alpha$  и волнового числа  $k$ .

**§ 1. Уравнения возмущений.** Плоский бесконечный слой толщины  $2h$  ориентирован под углом  $\alpha$  к вертикали (фиг. 1) и подогревается снизу таким образом, что возможно равновесие. В равновесии жидкость неподвижна, а температура  $T_0$  и давление  $p_0$  (отсчитываемое от гидростатического при постоянной плотности  $\rho_0$ ) находятся из уравнений

$$\nabla T_0 = -A\gamma, \quad \nabla p_0 = \rho_0 g \beta T_0 \gamma \quad (1.1)$$

Здесь  $\gamma$  — единичный вектор, направленный по вертикали вверх,  $A$  — постоянный равновесный градиент температуры ( $A > 0$  соответствует подогреву снизу),  $g$  и  $\beta$  — ускорение силы тяжести и коэффициент теплового расширения.

Из обычных уравнений конвекции получаются уравнения «нейтральных» возмущений

$$-\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{v} + g\beta T \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \mathbf{v} \nabla T_0 = \chi \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $\nu$  и  $\chi$  — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности. Эти уравнения удобно переписать в безразмерном виде, выбрав в качестве единиц расстояния, скорости, температуры и давления соответственно  $h$ ,  $\chi/h$ ,  $Ah$  и  $\rho_0 \nu \chi / h^2$ . Тогда вместо (1.2) получим уравнения для безразмерных возмущений скорости, температуры и давления, обозначаемых по-прежнему  $\mathbf{v}$ ,  $T$  и  $p$

$$\Delta \mathbf{v} + RT \boldsymbol{\gamma} = \nabla p, \quad R = g\beta Ah^4 / \nu \chi \quad (1.3)$$

$$\Delta T = -(\mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.4)$$

В уравнения входит безразмерный параметр — число Релея  $R$ .

Далее будут рассматриваться лишь плоские возмущения, для которых отличны от нуля компоненты скорости  $v_x$  и  $v_z$ , а  $v_y = 0$ , и все величины не зависят от  $y$ . В этом случае можно ввести функцию тока

$$v_x = \partial \psi / \partial z, \quad v_z = -\partial \psi / \partial x \quad (1.5)$$

Исключая из (1.3) давление взятием операции  $\operatorname{rot}$  и вводя функцию тока, получим

$$\Delta \Delta \psi - R \left( \sin \alpha \frac{\partial T}{\partial z} + \cos \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0, \quad \Delta T - \left( \sin \alpha \frac{\partial \psi}{\partial z} + \cos \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.6)$$

«Нормальные» возмущения, периодические в направлении  $z$ , запишем в виде

$$\psi(x, z) = \varphi(x) e^{ikz}, \quad T(x, z) = \theta(x) e^{ikz} \quad (1.7)$$

Здесь  $k$  — вещественное волновое число. Подставляя (1.7) в (1.6), получим уравнения для амплитуд возмущений  $\varphi(x)$  и  $\theta(x)$ :

$$\varphi^{IV} - 2k^2 \varphi'' + k^4 \varphi = R(ik \sin \alpha \theta + \cos \alpha \theta') \quad (1.8)$$

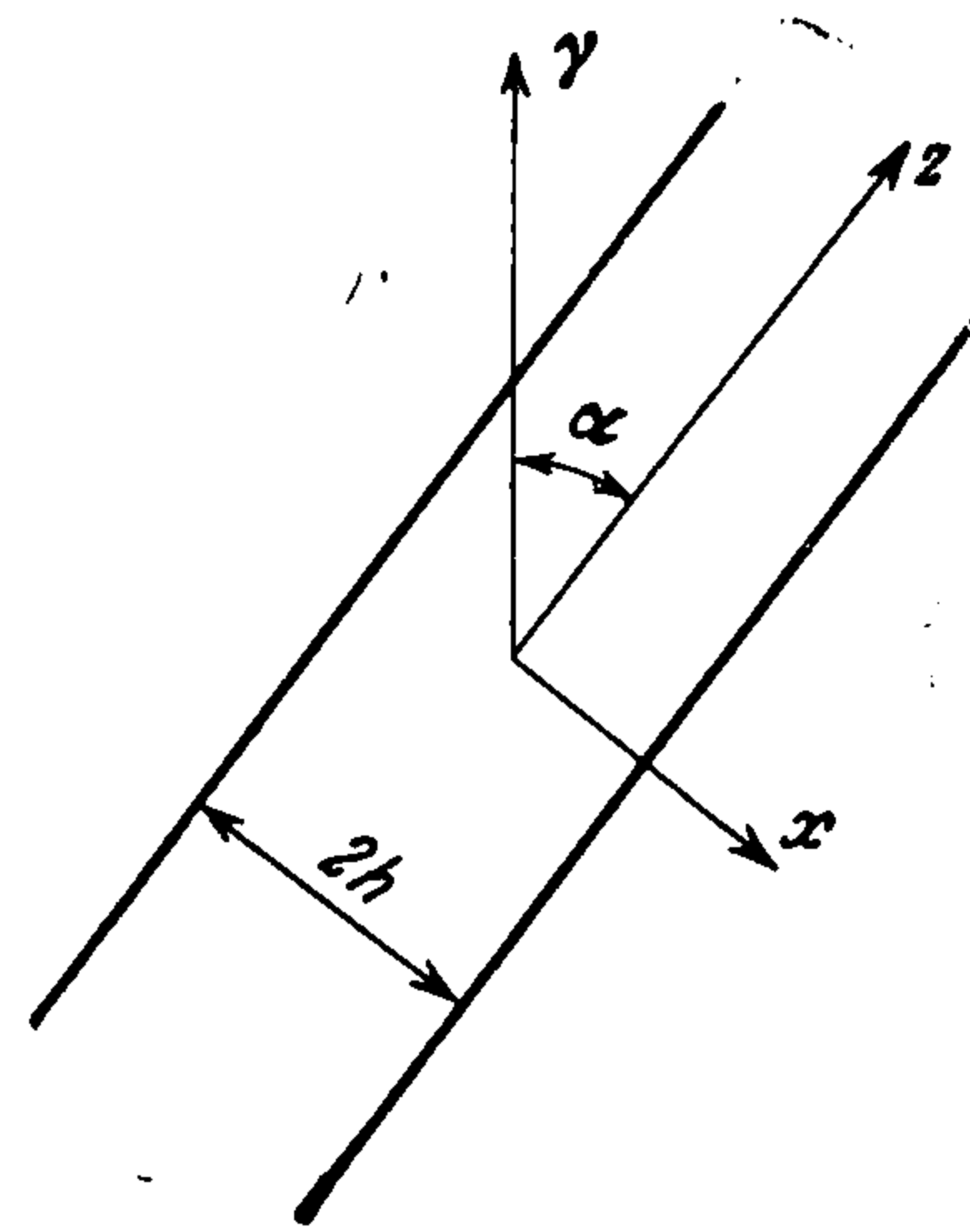
$$\theta'' - k^2 \theta = ik \sin \alpha \varphi + \cos \alpha \varphi' \quad (1.9)$$

На границах слоя исчезают обе составляющие скорости и возмущение температуры (последнее условие соответствует идеально проводящим стенкам). Граничные условия к уравнениям (1.8), (1.9) имеют вид

$$\varphi = \varphi' = \theta = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (1.10)$$

Задача (1.8) — (1.10) — характеристическая; из нее находятся критические числа Релея  $R$  (для данных значений параметров  $\alpha$  и  $k$ ) и соответствующие критические движения.

**§ 2. Длинноволновые возмущения. Критический угол.** Если длина волны возмущений велика по сравнению с шириной слоя, то безразмерное волновое число  $k$  мало, и для решения задачи можно воспользоваться методом малого параметра.



Фиг. 1

Будем искать амплитуды возмущений  $\varphi$  и  $\theta$  и критическое число Релея  $R$  в виде разложений по малому параметру ( $ik$ )

$$\varphi = \varphi^{(0)} + (ik)\varphi^{(1)} + (ik)^2\varphi^{(2)} + \dots \quad (2.1)$$

$$\theta = \theta^{(0)} + (ik)\theta^{(1)} + (ik)^2\theta^{(2)} + \dots \quad (2.2)$$

$$R = R^{(0)} + k^2R^{(2)} + k^4R^{(4)} + \dots \quad (2.3)$$

(ввиду вещественности  $R$  разложение (2.3), очевидно, содержит лишь четные степени  $k$ ). Уравнения последовательных приближений имеют вид

$$\varphi^{(0)IV} - R^{(0)} \cos \alpha \theta^{(0)'} = 0, \quad \theta^{(0)''} - \cos \alpha \varphi^{(0)'} = 0 \quad (2.4)$$

$$\varphi^{(1)IV} - R^{(0)} \cos \alpha \theta^{(1)'} = R^{(0)} \sin \alpha \theta^{(0)}. \quad \theta^{(1)''} - \cos \alpha \varphi^{(1)'} = \sin \alpha \varphi^{(0)} \quad (2.5)$$

$$\varphi^{(2)IV} - R^{(0)} \cos \alpha \theta^{(2)'} = -2\varphi^{(0)''} + R^{(0)} \sin \alpha \theta^{(1)} - R^{(2)} \cos \alpha \theta^{(0)'} \quad (2.6)$$

$$\theta^{(2)''} - \cos \alpha \varphi^{(2)'} = -\theta^{(0)} + \sin \alpha \varphi^{(1)} \text{ и т. д.}$$

Граничные условия для всех приближений совпадают с (1.10).

Нулевое приближение (2.4) дает критические числа  $R^{(0)}$  и соответствующие амплитуды для плоскопараллельных возмущений ( $k = 0$ ). Однородная система (2.4) с граничными условиями (1.10) определяет два класса решений. Для первого класса («нечетные» решения) скорость  $v_z^{(0)}$  и температура  $\theta^{(0)}$  будут нечетными функциями  $x$ . Решения этого класса имеют вид

$$\varphi^{(0)} = \frac{\cos \gamma x}{\cos \gamma} - 1, \quad \theta^{(0)} = \frac{\cos \alpha}{\gamma} \frac{\sin \gamma x}{\cos \gamma} \quad (2.7)$$

$$\gamma \equiv (R^{(0)} \cos^2 \alpha)^{1/4} \quad (2.8)$$

Характеристическое соотношение для нечетных решений приводит к следующему спектру нечетных уровней неустойчивости

$$\gamma = n\pi, \quad R^{(0)} = \frac{\gamma^4}{\cos^2 \alpha} = \frac{n^4 \pi^4}{\cos^2 \alpha} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (2.9)$$

Амплитуды четных решений таковы:

$$\varphi^{(0)} = \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma} - \frac{\text{sh } \gamma x}{\text{sh } \gamma}, \quad \theta^{(0)} = \frac{\cos \alpha}{\gamma} \left[ \frac{\cos \gamma - \cos \gamma x}{\sin \gamma} + \frac{\text{ch } \gamma - \text{ch } \gamma x}{\text{sh } \gamma} \right] \quad (2.10)$$

Здесь  $\gamma$  связано с  $R^{(0)}$  соотношением (2.8), но в случае четных решений значения  $\gamma$  определяются как корни уравнения

$$\text{tg } \gamma = \text{th } \gamma \quad (\gamma = 3.927, 7.069, \dots) \quad (2.11)$$

Соответственно находятся критические уровни  $R^{(0)}$  для четных возмущений

$$R^{(0)} = \frac{\gamma^4}{\cos^2 \alpha} = \frac{(3.927)^4}{\cos^2 \alpha}, \quad \frac{(7.069)^4}{\cos^2 \alpha}, \dots \quad (2.12)$$

В спектре критических значений  $\gamma$  (т. е. и  $R^0$ ) чередуются нечетные и четные уровни в следующей последовательности:

$$\gamma_1 = \pi, \quad \gamma_2 = 3.927, \quad \gamma_3 = 2\pi, \quad \gamma_4 = 7.069, \dots \quad (2.13)$$

Для определения поправок к уровням и амплитудам возмущений при малых  $k$  необходимо обратиться к системам уравнений последовательных

приближений. В каждом приближении приходится решать неоднородную систему, из условия разрешимости которой определяется соответствующая поправка к невозмущенному критическому значению.

Поправки первого порядка к амплитудам находятся из системы (2.5). Из вида правых частей (2.5) ясно, что поправки первого порядка имеют четность, противоположную той, которой обладают амплитуды нулевого приближения. Можно видеть, что так же будет обстоять дело для всех поправок нечетного порядка. Все поправки четного порядка к амплитудам имеют, напротив, ту же четность, что и нулевое приближение. Все решение, таким образом, при  $k \neq 0$  не имеет определенной четности, что видно также и непосредственно из системы (1.8), (1.9).

Выпишем поправки первого порядка к амплитудам нечетных решений

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \operatorname{tg} \alpha \left[ \frac{x \cos \gamma x}{2 \cos \gamma} + \frac{3(\gamma \operatorname{cth} \gamma - 1)}{2\gamma \cos \gamma} \sin \gamma x - \frac{3}{2} \frac{\operatorname{sh} \gamma x}{\operatorname{sh} \gamma} + x \right] \\ \theta^{(1)} &= \sin \alpha \left[ \frac{x \sin \gamma x}{2\gamma \cos \gamma} + \frac{(2 - 3\gamma \operatorname{cth} \gamma)}{2\gamma^2 \cos \gamma} \cos \gamma x - \frac{3 \operatorname{ch} \gamma x}{2\gamma \operatorname{sh} \gamma} + \frac{3\gamma \operatorname{cth} \gamma - 1}{\gamma^2} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Значения  $\gamma$  определяются соотношением (2.9). Соответствующие формулы для амплитудных поправок первого порядка к четным решениям таковы:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \left[ \frac{x \sin \gamma x}{\sin \gamma} - \frac{x \operatorname{sh} \gamma x}{\operatorname{sh} \gamma} + \frac{1 + 3\gamma \operatorname{ctg} \gamma}{\gamma \sin \gamma} \cos \gamma x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + 3\gamma \operatorname{ctg} \gamma}{\gamma \operatorname{sh} \gamma} \operatorname{ch} \gamma x - \frac{2}{\gamma} \operatorname{ctg} \gamma (1 + 3\gamma \operatorname{ctg} \gamma) \right] \\ \theta^{(1)} &= \sin \alpha \left[ \frac{3 \operatorname{ctg} \gamma}{2\gamma \sin \gamma} \sin \gamma x + \frac{3 \operatorname{ctg} \gamma}{2\gamma \operatorname{sh} \gamma} \operatorname{sh} \gamma x - \frac{x \cos \gamma x}{2\gamma \sin \gamma} - \frac{x \operatorname{ch} \gamma x}{2\gamma \operatorname{sh} \gamma} - \frac{2 \operatorname{ctg} \gamma}{\gamma} x \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

значения  $\gamma$  определяются из (2.11).

Амплитуды нулевого и первого порядка позволяют определить квадратичную поправку  $R^{(2)}$ . Последняя находится из условия разрешимости неоднородной системы (2.6) для амплитуд второго порядка

$$\begin{aligned} R^{(2)} \cos \alpha \int_{-1}^1 \varphi^{(0)} \theta^{(0)'} dx &= \int_{-1}^1 [2\varphi^{(0)'} \varphi^{(0)'} + R^{(0)} \theta^{(0)} \theta^{(0)} + \\ &\quad + R^{(0)} \sin \alpha (\varphi^{(1)} \theta^{(0)} - \varphi^{(0)} \theta^{(1)})] dx \end{aligned} \quad (2.16)$$

Подставляя в (2.16) найденные амплитуды нулевого и первого порядка, получим для «нечетных» уровней

$$R^{(2)} = \frac{3\gamma^2}{\cos^2 \alpha} \left[ 1 - \frac{1}{2} (6\gamma \operatorname{cth} \gamma - 5) \operatorname{tg}^2 \alpha \right] \quad (2.17)$$

Поведение нейтральных кривых  $R(k)$  при малых  $k$  определяется знаком квадратичной поправки  $R^{(2)}$ . Если  $R^{(2)} > 0$ , то в точке  $k = 0$  на кривой устойчивости имеется минимум; при  $R^{(2)} < 0$  — максимум. Из формулы (2.17) видно, что при малых  $\alpha$  квадратичная поправка  $R^{(2)}$  положительна; с увеличением угла  $R^{(2)}$  монотонно убывает и при некотором  $\alpha_0$  меняет знак. Критический угол  $\alpha_0$  определяется из условия  $R^{(2)} = 0$ , откуда находим

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{6\gamma \operatorname{cth} \gamma - 5} \right)^{1/2} \quad (2.18)$$

Для нижнего нечетного уровня, который является основным в спектре и определяет порог конвекции,  $\gamma = \pi$  (см. формулу (2.9)). Из (2.18) тогда получаем  $\alpha_0 = 20^\circ 46'$ .

Таким образом, в интервале углов  $0 < \alpha < \alpha_0$  минимальное число Релея соответствует плоскопараллельным возмущениям с  $k = 0$  и равно, в соответствии с (2.9),

$$R_{1*} = \frac{\pi^4}{\cos^2 \alpha} \quad (2.19)$$

При  $\alpha > \alpha_0$  точка  $k = 0$  соответствует максимуму на кривой  $R_1(k)$ ; минимум смещается в область  $k \neq 0$ , и соответствующее критическое число будет определено численно в § 3.

Поведение кривых устойчивости  $R(k)$  в области малых  $k$  для более высоких нечетных урвней совершенно аналогично рассмотренному выше поведению основного уровня. Все критические углы получаются из формулы (2.18) подстановкой  $\gamma = n\pi$ . Очевидно, с ростом  $n$  критический угол падает. Для второго нечетного уровня (в общем спектре третий уровень  $R_3$  в порядке возрастания) из (2.18), подставляя  $\gamma = 2\pi$ , находим  $\alpha_0 = 13^\circ 53'$ .

Для определения поведения четных уровней неустойчивости следует обратиться к (2.16) и подставить нулевые и первые приближения для четных амплитуд (2.10) и (2.15). Формула для  $R^{(2)}$ , аналогичная (2.17), выглядит весьма громоздко и здесь не приводится. Ее исследование показывает, что при всех углах  $\alpha$  квадратичная поправка  $R^{(2)}$  положительна. Таким образом, при всех  $\alpha$  нейтральные кривые  $R(k)$  четных уровней имеют минимум при  $k = 0$ , и соответствующие минимальные значения  $R_*$  определяются формулами нулевого приближения (2.12). Метод малого параметра, естественно, не позволяет ответить на вопрос, является ли минимум при  $k = 0$  единственным, — для этого требуется рассмотрение устойчивости относительно возмущений с конечными  $k$  (см. § 3). Заранее очевидно, однако, что минимум при конечных  $k$  должен существовать, во всяком случае, для углов, близких к  $90^\circ$ . В самом деле, при  $\alpha \rightarrow 90^\circ$  в пределе получается задача Релея об устойчивости горизонтального слоя, а в этом случае, как известно, минимальные критические значения чисел Релея на всех уровнях неустойчивости соответствуют конечным длинам волн.

**3. Численные результаты.** Для получения спектра неустойчивости при конечных значениях волнового числа  $k$  следует обратиться к полной системе (1.8), (1.9). Можно написать общее решение линейной системы с постоянными коэффициентами (1.8), (1.9), однако получающееся характеристическое соотношение, из которого следует находить критические числа Релея, оказывается очень сложным. Поэтому более целесообразно воспользоваться приближенным методом Галеркина.

Для этого представим амплитуды функции тока и температуры в виде разложений

$$\varphi = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots, \quad \theta = b_0\theta_0 + b_1\theta_1 + b_2\theta_2 + \dots \quad (3.1)$$

где в качестве базисных функций  $\varphi_i$  и  $\theta_l$  выберем собственные функции следующих краевых задач:

$$\varphi_i^{IV} - 2k^2\varphi_i'' + k^4\varphi_i = -\mu_i(\varphi_i'' - k^2\varphi_i), \quad \varphi_i = \varphi_i' = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (3.2)$$

$$\theta_l'' - k^2\theta_l = -\nu_l\theta_l \quad \theta_l = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (3.3)$$

Явный вид базисных функций и соотношения для собственных чисел приведены в работе [7], где этот базис использовался для исследования спектра нормальных возмущений стационарного конвективного движения.

Подставляя разложения (3.1) в уравнения (1.8), (1.9), умножая первое из них на  $\varphi_i$ , а второе на  $\theta_l$  и интегрируя по  $x$  в пределах от  $-1$  до  $+1$ , получим бесконечную линейную однородную систему уравнений метода Галеркина для коэффициентов  $a_i, b_l$ .

Приравнявая нулю определитель этой системы, получим характеристическое уравнение, которое определяет критические значения  $R$  как функции параметров  $\alpha$  и  $k$ . Это уравнение можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} (a) & (b) \\ (c) & (d) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

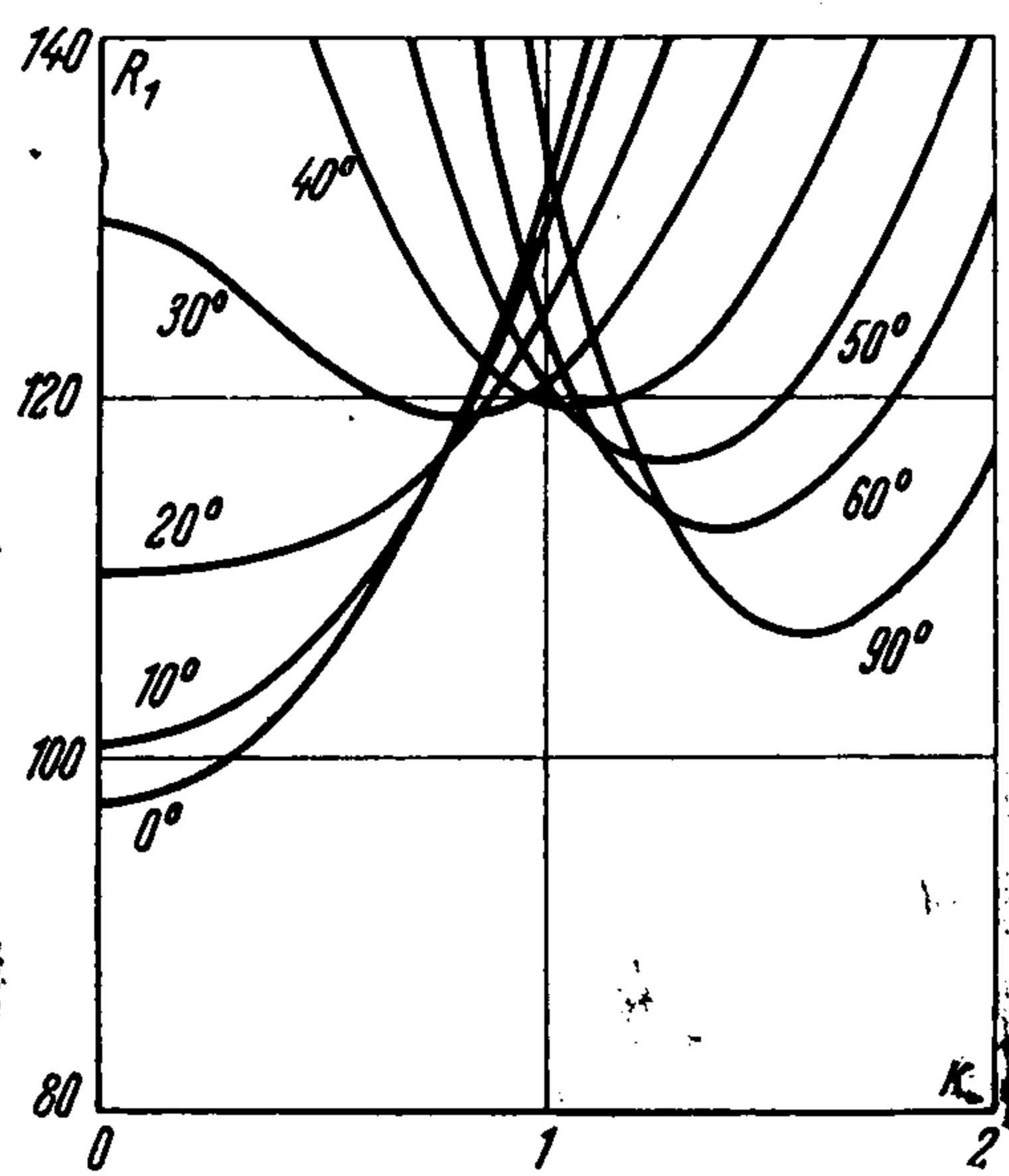
Здесь  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(c)$ ,  $(d)$  — матрицы, общие члены которых имеют вид

$$\begin{aligned} a_{mn} &= -R^{-1} I_m \delta_{mn}, & b_{mn} &= ik \sin \alpha C_{mn} + \cos \alpha D_{nm} \\ c_{mn} &= ik \sin \alpha C_{nm} - \cos \alpha D_{mn}, & d_{mn} &= 1/2 \nu_m \delta_{mn} \end{aligned} \quad (3.5)$$

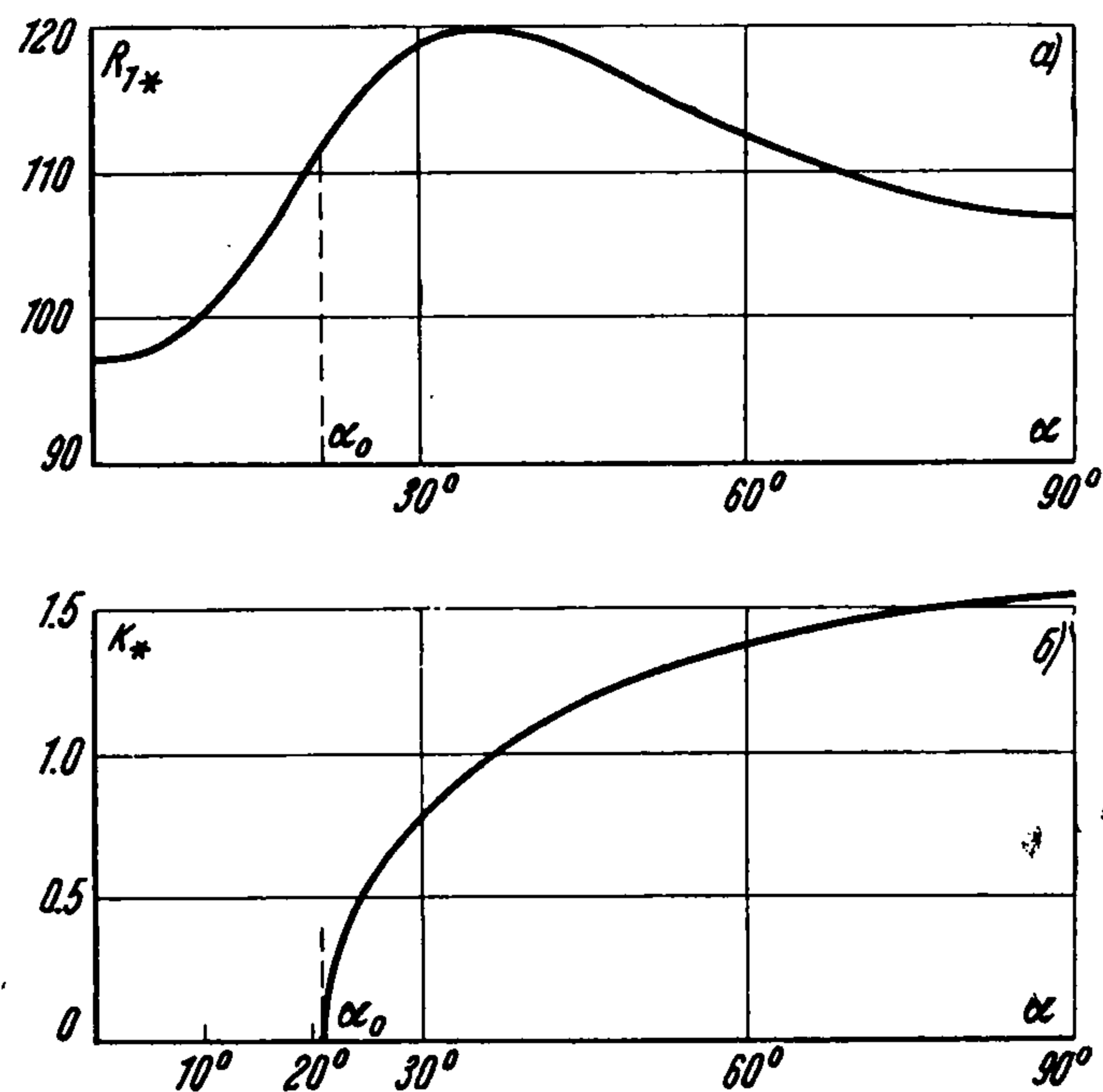
Здесь  $\delta_{mn}$  — символ Кронекера, а матричные элементы  $C_{mn}$ ,  $D_{mn}$  и  $I_m$  имеют значения, зависящие от четности индексов

$$\begin{aligned} C_{mn} &= (-1)^{1/2 m} f_{mn} & (m, n — \text{четные}) \\ C_{mn} &= (-1)^{1/2(m-1)} f_{mn} & (m, n — \text{нечетные}) \\ C_{mn} &= 0 & (m, n — \text{разной четности}) \\ D_{mn} &= (-1)^{1/2(m+2)} f_{mn} k \operatorname{cth} k & (m — \text{четное}, n — \text{нечетное}) \\ D_{mn} &= (-1)^{1/2(m+1)} f_{mn} k \operatorname{th} k & (m — \text{нечетное}, n — \text{четное}) \\ D_{mn} &= 0 & (m, n — \text{одинаковой четности}) \\ I_m &= \frac{\mu_m^2}{2(\mu_m - k^2)} (\mu_m - k^2 - k \operatorname{th} k + k^2 \operatorname{th}^2 k) & (m — \text{четное}) \\ I_m &= \frac{\mu_m^2}{2(\mu_m - k^2)} (\mu_m - k^2 - k \operatorname{cth} k + k^2 \operatorname{cth}^2 k) & (m — \text{нечетное}) \\ f_{mn} &= \frac{\pi(m+1)\mu_n}{2\nu_m(\mu_n - \nu_m)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

В разложении (3.1) удерживалось по восемь членов. В этом приближении характеристическое уравнение (3.4), левая часть которого является определителем шестнадцатого порядка, позволяет найти восемь уровней спектра критических значений  $R$ . Достаточной точностью обладают, естественно, лишь нижние из них.



Фиг. 2



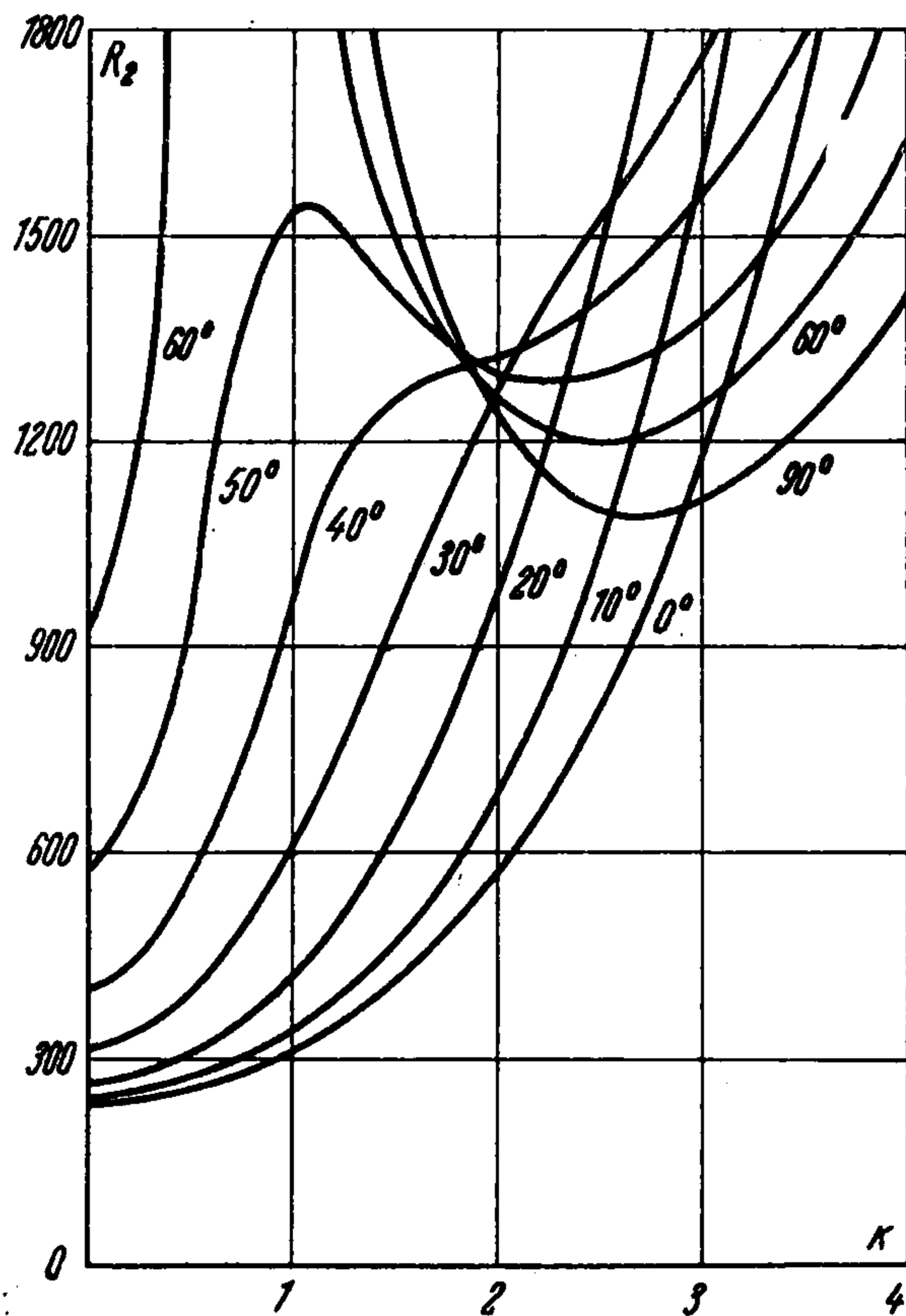
Фиг. 3

Для диагонализации матрицы применялся ортогонально-степенной метод [8]. Расчеты велись на ЭВЦМ «Арагац»<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Авторы приносят благодарность С. Келлер и А. Коблову за помощь в проведении расчетов.

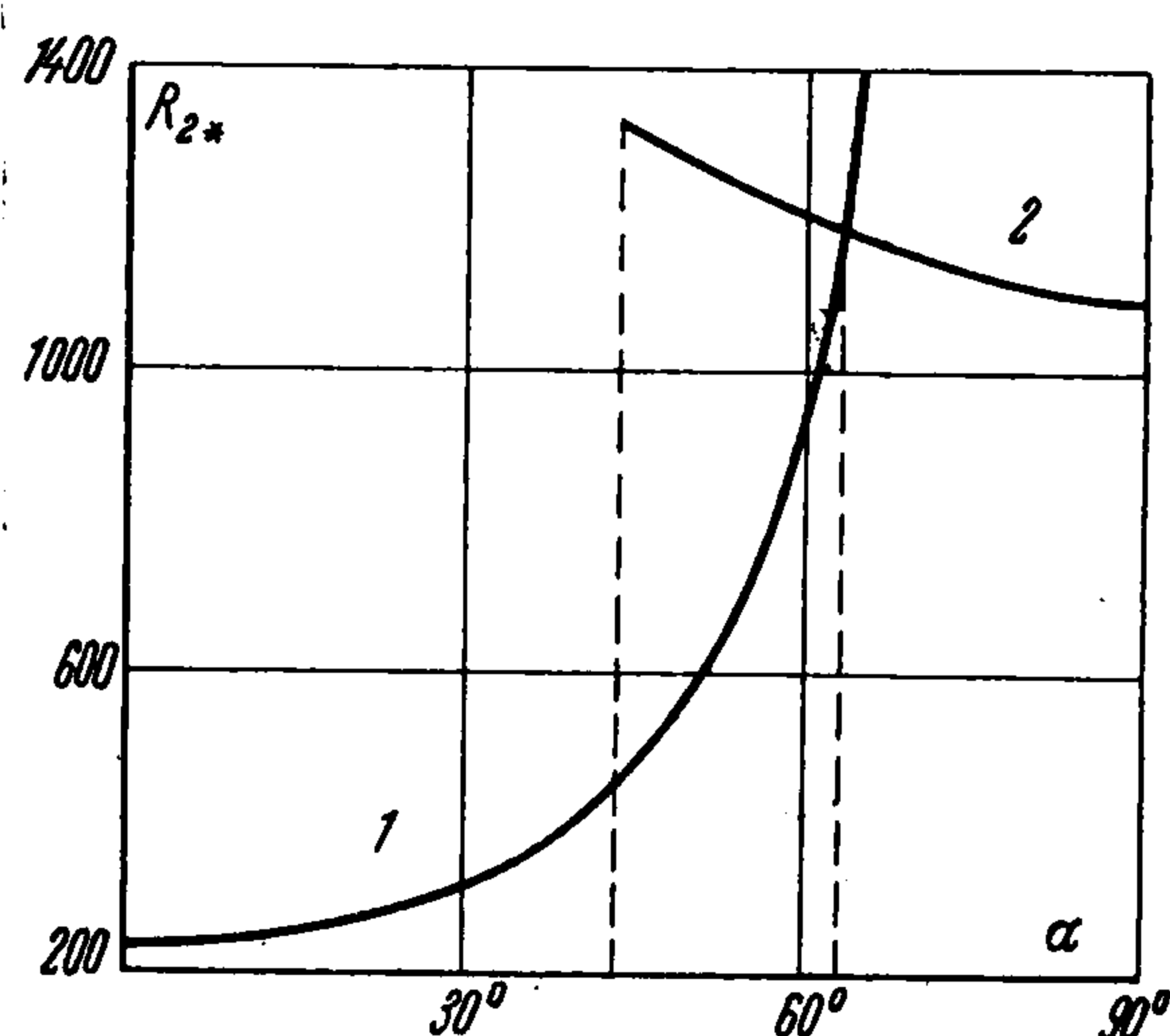
Перейдем к обсуждению численных результатов.

На фиг. 2 представлены нейтральные кривые  $R_1(k)$  основного уровня неустойчивости для разных углов наклона слоя к вертикали. При  $0 \leq \alpha < 21^\circ$  критические значения  $R_1$  монотонно возрастают с увеличением  $k$  и минимум соответствует  $k = 0$ . При  $\alpha > 21^\circ$ , в соответствии с результатами § 2, минимум смещается в область  $k \neq 0$ . Мини-



Фиг. 4

мальное значение  $R_{1*}$ , определяющее границу устойчивости в зависимости от угла наклона  $\alpha$ , изображено на фиг. 3,а. Как видно из фиг. 3,а, устойчивость максимальна в области углов, близких к  $35^\circ$ . При  $\alpha = 90^\circ$  (плоский горизонтальный слой, подогреваемый снизу<sup>2</sup>)  $R_{1*} = 106.8$  (соответствующее волновое число  $k_{1*} = 1.56$ ).



Фиг. 5

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что критическое число  $R_{1*}$  довольно слабо зависит от угла наклона. Однако при изменении ориентации слоя происходит смена формы неустойчивости: при  $\alpha < 21^\circ$  кризис обусловлен плоскопараллельными движениями ( $k = 0$ ), а при  $\alpha > 21^\circ$  неустойчивость возникает в виде ячеек Бенара, волновое число которых  $k_*$  монотонно возрастает с углом  $\alpha$  (фиг. 3,б).

Для исследования поведения  $k_*$  вблизи критического угла  $\alpha_0$  возвратимся к формуле (2.17). С учетом (2.18) квадратичная поправка  $R^{(2)}$  может быть записана в виде

$$R^{(2)} = \frac{3\gamma^2(6\gamma \operatorname{cth} \gamma - 5)}{2 \cos^2 \alpha} (\operatorname{tg}^2 \alpha_0 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \quad (3.7)$$

При  $\alpha$ , близких к  $\alpha_0$ , имеем

$$R^{(2)} = a (\alpha_0 - \alpha) \quad (3.8)$$

Разложение (2.3) критического числа Релея до членов порядка  $k^4$  вблизи критического угла имеет вид

$$R = R^{(0)} - a (\alpha - \alpha_0) k^2 + R^{(4)} k^4 \quad (a > 0, R^{(4)} > 0) \quad (3.9)$$

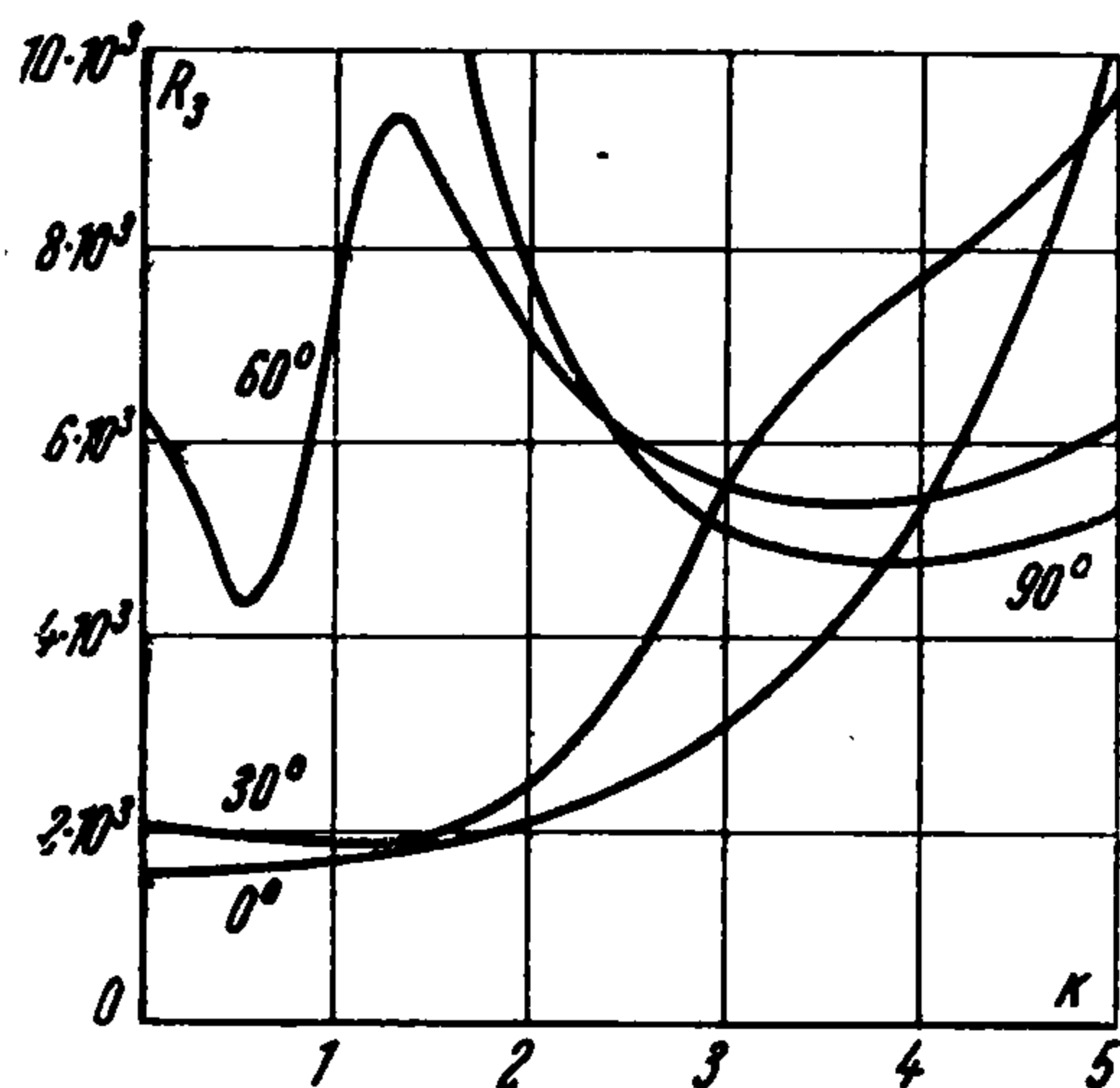
Минимизируя  $R$  по  $k$ , находим

$$k_* = \left( \frac{a}{2R^{(4)}} (\alpha - \alpha_0) \right)^{1/2} \quad (3.10)$$

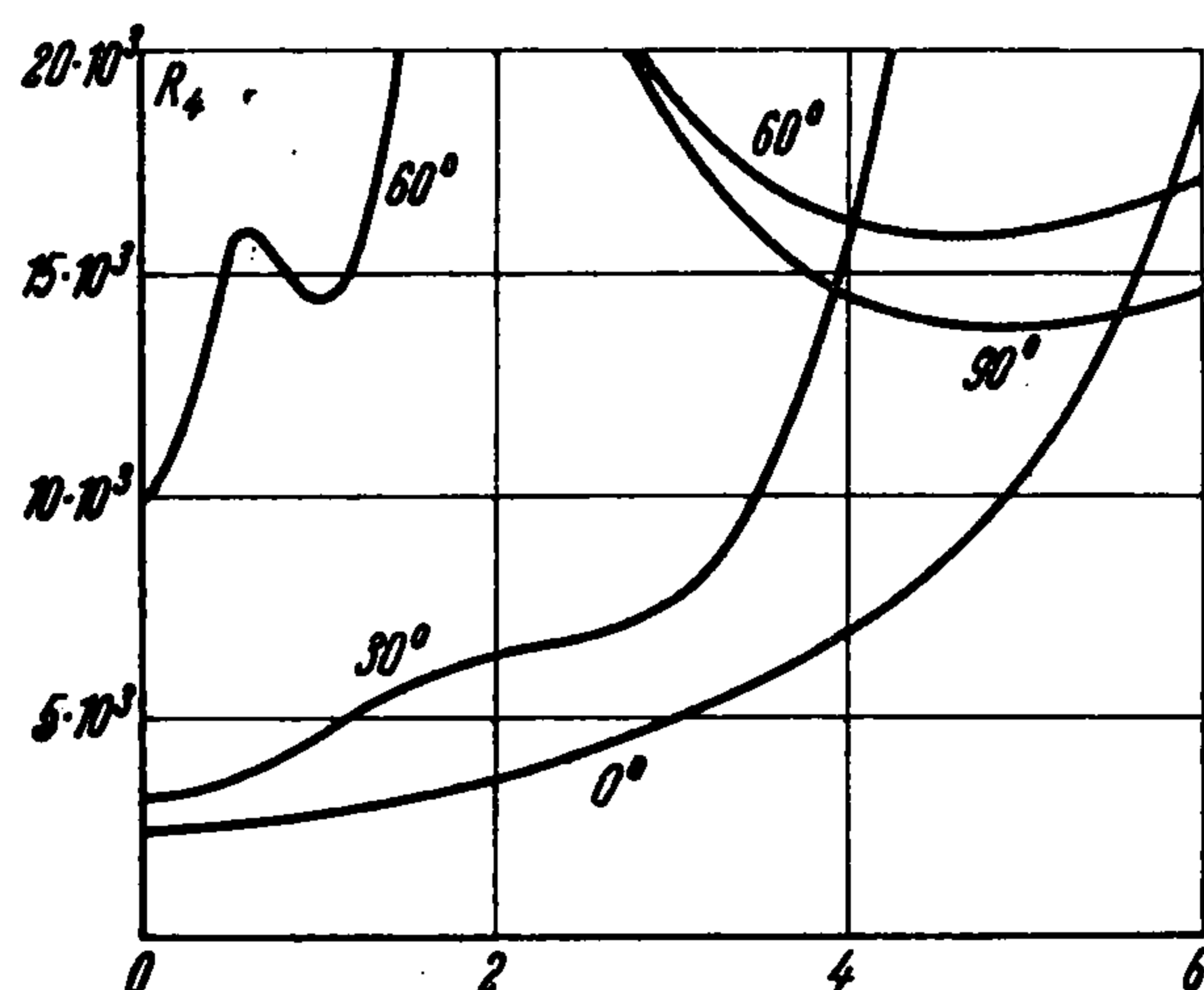
т. е.  $k_*$  при  $\alpha \gtrsim \alpha_0$  растет по корневому закону.

<sup>2</sup> Напомним, что число Релея определено выше через полуширину слоя. Если определить число Релея  $R^+$  через полную ширину слоя и полную разность температуры, то приведенное значение следует умножить на 16 и тогда получим  $R_{1*}^+ = 1709$ , в хорошем соответствии с [4].

Рассмотрим теперь второй уровень неустойчивости  $R_2$ . Нейтральные кривые  $R_2(k)$  для разных углов  $\alpha$  приведены на фиг. 4. В соответствии с результатами, полученными методом малого параметра (§ 2), в точке  $k = 0$  теперь имеется минимум на кривых устойчивости при всех  $\alpha$ . Соответствующее минимальное значение  $R_{2*}$  меняется с  $\alpha$  по формуле (2.12) (первый корень) и изображено на фиг. 5, кривая 1. При увеличении угла  $\alpha$  на кривых устойчивости сначала появляется точка перегиба, а при  $\alpha = 43^\circ$  возникает второй минимум при  $k = 2.0$ . Этот минимум с ростом  $\alpha$  смещается в сторону



Фиг. 6



Фиг. 7

больших волновых чисел. Зависимость соответствующего минимального критического числа  $R_{2*}$  от  $\alpha$  изображена на фиг. 5, кривая 2. Критическое волновое число  $k_*$  вдоль кривой 2 монотонно растет от 2.0 при  $\alpha = 43^\circ$  до 2.7 при  $\alpha = 90^\circ$ . Смена формы неустойчивости (переход от плоскопараллельных движений к ячеистым) происходит при  $\alpha = 63^\circ$ , где пересекаются кривые 1 и 2. В этой точке  $k_*$  скачком изменяется от нуля до конечного значения.

В предельном случае  $\alpha = 90^\circ$  критическое число  $R_{2*}$  равно 1102 (второй уровень спектра релеевской неустойчивости в горизонтальном слое, см. [4]).

Поведение верхних уровней неустойчивости более сложно. Нейтральные кривые  $R(k)$  имеют несколько экстремумов; число их зависит от угла и возрастает с ростом номера уровня. При  $\alpha = 90^\circ$  в пределе получают более высокие уровни релеевского спектра. На фиг. 6 и 7 приведены нейтральные кривые  $R(k)$  для третьего и четвертого уровней.

В заключение заметим, что описанная смена формы неустойчивости при изменении угла наклона, по-видимому, типична для длинных каналов произвольного сечения.

Поступила 15 IV 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
2. Chia-Shun Yih. Thermal instability of viscous fluids. Quart. Appl. Math., 1959, vol. 17, No. 1.
3. Wooding R. A. Instability of a viscous fluid of variable density in a vertical Hele-Shaw cell. J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, pt. 4, p. 501.
4. Pellew A., Southwell R. V. On maintained convective motion in a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc. A, 1940, vol. 176, No. 966.
5. Шайдуров Г. Ф. Тепловая неустойчивость жидкости в горизонтальном цилиндре. Инж.-физ. ж., 1961, т. 4, № 11.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Устойчивость равновесия жидкости в горизонтальном цилиндре, подогреваемом снизу. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
7. Рудаков Р. Н. О малых возмущениях конвективного движения между вертикальными параллельными плоскостями. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
8. Воеводин В. В. Некоторые методы решения полной проблемы собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.