

О РАВНОМЕРНО ТОЧНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПЛОСКОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ ТЕЛА С РЕЗКИМ ЛОКАЛЬНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ КРИВИЗНЫ ЕГО ПРОФИЛЯ

Б. М. Булах

(Ленинград)

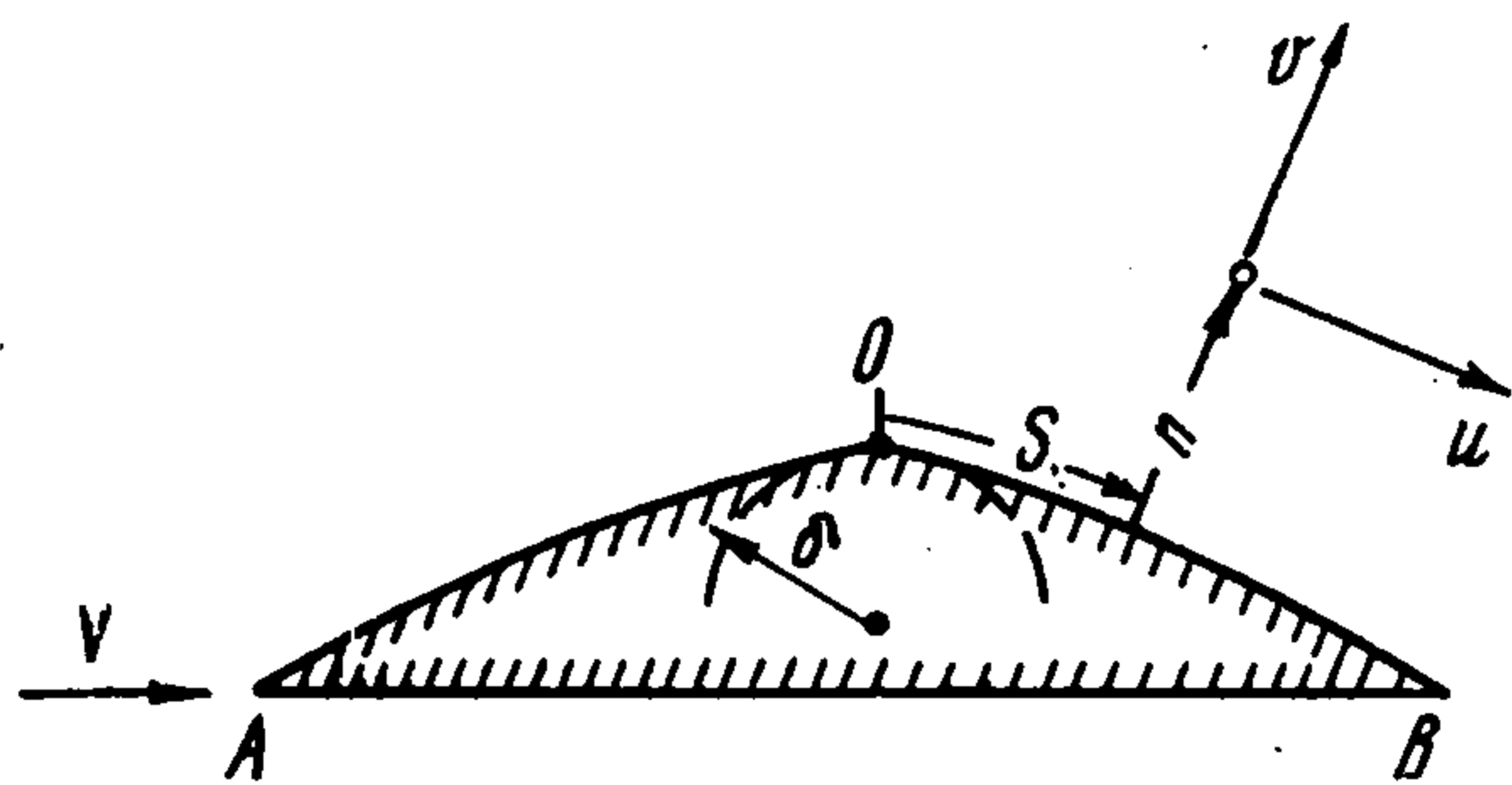
Приближенные уравнения ламинарного движения газа в плоском пограничном слое, уравнения Прандтля, выводятся из уравнений Навье — Стокса путем отбрасывания в них второстепенных членов. При оценках членов в уравнениях предполагается, что радиус кривизны профиля обтекаемого тела имеет такой же порядок, что и длина тела, и число Рейнольдса задачи $R \gg 1$. Более строго уравнения Прандтля можно рассматривать как уравнения для главного члена асимптотического разложения решения уравнений Навье — Стокса в ряд по степеням $\varepsilon = R^{-1/2}$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$; причем, уравнения Прандтля справедливы с точностью до множителя $1 + O(\varepsilon)$. Упомянутое ограничение на кривизну профиля не существенно в асимптотической теории где требуется лишь ограниченность κ при $\varepsilon \rightarrow 0$, но имеет важное значение для применения уравнений при малых, но конечных ε . Ниже рассмотрен случай, когда радиус кривизны профиля тела в окрестности некоторой его точки мал по сравнению с длиной тела. Здесь уравнения Прандтля могут стать слишком грубыми при малых, но конечных ε , и решение задачи о пограничном слое рассматривается зависящим от двух параметров ε и δ , где δ — минимальный радиус кривизны профиля. В работе строится асимптотическая теория ламинарного движения газа при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ в окрестности точки профиля, где происходит резкое изменение кривизны, в случае, когда поток газа вне пограничного слоя сверхзвуковой. Выводятся уравнения движения газа с точностью до множителя $1 + O(\varepsilon)$, при различных скоростях стремления ε и δ к нулю. Обсуждаются возможные пути решения этих уравнений при малых, но конечных ε и δ .

1. Рассмотрим некоторый профиль, у которого кривизна κ есть непрерывная функция координаты s , отсчитываемой вдоль профиля (фигура) от точки O , где κ принимает наибольшее значение κ_{\max} , соответственно, ради-

ус кривизны — наименьшее значение $\delta = (\kappa_{\max})^{-1}$. Расстояние от точки A до точки O , отсчитанное вдоль профиля, примем за характерную длину l_0 , и все длины будем относить к l_0 . Предположим, что профиль таков, что

$$\int_{-\delta}^{\delta} \kappa ds \gg \int_{s-\delta}^{s+\delta} \kappa ds$$

т. е. искривленность профиля в окрестности точки O много больше, чем в окрестностях других точек (для которых $s \neq 0$). Имея в виду дальнейшие цели, включим рассматриваемый профиль в семейство профилей, форма которых зависит от δ как от параметра; кривизна профилей $\kappa = \kappa(s, \delta)$.



предполагается непрерывной и удовлетворяющей условию

$$\lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \int_{s-\delta}^{s+\delta} \kappa ds = \begin{cases} 0, & s \neq 0 \\ c, & s = 0 \end{cases} \quad (0 < c < 2) \quad (1.1)$$

Уравнение профилей этого семейства не потребуется в дальнейшем и выводиться не будет. Отметим только, что схематически форму профиля в окрестности точки O при $\delta \rightarrow 0$ можно представить себе в виде угла, скругленного по окружности радиуса δ . Из условия (1.1) следует, что κ в окрестности точки O можно представить в виде

$$\kappa = K(S, \delta) \delta^{-1}, \quad S = s\delta^{-1}, \quad K(S, \delta) = \frac{\kappa}{\kappa_{\max}} \leq 1 \quad (1.2)$$

Функция $K(S, \delta)$ обладает свойством

$$\int_{1^-}^1 K(S, \delta) dS \rightarrow c, \quad \delta \rightarrow 0 \quad \text{или} \quad 0 < K(S, \delta) \leq 1 \quad \text{при} \quad -1 < S < 1, \quad \delta \rightarrow 0$$

2. Пусть теперь на тело, имеющее рассмотренный профиль, набегают стационарный поток вязкого совершенного газа. В системе координат, принятой в теории пограничного слоя, когда s отсчитывается вдоль профиля, а n по нормали к нему, уравнения неразрывности, количества движения, энергии и уравнение состояния газа имеют вид

$$(\rho u)_s + [(1 + \kappa n) \rho v]_n = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\rho \left(\frac{uu_s}{1 + \kappa n} + vu_n + \frac{\kappa}{1 + \kappa n} uv \right) + \frac{p_s}{1 + \kappa n} \right] = \\ & = \left[\mu \left(u_n + \frac{v_s - \kappa u}{1 + \kappa n} \right) \right]_n + \frac{2}{1 + \kappa n} \left[\mu \left(\frac{u_s + \kappa v}{1 + \kappa n} \right) \right]_s + \\ & + \mu \frac{2\kappa}{1 + \kappa n} \left(u_n + \frac{v_s - \kappa u}{1 + \kappa n} \right) + \frac{1}{1 + \kappa n} \left[\lambda \left(\frac{u_s + \kappa v}{1 + \kappa n} + v_n \right) \right]_s \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\rho \left(\frac{uv_s}{1 + \kappa n} + vv_n - \frac{\kappa}{1 + \kappa n} u^2 \right) + p_n \right] = 2(\mu v_n)_n + \\ & + \frac{1}{1 + \kappa n} \left[\mu \left(u_n + \frac{v_s - \kappa u}{1 + \kappa n} \right) \right]_s + 2\mu \left(v_n - \frac{u_s + \kappa v}{1 + \kappa n} \right) \frac{\kappa}{1 + \kappa n} + \left[\lambda \left(\frac{u_s + \kappa v}{1 + \kappa n} + v_n \right) \right]_n \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\rho \left(\frac{uT_s}{1 + \kappa n} + vT_n \right) - \left(\frac{up_s}{1 + \kappa n} + vp_n \right) \right] = \\ & = \frac{1}{1 + \kappa n} \left[\frac{\mu T_s}{\sigma(1 + \kappa n)} \right]_s + \left[\frac{\mu}{\sigma} T_n \right]_n + \frac{\kappa}{1 + \kappa n} \frac{\mu}{\sigma} T_n + \Phi \end{aligned}$$

$$\Phi = \mu \left[2 \left(\frac{u_s + \kappa v}{1 + \kappa n} \right)^2 + 2v_n^2 + \left(u_n + \frac{v_s - \kappa u}{1 + \kappa n} \right)^2 \right] + \lambda \left[\frac{u_s + \kappa v}{1 + \kappa n} + v_n \right]^2 \quad (2.4)$$

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho T, \quad \mu = \mu(T), \quad \lambda = \lambda(T), \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{R}}, \quad R = \frac{V_0 l_0 \rho_0}{\mu_0} \quad (2.5)$$

Здесь u, v есть компоненты вектора скорости в направлениях увеличения s и n соответственно, ρ — плотность, p — давление, T — температура, σ — число Прандтля, μ, λ — коэффициенты вязкости, γ — адиабатический индекс, R — число Рейнольдса, построенное по характерным параметрам потока; производные обозначены индексами около знака функции, например, $u_n^* = \partial u / \partial n$.

В уравнениях (2.1) — (2.5) все длины отнесены к l_0 , скорости — к V_0 , плотность к ρ_0 , давление — к $\rho_0 V_0^2$, температура — к $T_0 = V_0^2 c_p^{-1}$, где c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, коэффициенты вязкости — к μ_0 , и обозначения для безразмерных величин сохранены те же, что и для размерных. За характерные параметры V_0, ρ_0, μ_0 удобно принять в данном случае соответствующие значения V, ρ, μ в потоке непосредственно перед точкой O (фигура).

3. Как известно, при решении задачи обтекания тел в случае $\varepsilon \ll 1$, различают пограничный слой — область, толщиной $O(\varepsilon)$, непосредственно прилегающую к поверхности тела, и область «внешнего потока».

В последней области решение системы уравнений (2.1) — (2.5) ищется в виде асимптотического разложения [1]

$$f(s, n, \varepsilon) \sim F_1(s, n) + \varepsilon F_2(s, n) + \dots \quad (3.1)$$

Здесь под f понимаются u, v, p, ρ, T . В области пограничного слоя, где силы вязкости имеют такой же порядок, что и силы инерции, вводится новая переменная $N = n\varepsilon^{-1}$ и решение ищется в виде асимптотического разложения

$$f(s, n, \varepsilon) \sim f_1(s, N) + \varepsilon f_2(s, N) + \dots, \quad v \sim \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \quad (3.2)$$

где под f подразумеваются u, p, ρ, T . Уравнения для первых членов разложения (3.1) есть уравнения Эйлера; уравнения для первых членов разложения (3.2) — уравнения Прандтля, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_1 u_{1s} + (\rho_1 v_1)_N &= 0, & \rho_1 (u_1 u_{1s} + v_1 u_{1N}) - (\mu u_{1N})_N &= -p_{1s}, & p_{1N} &= 0 \\ \rho_1 (u_1 t_{1s} + v_1 t_{1N}) - p_{1s} u_1 &= (t_{1N} \mu / \sigma)_N + \mu u_1^2 N, & \mu &= \mu(t_1), & p_1 &= t_1 \rho_1 (\gamma - 1) / \gamma \end{aligned} \quad (3.3)$$

При выводе уравнений (3.3) предполагалось, что κ есть ограниченная функция s и ε .

Для того, чтобы уравнения (3.3), которые справедливы с точностью до множителя $1 + O(\varepsilon)$, можно было бы использовать для определения движения газа в пограничном слое при малых, но конечных ε , необходимо наложить более жесткие ограничения на κ , а именно, предполагать, что κ не намного превосходит единицу.

В этом случае асимптотические оценки, видимо, отражают действительные порядки величин, и уравнения (3.3) позволяют рассчитать течение в пограничном слое с хорошей точностью вплоть до окрестности точки O (фигура), где $\kappa \gg 1$. Здесь, хотя по-прежнему справедлива асимптотическая оценка погрешности уравнений $1 + O(\varepsilon)$ для фиксированного δ и $\varepsilon \rightarrow 0$, при малых, но конечных ε , уравнения (3.3) могут стать слишком грубыми, и задачу целесообразно рассматривать как зависящую от двух параметров — ε и δ . Целью дальнейшего будет получение таких уравнений движения газа в окрестности точки O при условии, что $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, которые справедливы с точностью до множителя $1 + O(\varepsilon)$ и могут быть использованы при конечных ε и δ . Предполагается, что поток вне пограничного слоя сверхзвуковой.

При построении асимптотической теории движения газа в окрестности точки O необходимо различать следующие случаи:

$$\begin{aligned} \lim \varepsilon \delta^{-1} = 0; \quad \lim \varepsilon \delta^{-1} = \beta_0 < \infty; \quad \lim \varepsilon^2 \delta^{-1} = 0, \quad \varepsilon, \delta \rightarrow 0 \\ \lim \varepsilon \delta^{-1} = \infty; \quad \lim \varepsilon^2 \delta^{-1} = \beta_1 < \infty; \quad \lim \varepsilon^2 \delta^{-1} = \infty, \quad \varepsilon, \delta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Заметим, что второй случай частично рассмотрен в работе [2].

4. Рассмотрим случай $\lim \varepsilon \delta^{-1} = 0$ при $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$. Так как при переходе от точки профиля, определяемой координатой $S = s\delta^{-1} = -1$, к точке $S = +1$, касательная к профилю поворачивается на конечный угол (см. условия (1.1), (1.2)), то в невязком потоке, соответствующем первому члену разложения (3.1), на этом участке профиля происходит конечное изменение параметров газа, в частности, давления p . В пограничном слое $p_N = 0$ до и после некоторой окрестности точки O , поэтому и в слое толщиной $O(\varepsilon)$ в окрестности точки O величина $p = O(1)$ меняется на конечную величину, т. е.

$$\frac{\partial p}{\partial s} = O(\delta^{-1}), \quad \text{или} \quad \frac{\partial p}{\partial S} = O(1), \quad -1 < S < 1$$

Для других параметров газа предположим, что дифференцирование по $S = s\delta^{-1}$ при $-1 < S < 1$ также не изменяет порядка функций при $\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$. Течение газа в пограничном слое перед точкой O есть течение с сильным сдвигом. Несомненно, что и в окрестности точки O течение имеет такой же характер. Поэтому предположим, что в окрестности точки O , так же как и перед ней, дифференцирование функций по $N = n\varepsilon^{-1}$ не изменяет порядок функций при $N = O(1)$ и $-1 < S < 1$. Преобразуем уравнения (2.1) — (2.4) к переменным $S = s\delta^{-1}$ и $N = n\varepsilon^{-1}$. Уравнение неразрывности (2.1) запишется в виде

$$(\rho u)_S + [(1 + K\varepsilon\delta^{-1}N)\rho v\delta\varepsilon^{-1}]_N = 0 \quad (4.1)$$

Так как при $\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0 \delta\varepsilon^{-1} \rightarrow \infty$, то $v = O(\varepsilon\delta^{-1})$. Введем $v^* = O(1)$ при помощи замены

$$v = \varepsilon\delta^{-1}v^* \quad (4.2)$$

Уравнение (4.1) примет вид

$$(\rho u)_S + [(1 + K\varepsilon\delta^{-1}N)\rho v^*]_N = 0 \quad (4.3)$$

Уравнение (2.2) в переменных S и N , с учетом (4.2), запишется в виде

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{uu_S}{1 + KN\varepsilon\delta^{-1}} + v^*u_N + \frac{K}{1 + KN\varepsilon\delta^{-1}} uv^*\varepsilon\delta^{-1} \right] + \frac{P_S}{1 + KN\varepsilon\delta^{-1}} = \\ = \delta(\mu u_N)_N + \varepsilon \left\{ \left(\mu \frac{v_S\varepsilon\delta^{-1} - Ku}{1 + KN\varepsilon\delta^{-1}} \right)_N + \varepsilon\delta^{-1} \frac{2}{1 + KN\varepsilon\delta^{-1}} \left[\mu \left(\frac{u_S + Kv^*\varepsilon\delta^{-1}}{1 + KN\varepsilon\delta^{-1}} \right) \right]_S + \right. \\ \left. + \mu \frac{2K}{1 + KN\varepsilon\delta^{-1}} \left(u_N + \frac{v_S^*\varepsilon\delta^{-1} - Ku}{1 + KN\varepsilon\delta^{-1}} \right) + \frac{\varepsilon\delta^{-1}}{1 + KN\varepsilon\delta^{-1}} \times \right. \\ \left. \times \left[\lambda \left(\frac{u_S + Kv^*\varepsilon\delta^{-1}}{1 + KN\varepsilon\delta^{-1}} + v^S \right) \right]_S \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует уравнение

$$\rho \left(\frac{uu_S}{1 + KN\epsilon\delta^{-1}} + v^*u_N + \frac{Kuv^*}{1 + KN\epsilon\delta^{-1}} \epsilon\delta^{-1} \right) + \frac{p_S}{1 + KN\epsilon\delta^{-1}} = \delta (\mu u_N)_N + O(\epsilon) \quad (4.5)$$

Уравнения движения газа строятся с равномерной точностью $1 + O(\epsilon)$, поэтому в уравнениях (4.3), (4.5) члены вида $KN\epsilon\delta^{-1}$, $\delta (\mu u_N)_N$ должны быть сохранены. Уравнения (2.3) — (2.4) после аналогичных преобразований запишутся в виде

$$p_N - \frac{K\rho u^2}{1 + KN\epsilon\delta^{-1}} \epsilon\delta^{-1} + \rho (\epsilon\delta^{-1})^2 \left(\frac{uv_S^*}{1 + KN\epsilon\delta^{-1}} + v^*v_N^* \right) = O(\epsilon^2\delta^{-1}) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{uT_S}{1 + KN\epsilon\delta^{-1}} + v^*T_N \right) - \left(\frac{up_S}{1 + KN\epsilon\delta^{-1}} + v^*p_N \right) = \\ = \delta \left[\left(\frac{\mu}{\sigma} T_N \right)_N + \mu u_N^2 \right] + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (4.7)$$

На поверхности тела $N = 0$, $u = v^* = 0$ (условия прилипания), и уравнение (4.5) приводится к виду

$$p_S = \delta (\mu u_N)_N + O(\epsilon) \quad (4.8)$$

Слева в (4.8) стоит конечная величина, справа — бесконечно малая при $\epsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, поэтому вблизи стенки имеется слой, где производные функций по N имеют иной порядок, чем сами функции. Из (4.8) следует, что в этом слое нужно ввести переменную

$$\eta = N\delta^{-1/2} = n\epsilon^{-1}\delta^{-1/2} \quad (4.9)$$

Из уравнения неразрывности (2.1) получается, что $v = O(\epsilon\delta^{-1/2})$ при $\eta = O(1)$. После замены $v = \epsilon\delta^{-1/2}v^\circ$ и перехода к переменным S, η уравнения (2.1) — (2.4) примут вид

$$(\rho u)_S + [(1 + K\eta\epsilon\delta^{-1/2})\rho v^\circ]_\eta = 0 \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{uu_S}{1 + K\eta\epsilon\delta^{-1/2}} + v^\circ u_\eta + \frac{Kuv^\circ}{1 + K\eta\epsilon\delta^{-1/2}} \right) + \frac{p_S}{1 + K\eta\epsilon\delta^{-1/2}} = \\ = (\mu u_\eta)_\eta + \epsilon\delta^{-1/2} [-(\mu K u)_\eta + 2K\mu u_\eta] + O(\epsilon^2\delta^{-1}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$p_\eta - K\rho u^2\epsilon\delta^{-1/2} = O(\epsilon^2\delta^{-1}) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{uT_S}{1 + K\eta\epsilon\delta^{-1/2}} + v^\circ T_\eta \right) - \left(\frac{up_S}{1 + K\eta\epsilon\delta^{-1/2}} + v^\circ p_\eta \right) = \\ = \left(\frac{\mu}{\sigma} T_\eta \right)_\eta + \mu u_\eta^2 + \epsilon\delta^{-1/2} K\mu (\sigma^{-1}T_\eta - 2uu_\eta) + O(\epsilon^2\delta^{-1}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

5. Рассмотрим случай $\lim \epsilon\delta^{-1} = \beta_0 < \infty$ при $\epsilon, \delta \rightarrow 0$. Представим δ в виде произведения $\epsilon\beta^{-1}$, где $\beta = O(1)$, когда $\epsilon, \delta \rightarrow 0$ и подставим $\delta = \epsilon\beta^{-1}$ в уравнения (4.2) — (4.13).

В результате получим уравнения движения газа в виде

$$\begin{aligned}
 &(\rho u)_S + [(1 + KN\beta)\rho v^*]_N = 0, \\
 &\rho \left(\frac{uu_S}{1 + KN\beta} + v^*u_N + \frac{Kuv^*\beta}{1 + KN\beta} \right) + \frac{p_S}{1 + KN\beta} = O(\varepsilon) \\
 &\rho \left(\frac{\beta^2 uv_S^*}{1 + KN\beta} + \beta^2 v^*v_N^* - \frac{K\beta u^2}{1 + KN\beta} \right) + p_N = O(\varepsilon) \quad (5.1) \\
 &\rho \left(\frac{uT_S}{1 + KN\beta} + v^*T_N \right) - \left(\frac{up_S}{1 + KN\beta} + v^*p_N \right) = O(\varepsilon) \\
 &(v = \beta v^*, N = n\varepsilon^{-1}, S = \beta s\varepsilon^{-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(\rho u)_S + [(1 + K\beta^{1/2}\varepsilon^{1/2})\rho v^\circ]_\eta = 0 \\
 &\rho \left[\frac{uu_S}{1 + K\eta(\beta\varepsilon)^{1/2}} + v^\circ u_\eta + Kuv^\circ(\varepsilon\beta)^{1/2} \right] + \frac{p_S}{1 + K\eta(\varepsilon\beta)^{1/2}} = \\
 &= (\mu u_\eta)_\eta + (\beta\varepsilon)^{1/2} [-(\mu Ku)_\eta + 2K\mu u_\eta] + O(\varepsilon) \\
 &P_\eta - K\rho u^2(\beta\varepsilon)^{1/2} = O(\varepsilon) \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\rho \left[\frac{uT_S}{1 + K\eta(\beta\varepsilon)^{1/2}} + v^\circ T_\eta \right] - \left[\frac{up_S}{1 + K\eta(\beta\varepsilon)^{1/2}} + v^\circ p_\eta \right] = \\
 &= \left(\frac{\mu}{\sigma} T_\eta \right)_\eta + \mu u_\eta^2 + (\beta\varepsilon)^{1/2} K\mu (\sigma^{-1} T_\eta - 2uu_\eta) + O(\varepsilon) \\
 &(v = (\beta\varepsilon)^{1/2} v^\circ, \eta = n\beta^{1/2}\varepsilon^{-3/2}, S = \beta s\varepsilon^{-1})
 \end{aligned}$$

6. Рассмотрим случай $\lim \varepsilon^2\delta^{-1} = 0$, но $\lim \varepsilon\delta^{-1} = \infty$ при $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$. Уравнение неразрывности (2.1) в переменных S и N записывается в виде

$$(\rho u)_S + [(\delta\varepsilon^{-1} + KN)\rho v]_N = 0 \quad (6.1)$$

Отсюда следует, что $v = O(1)$ при $\varepsilon_1\delta \rightarrow 0$. Уравнение (2.2), ... примет вид

$$\rho \left(\frac{uu_S}{KN + \delta\varepsilon^{-1}} + vu_N + \frac{Kuv}{KN + \delta\varepsilon^{-1}} \right) + \frac{p_S}{KN + \delta\varepsilon^{-1}} = O(\varepsilon), \dots \quad (6.2)$$

В переменных η, S после замены $v = \varepsilon\delta^{-1/2}v^\circ$ уравнения (2.1), (2.2) и т. д. примут вид

$$(\rho u)_S + [(1 + K\eta\varepsilon\delta^{-1/2})\rho v^\circ]_\eta = 0 \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}
 &\rho \left(\frac{uu_S}{1 + K\eta\varepsilon\delta^{-1/2}} + v^\circ u_\eta + \frac{Kuv^\circ}{1 + K\eta\varepsilon\delta^{-1/2}} \varepsilon\delta^{-1/2} \right) + \frac{p_S}{1 + K\eta\varepsilon\delta^{-1/2}} = \\
 &= (\mu u_\eta)_\eta + \left[\mu \left(\frac{\varepsilon\delta^{-1/2}v^\circ - Ku}{1 + K\eta\varepsilon\delta^{-1/2}} \right) \right]_\eta \varepsilon\delta^{-1/2} + \varepsilon^2\delta^{-1} \left[\mu \left(\frac{u_S + Kv^\circ\varepsilon\delta^{-1/2}}{1 + K\eta\varepsilon\delta^{-1/2}} \right) \right]_S + \\
 &+ \mu \frac{2K}{1 + K\eta\varepsilon\delta^{-1/2}} \left(u_\eta\varepsilon\delta^{-1/2} + \frac{v_S^\circ\varepsilon\delta^{-1/2} - Ku\varepsilon^2\delta^{-1}}{1 + K\eta\varepsilon\delta^{-1/2}} \right) + \\
 &+ \frac{\varepsilon^2\delta^{-1}}{1 + K\eta\varepsilon\delta^{-1}} \left[\lambda \left(\frac{u_S + Kv^\circ\varepsilon\delta^{-1/2}}{1 + K\eta\varepsilon\delta^{-1/2}} + v_\eta^\circ \right) \right]_S, \dots \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

Так как задача состоит в том, чтобы получить уравнения движения с оценкой погрешности в виде множителя $1 + O(\varepsilon)$, то в уравнении (6.4)

необходимо сохранить члены $O(\varepsilon^2\delta^{-1})$, так как $\lim(\varepsilon^2\delta^{-1}/\varepsilon) = \infty$ при $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$, т. е. следует решать полное уравнение Навье — Стокса. Уравнения (2.1) — (2.4) все же можно привести к системе уравнений типа пограничного слоя, но с оценкой погрешности в виде множителя $1 + O(\varepsilon^2\delta^{-1})$.

7. Рассмотрим случай $\lim \varepsilon^2\delta^{-1} = \beta_1 < \infty$ при $\varepsilon_1\delta \rightarrow 0$. Если δ представить в виде произведения $\varepsilon^2\beta^{-1}$, где $\beta = O(1)$, когда $\delta, \varepsilon \rightarrow 0$, то после подстановки $\delta = \varepsilon^2\beta^{-1}$ в уравнение (6.3), (6.4) и другие, легко получить, что уравнения движения газа есть полные уравнения Навье — Стокса, т. е. приведение уравнений задачи к параболической системе уравнений типа пограничного слоя невозможно, если $\delta = O(\varepsilon^2)$ (или более высокого порядка).

8. Когда заданы конкретные значения ε и δ , необходимо, во-первых, решить, к какому асимптотическому случаю отнести данный и, затем, каким образом интегрировать уравнения пограничного слоя. (Практически интересные значения ε лежат в интервале $10^{-3} < \varepsilon < 10^{-1}$; на δ ограничений не налагается.) Здесь могут возникнуть различные ситуации в зависимости от величин ε и δ . Рассмотрим некоторые типичные случаи на примерах.

9. Пусть $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$, $\delta = 10^{-1}$. Тогда $\beta = \varepsilon\delta^{-1} = 2 \cdot 10^{-2}$ и следует воспользоваться уравнениями случая $\lim \varepsilon\delta^{-1} = 0$ при $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$. Так как $\varepsilon\delta^{-1/2} = 64 \cdot 10^{-4}$, $(\varepsilon\delta^{-1})^2 = 4 \cdot 10^{-4}$, то в уравнениях (4.3), (4.5) — (4.7), (4.10) — (4.13) можно опустить члены, содержащие множители $\varepsilon\delta^{-1/2}$ и $(\varepsilon\delta^{-1})^2$, как имеющие тот же порядок, что и ε .

Так как уравнения (4.3), (4.5) — (4.7) содержат те же члены, что и соответствующие уравнения (4.10) — (4.13) в данном конкретном случае, то целесообразно использовать систему уравнений (4.3), (4.5) — (4.7) вплоть до $N = 0$, решать ее конечно-разностными методами, причем при $N < 0.5$ шаг по N брать в три раза меньшим, чем при $N > 0.5$ (ориентировочно). Поправку на изменение давления в зависимости от N можно ввести итеративным путем. Если сохранить в уравнениях члены $O(\varepsilon\delta^{-1/2})$, то целесообразно использовать уравнения (4.3), (4.5) — (4.7) по-прежнему при всех значениях N , но эти уравнения следует дополнить членами, которые малы при $N = O(1)$, но не малы при $\eta = O(1)$, например, в правой части уравнения (4.7) следует сохранить член $\varepsilon K\mu(\sigma^{-1}T_N - 2uu_N)$, соответствующий члену $\varepsilon\delta^{-1/2} K\mu(\sigma^{-1}T_\eta - 2uu_\eta)$ в уравнении (4.3), т. е. составить гибридное уравнение, и т. д.

10. Пусть $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$, $\delta = 10^{-2}$. Тогда $\beta = \varepsilon\delta^{-1} = 2 \cdot 10^{-1}$, и следует воспользоваться уравнениями случая $\lim \varepsilon\delta^{-1} = 0$ при $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$. Поскольку $\varepsilon\delta^{-1/2} = 2 \cdot 10^{-2}$, $(\varepsilon\delta^{-1})^2 = 4 \cdot 10^{-2}$, то в уравнениях необходимо сохранить все выписанные члены. Так как ε и δ достаточно малы, то естественным казалось бы искать решение задачи в виде:

при $N = O(1)$

$$f(S, N, \varepsilon, \delta) = F_0(S, N, \varepsilon/\delta) + \delta^{1/2}F_{1/2}(S, N, \varepsilon/\delta) + \delta F_1(S, N, \varepsilon/\delta) + O(\delta^{3/2}) + O(\varepsilon^2\delta^{-1}) \quad (10.1)$$

при $\eta = O(1)$

$$f(S, \eta, \varepsilon, \delta) = f_0(S, \eta) + \varepsilon\delta^{-1/2} f_1(S, \eta) + O(\varepsilon^2\delta^{-1}) \quad (10.2)$$

Здесь $f = p, \rho, T, u, v^*$ или v° . Но для достижения равномерной точности решения пришлось бы взять три члена в формуле (10.1) и два — в формуле (10.2) (так как $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$, $\delta^{3/2} = 10^{-3}$, $\varepsilon\delta^{-1/2} = 2 \cdot 10^{-2}$), нахождение которых представляет сложную задачу. По этой причине, видимо, все же проще воспользоваться уравнениями в переменных S, N , в которые дополнительно включены члены, которые малы при $N = O(1)$, но не малы при $\eta = O(1)$, как это было сделано в предыдущем примере, и решать эти уравнения конечно-разностными методами при $N \geq 0$, $S > S_0$ (где S_0 есть величина

порядка -1). При этом нужно учесть, что шаг по N при $N < 0,5$ нужно взять в $\sqrt{\delta} = 10$ раз меньшим, чем при $N > 0,5$ (ориентировочно). Если учесть два члена в разложении (10.1) и один — в (10.2), то ошибка в решении будет уже $O(\delta)$ (т. е. на порядок больше, чем в пограничном слое перед точкой O).

11. Пусть $\epsilon = 2 \cdot 10^{-2}$, $\delta = 10^{-2}$. Тогда $\beta = \epsilon\delta^{-1} = 2$, и следует воспользоваться формулами случая $\lim \epsilon\delta^{-1} = \beta_0$ при $\epsilon, \delta \rightarrow 0$. При $N = O(1)$ движение газа описывается уравнениями Эйлера (5.1) с точностью до множителя $1 + O(\epsilon)$; при $\eta = O(1)$ — уравнениями пограничного слоя (5.2) с той же точностью. Решение задачи с равномерной точностью имеет вид

$$f(S, \eta, \epsilon) = f_0(S, \eta) + (\beta\epsilon)^{1/2} f_1(S, \eta) + O(\epsilon) \quad \text{при } \eta = O(1) \quad (11.1)$$

$$f(S, N, \epsilon) = F_0(S, N) + (\beta\epsilon)^{1/2} F_1(S, N) + O(\epsilon) \quad \text{при } N = O(1) \quad (11.2)$$

где $f = p, \rho, T, u, v^*$ или $f = v^\circ$. Появление членов $O(\epsilon^{1/2})$ в (11.2) связано с влиянием «толщины вытеснения» пограничного слоя, в котором

$$v = (\beta\epsilon)^{1/2} v^\circ = (\beta\epsilon)^{1/2} [v_0^\circ(S, \eta) + (\beta\epsilon)^{1/2} v_1^\circ(S, \eta) + O(\epsilon)]$$

При больших η ($\eta \rightarrow \infty$)

$$v_0^\circ(S, \eta) = A_1(S) \eta + A_0(S) + o(1)$$

Здесь $A_1(S), A_0(S)$ — некоторые функции S ; $A_0(S)$ — определяет «толщину вытеснения» пограничного слоя. Задача нахождения первых двух членов в разложениях (11.1), (11.2) похожа на задачу нахождения второго приближения в теории пограничного слоя, решение которой дано М. Ван-Дайком в [1], только здесь параметр, по которому производится разложение, есть $(\beta\epsilon)^{1/2}$, а не ϵ . По этой причине основное внимание уделим различиям, имеющимся в этих задачах. Не ясно, будут ли перекрываться области, где справедливы асимптотические разложения (3.2) и (11.2). Поэтому уравнения (3.3) следует, видимо, использовать до некоторого значения $S = S_0$ (порядка -1), а затем при $S > S_0$ следует перейти к гибридной системе уравнений, содержащей как все члены уравнений (3.3), так и все члены уравнений (5.1), (5.2). После перехода через скорость звука вне слоя $O(\epsilon^{3/2})$ при $S = S_0^*$ можно использовать системы (5.1) и (5.2) раздельно (другой подход к решению этой задачи дан в работе [2]). При $S > S_0^*$ задача решается аналогично задаче второго приближения в работе [1].

12. Пусть $\epsilon = 10^{-3}$, $\delta = 10^{-3}$. Так как $\beta = \epsilon\delta^{-1} = 1$, то следует воспользоваться уравнениями случая $\lim \epsilon, \delta^{-1} = \beta_0$ при $\epsilon, \delta \rightarrow 0$ и методом решения, рассмотренным в предыдущем примере. Здесь имеется, однако, возможность взять по одному члену в разложениях (11.1), (11.2). В результате ошибка в решении задачи будет $O(\epsilon^{1/2})$ вместо $O(\epsilon)$, т. е. в сотых, а не в тысячных, что, однако, может оказаться достаточным для грубого расчета. Отметим, что ошибка в решении при $S > 1$ также будет $O(\epsilon^{1/2})$.

13. Пусть $\epsilon = 3 \cdot 10^{-2}$, $\delta = 10^{-3}$. Так как $\epsilon^2\delta^{-1} = 0,9$, то задача не может быть решена методами теории пограничного слоя.

14. После нахождения решения задачи в окрестности точки O , при $S > S_1$, где S_1 есть величина порядка 1, следует перейти к системе уравнений (3.3). В результате будет получено решение задачи о плоском ламинарном пограничном слое с равномерной точностью, определяемой множителем $1 + O(\epsilon)$, если нет отрыва потока в окрестности точки O .

Поступила 12 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В. Я., Сычев В. В. Асимптотические решения уравнений Навье — Стокса в области с большими локальными возмущениями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4, стр. 43—49.
2. Van Dyke M. Second — order compressible boundary layer theory with application to the blunt bodies in hypersonic flow.— In Hypersonic Flow Research. New York — London, Acad. Press, 1962, pp. 37—76. Русск.к перев.: «Исследование гиперзвуковых течений», М., Мир., 1964.