

О ВОЗНИКНОВЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН ПРИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

А. Н. Крайко

(Москва)

К настоящему времени опубликовано большое количество работ, в которых исследуется возникновение ударных волн при одномерных нестационарных течениях, тогда разрыв образуется в результате движения поршня, начинающегося с нулевой скоростью, и в двумерном стационарном (сверхзвуковом) течении, когда ударная волна возникает при обтекании вогнутой стенки с нулевым углом передней кромки. Нестационарный случай с плоскими волнами, который рассматривался еще Эрншоу [1], Гюгонно [2] и Рэлеем [3], а позднее — А. Пиллау [4], вошел во многие руководства по газовой динамике (см., например, [5,6]). Течение с цилиндрическими и сферическими волнами при однородном начальном состоянии газа, а также при степенном распределении плотности внутри цилиндрической или сферической полости исследовано А. Джеффри [7,8]. Сверхзвуковое течение на входе в плоский и осесимметричный канал с нулевым углом передней кромки рассмотрено Р. Мейером [9]. Для плоского случая аналогичные результаты получены Н. Иоханнесеном [10]. Было установлено, что если ускорение поршня или кривизна контура конечны и отличны от нуля, то начальная характеристика, ограничивающая область возмущенного течения, на конечном расстоянии пересекается характеристиками одноименного семейства.

Положение первой точки пересечения на начальной характеристике определяется параметрами газа и или ускорением поршня в начальный момент или кривизной контура у передней кромки. Все указанные авторы ограничивались равновесным случаем, причем обычно рассматривался совершенный газ с постоянными теплоемкостями.

Определению первой точки пересечения на начальной характеристике при равновесном течении посвящены работы В. Бюргера [11] и Б. Рэрити [12]. В. Бюргер рассмотрел одномерное нестационарное течение с плоскими волнами. Термодинамические свойства газа и число неравновесных процессов были произвольными. Б. Рэрити хотя и ограничился некоторым специальным « α -газом» с одним неравновесным процессом, однако, кроме задачи, решенной В. Бюргером, рассмотрел плоское стационарное сверхзвуковое течение. Эти исследования показали, что наличие неравновесных процессов ведет к удалению точки пересечения характеристик с начальной характеристикой. При некотором малом, но конечном времени релаксации эта точка уходит в бесконечность, а при еще более быстром протекании указанных процессов вообще отсутствует.

В настоящей работе, являющейся обобщением работ [11,12], рассмотрены одномерные нестационарные течения с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами, а также плоское и осесимметричное сверхзвуковое стационарное течения. Термодинамические свойства среды и число неравновесных процессов, как и в [11], предполагаются произвольными. Рассмотрены внешняя и внутренняя задачи (внутренней задачей в стационарном случае назовем задачу о течении в канале, а в нестационарном случае — задачу о течении газа внутри ограниченной полости).

В общем случае точки пересечения характеристик могут иметься не только на начальной характеристике, но и внутри области влияния, приводя к образованию «внутренних» ударных волн. Случай, когда «внутренние» ударные волны или отсутствуют, или расположены так, что не разрушают течения в окрестности первой точки пере-

сечения на начальной характеристике, и эта точка оказывается начальной точкой «внешней» ударной волны, соответствует частному классу законов движения поршня (или формы стенки). Главной особенностью этого случая является то, что здесь положение начальной точки ударной волны может быть установлено из локального рассмотрения без использования полного решения, которое, кстати, даже для равновесного течения известно лишь в плоском случае. Хотя для неравновесного течения (как и для равновесного, отличного от плоского) исследование вопроса о положении начальной точки ударной волны удастся выполнить лишь в этом частном случае, получающиеся результаты представляют несомненный интерес, позволяя, в частности, установить направление влияния неравновесности на образование ударных волн.

Рассматриваемые задачи являются примером задач, в которых наблюдается разрушение непрерывного решения гиперболической системы квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными. Вопросы разрушения таких решений в более общем плане были в недавнем прошлом предметом интенсивных исследований (см., например, [13] и обзор П. Лакса [14]). В связи с рассматриваемой задачей из результатов общего характера следует отметить подход, развитый А. Джеффри [7,8] и А. Джеффри и Т. Таниюти [15].

1. Пусть t — время, r — расстояние от плоскости, оси или центра симметрии и v — скорость газа (вектор скорости направлен по оси r). Рассмотрим течение, возникающее при движении из состояния покоя с нулевой начальной скоростью плоского, цилиндрического или сферического поршня по закону $r = R(t)$. Если точка O — начальное положение поршня, то приписывая параметрам в ней нижний индекс 0, получим, что $r_0 = R(t_0)$ и $R'_0 \equiv (dR/dt)_0 = 0$. Предполагается, что в начале движения газ, занимающий область $r > r_0$ или полость $r < r_0$, находится в покое в состоянии полного термодинамического равновесия и распределение плотности ρ однородно, т. е. не зависит от r .

Пусть термодинамическое состояние среды (в частности, ее удельная энтальпия h) определяется давлением p , плотностью и n неравновесными параметрами q_1, \dots, q_n , которыми могут быть массовые доли компонентов, энергии внутренних степеней свободы и т. п. Совокупность этих параметров будем обозначать через q , а зависимости типа $f(q_1, \dots, q_n)$ будем записывать в виде $f(q)$.

Одномерное нестационарное неравновесное течение невязкого и нетеплопроводного газа описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial (r^\nu \rho)}{\partial t} + \frac{\partial (r^\nu \rho v)}{\partial r} = 0, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial t} - v \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \tau_k \frac{\partial q_k}{\partial t} + \tau_k v \frac{\partial q_k}{\partial r} - \omega_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\nu = 0, 1$ и 2 для плоского, цилиндрического и сферического случаев соответственно; τ_k — константа, имеющая смысл времени релаксации для параметра q_k . Функции

$$h = h(p, \rho, q), \quad \omega_k = \omega_k(p, \rho, q) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

считаются известными. Если $\tau_k = \infty$, то q_k заморожено, т. е. сохраняет постоянное значение. Если $\tau_k = 0$, то q_k равновесно.

Равновесное значение q_k есть функция p , ρ и $q_{j \neq k}$ в соответствии с конечным соотношением

$$\omega_k(p, \rho, q) = 0 \quad (1.3)$$

Все величины удобно считать безразмерными. Пусть l_* , u_* и ρ_* — константы с размерностями длины, скорости и плотности. В качестве констант возьмем, например, начальную координату поршня (при $v \neq 0$ и $r_0 \neq 0$), скорость звука и плотность невозмущенного газа. При $v = 0$ или $r_0 = 0$ за l_* можно взять произведение $u_* \tau_*$, где τ_* — размерное время релаксации одного из неравновесных процессов. Приведение к безразмерному виду достигается отнесением пространственных переменных к l_* , времени — к l_*/u_* , скоростей — к u_* , плотности — к ρ_* , давления — к $\rho_* u_*^2$ и энтальпии — к u_*^2 . Приведение к безразмерному виду параметров q_k проводится с учетом их размерностей, при этом константы τ_k становятся безразмерными.

Система уравнений (1.1) является гиперболической и, кроме траекторий частиц $dr/dt = v$, имеет два семейства действительных характеристик, на которых

$$\frac{dr}{dt} = v \pm a \quad \left(a^2 = \frac{\rho h_\rho}{1 - \rho h_p}, \quad \xi_p = \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_{\rho, q}, \quad \xi_\rho = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \rho} \right)_{p, q} \right) \quad (1.4)$$

Здесь верхний (нижний) знак соответствует характеристикам первого (второго) семейства, а a — замороженная скорость звука.

2. Сетка характеристик первого и второго семейств покрывает всю плоскость независимых переменных rt . Определим характеристические переменные ξ^1 и ξ^2 уравнением

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial t} + (v \pm a) \frac{\partial \xi^i}{\partial r} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.1)$$

где верхний знак соответствует $i = 1$, а нижний $i = 2$. Из (2.1) и (1.4) видно, что ξ^i сохраняет постоянное значение на каждой характеристике i -го семейства. Перейдем от переменных rt к полухарактеристическим переменным $r\xi^i$. В новых переменных система (1.1) и дополнительное соотношение для определения t записываются в виде

$$p_r \pm \rho a v_r + \frac{a^2}{v \pm a} \left(\frac{v p v}{r} - \sum_{k=1}^n \frac{h_k \omega_k}{\tau_k h_\rho} \right) = 0$$

$$\rho a^2 v_\xi \mp a p_\xi + \rho a v (a \pm v) v_r t_\xi - (v \pm a) v p_r t_\xi + (a \pm v)^2 p_r t_\xi = 0 \quad (2.2)$$

$$a^3 \rho_\xi - a p_\xi + a^2 v (a \pm v) \rho_r t_\xi - v (a \pm v) p_r t_\xi + a^2 (a \pm v) t_\xi \sum_{k=1}^n \frac{h_k \omega_k}{\tau_k h_\rho} = 0$$

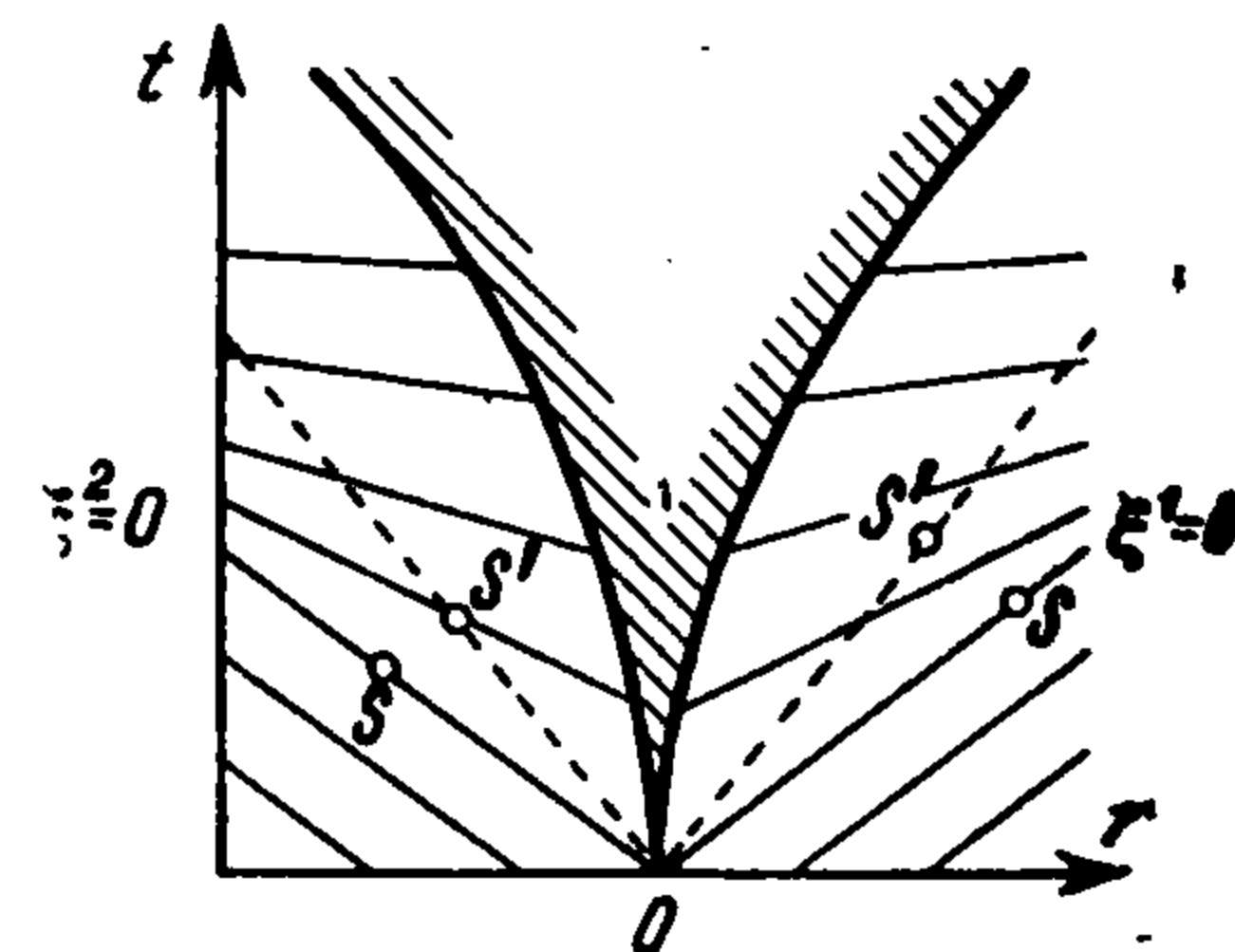
$$a \tau_k q_{k\xi} + \tau_k v (a \pm v) q_{kr} t_\xi = (a \pm v) t_\xi \omega_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

$$t_r = (v \pm a)^{-1}$$

$$\left(\varphi_r = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{\xi^i}, \quad \varphi_\xi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} \right)_r, \quad h_k = \left(\frac{\partial h}{\partial q_k} \right)_{p, \rho, q_{j \neq k}} \right)$$

Верхние знаки в (2.2) дают систему, описывающую течение в переменных $r\xi^1$ и соответственно нижние знаки — в переменных $r\xi^2$.

Пусть траектория поршня в плоскости rt изображается сплошной заштрихованной кривой, выходящей из точки O , как это показано на фиг. 1, где правая (левая) ветвь дает движение поршня для внешней (внутренней) задачи. Характеристики $\xi^1 = \text{const}$ — для внешней задачи и $\xi^2 = \text{const}$ — для внутренней также изображены сплошными линиями, причем в каждом случае характеристика соответствующего семейства, выходящая из точки O (такую характеристику назовем начальной и положим на ней $\xi^i = 0$), отделяет область возмущенного течения (над ней) от области покоя. Начальная характеристика, как и все характеристики в области покоя, есть прямая линия, являющаяся линией разрыва производных v_ξ , p_ξ , ρ_ξ , a_ξ и t_ξ . В то же время $q_{h\xi}$, как это видно из (2.2), и производные по r сохраняют непрерывность. Припишем значениям производных, сохраняющим непрерывность, и параметрам газа при $\xi^i = 0$ индекс ∞ . Из предположений, сделанных относительно покоящегося газа, равенств (1.3), справедливых при полном термодинамическом равновесии для всех k , и уравнений для q_k из (2.2), найдем, что



Фиг. 1

$$v_\infty = \omega_{k\infty} = v_{r\infty} = p_{r\infty} = \rho_{r\infty} = a_{r\infty} = q_{hr\infty} = q_{h\xi\infty} = 0 \quad (2.3)$$

Пересечение характеристик i -го семейства происходит в тех точках плоскости rt , в которых обращается в нуль якобиан преобразования независимых переменных, т. е.

$$\frac{D(r, t)}{D(r, \xi^i)} \equiv t_\xi = 0 \quad (2.4)$$

Точки этого типа назовем особыми, а параметрам в них будем приписывать нижний индекс s .

Положим ξ^i на каждой характеристике i -го семейства равными $(t - t_0)$ в точках пересечения характеристики с траекторией поршня для характеристик, лежащих выше начальной характеристики, и — с прямой $r = r_0$ — для характеристик, лежащих под ней. Тогда область возмущенного течения дается неравенством $\xi^i > 0$, а область покоя — неравенством $\xi^i < 0$, причем здесь $t_\xi \equiv 1$. Хотя характеристика $\xi^i = 0$ есть линия разрыва t_ξ , однако в точке O и над этой характеристикой для рассматриваемого закона движения поршня ($R'_0 = 0$), в силу выбора ξ^i ,

$$t_{\xi 0} = 1 \quad (2.5)$$

Здесь, как и всюду далее, для всех величин при $\xi^i = 0$ берутся значения при $\xi^i = +0$, т. е. верхние предельные значения.

На поверхности поршня скорость газа равна $R'(t)$. Поэтому в соответствии с выбором ξ^i

$$v_{\xi 0} = R_0'' \quad (2.6)$$

Система (2.2) вместе с полученными начальными условиями и равенствами (2.3) полностью определяет значения производных t_ξ , p_ξ , v_ξ и т. д. на верхней стороне начальной характеристики. Действительно, прежде всего, из второго и третьего уравнений (2.2), записанных при $\xi^i = +0$, и равенства $a = a(p, \rho, q)$ с учетом (2.3) имеем

$$p_\xi = \frac{1}{a_\infty^2} p_\xi, \quad v_\xi = \pm \frac{1}{\rho_\infty a_\infty} p_\xi, \quad a_\xi = \frac{a_{\rho\infty} + a_\infty^2 a_{p\infty}}{a_\infty^2} p_\xi \quad (2.7)$$

Здесь и далее верхний знак соответствует внешней задаче, а нижний — внутренней задаче.

Аналогичным образом, дифференцируя первое уравнение (2.2) по ξ^i , а второе — по r , используя (2.3) и (2.7) и исключая из полученных уравнений $v_{\xi r}$, найдем, что p_ξ при $\xi^i = +0$ определяется дифференциальным уравнением

$$p_{\xi r} = \left(-\frac{\nu}{2r} \pm \lambda_\infty \right) p_\xi \quad \left(\lambda = \sum_{k=1}^n \frac{h_k (\omega_{i,p} + a^2 \omega_{i,p})}{2\tau_k a h_\rho} \right) \quad (2.8)$$

Интегрирование (2.8) с использованием начального условия (2.6), переписанного для p_ξ при помощи (2.7), дает

$$p_\xi = \pm \rho_\infty a_\infty R_0'' \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\nu/2} \exp [\pm \lambda_\infty (r - r_0)] \quad \text{при } \xi^i = +0 \quad (2.9)$$

В плоском случае ($\nu = 0$) внешняя и внутренняя задачи совпадают с точностью до выбора направления оси r , причем всегда можно положить $r_0 = 0$. Для течений с цилиндрической и сферической симметрией ($\nu = 1$ и 2) и $r_0 > 0$, взяв в качестве характерного размера начальную координату поршня, получим $r_0 = 1$. Интересно отметить, что при конечном R_0'' и $\nu \neq 0$ в случае расширения поршня от оси или центра симметрии ($r_0 = 0$) на всей начальной характеристике $p_\xi \equiv 0$.

Уравнение, определяющее t_ξ при $\xi^i = +0$, получается дифференцированием по ξ^i последнего уравнения (2.2) и после преобразований с учетом (2.3) и (2.7) принимает вид

$$t_{\xi r} = \mp \frac{\alpha_\infty}{\rho_\infty a_\infty} p_\xi \quad \left(\alpha = \frac{a + \rho a_\rho + \rho a^2 a_p}{a^3} \right)$$

Подставив сюда p_ξ из (2.9) и интегрируя по r с использованием начального условия (2.5), найдем, что

$$t_\xi = 1 - R_0'' \alpha_\infty \Phi(\nu, r, r_0, \lambda_\infty) \quad \text{при } \xi^i = +0 \quad (2.10)$$

$$\Phi(\nu, r, r_0, \lambda_\infty) = \int_{r_0}^r \left(\frac{r_0}{z} \right)^{\nu/2} \exp [\pm \lambda_\infty (z - r_0)] dz$$

Если все неравновесные процессы заморожены ($\tau_k = \infty$ при $k = 1, \dots, n$), то $\lambda_\infty = 0$ и

$$\Phi(\nu, r, r_0, 0) = \begin{cases} r - r_0 & \text{при } \nu = 0 \\ 2 [(rr_0)^{1/2} - r_0] & \text{при } \nu = 1 \\ r_0 \ln(r/r_0) & \text{при } \nu = 2 \end{cases} \quad (2.11)$$

Те же формулы справедливы при полностью равновесном течении ($n = 0$), однако равновесные значения a_∞ и α_∞ , которые обозначим через $a_{e\infty}$ и $\alpha_{e\infty}$, отличаются от a_∞ и α_∞ , так как при равновесии все q_k следует считать функциями p и ρ в силу (1.3). Известно, что $a_\infty > a_{e\infty}$, и поэтому равновесная начальная характеристика (штриховая прямая на фиг. 1) проходит выше аналогичной характеристики неравновесного течения.

При неполном равновесии, когда равновесным образом изменяются лишь последние $n - r$ параметров ($\tau_{r+1} = \dots = \tau_n = 0$), начальная характеристика занимает промежуточное положение.

Случаи полного и неполного равновесия могут быть рассмотрены и как пределы неравновесного случая при $\tau_j \rightarrow 0$ для $j = r + 1, \dots, n$, где $r \geq 0$. При этом следует помнить, что из требования устойчивости равновесного состояния [16]

$$-\infty \leq \lambda_\infty \leq 0$$

где $\lambda_\infty = 0$ — в рассмотренном выше замороженном случае и $\lambda_\infty = -\infty$ — для полного или частичного равновесия. Так как $\Phi(v, r, r_0, -\infty) = 0$, то из (2.9) и (2.10) имеем $p_\xi \equiv 0$, $t_\xi \equiv 1$ при $\xi^i = \mp 0$, т. е. в согласии со сказанным ранее, при $\lambda_\infty = -\infty$ течение не возмущено не только под, но в некоторой окрестности и над начальной неравновесной характеристикой.

В соответствии с определением, $\Phi = 0$ для $r = r_0$, и при конечных скоростях неравновесных процессов, т. е. при $\lambda_\infty \neq -\infty$, для $r \neq r_0$ имеют место неравенства

$$\Phi \geq 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{v, r_0, \lambda_\infty} > 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_\infty}\right)_{v, r, r_0} \geq 0$$

Таким образом, во внешней задаче Φ положительно и растет с ростом r , а во внутренней задаче Φ отрицательно и растет по модулю с уменьшением r . Уменьшение λ_∞ от 0 до $-\infty$ в обоих случаях ведет к уменьшению $|\Phi|$. Если $r_0 = 0$, а $v = 1$ или 2, то $\Phi \equiv 0$.

Интеграл в выражении для Φ может быть взят не только при предельных, но и для произвольного значения λ_∞ . В итоге получим

$$\Phi(v, r, r_0, \lambda_\infty) = \begin{cases} \pm \lambda_\infty^{-1} (\exp[\pm \lambda_\infty(r - r_0)] - 1) & \text{при } v = 0 \\ (\mp \pi r_0 / \lambda_\infty)^{1/2} [H(\sqrt{\mp \lambda_\infty r}) - H(\sqrt{\mp \lambda_\infty r_0})] \exp(\mp \lambda_\infty r_0) & \text{при } v = 1 \\ r_0 [Ei(\pm \lambda_\infty r) - Ei(\pm \lambda_\infty r_0)] \exp(\mp \lambda_\infty r_0) & \text{при } v = 2 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\left(H(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt, \quad Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\exp t}{t} dt \right)$$

Сравнение (2.11) и (2.12) показывает, что в противоположность замороженному течению, когда Φ неограниченно растет с ростом r , предельное значение Φ для $\lambda_\infty < 0$ и $r \rightarrow \infty$ конечно. В случае внешней задачи это обстоятельство весьма важно при выяснении вопроса о существовании особой точки, принадлежащей начальной характеристике.

Условие, определяющее r_s — координату особой точки для $\xi^i = 0$, в соответствии с (2.4) и (2.10) записывается в виде

$$1 - R_0'' \alpha_\infty \Phi(v, r_s, r_0, \lambda_\infty) = 0 \quad (2.13)$$

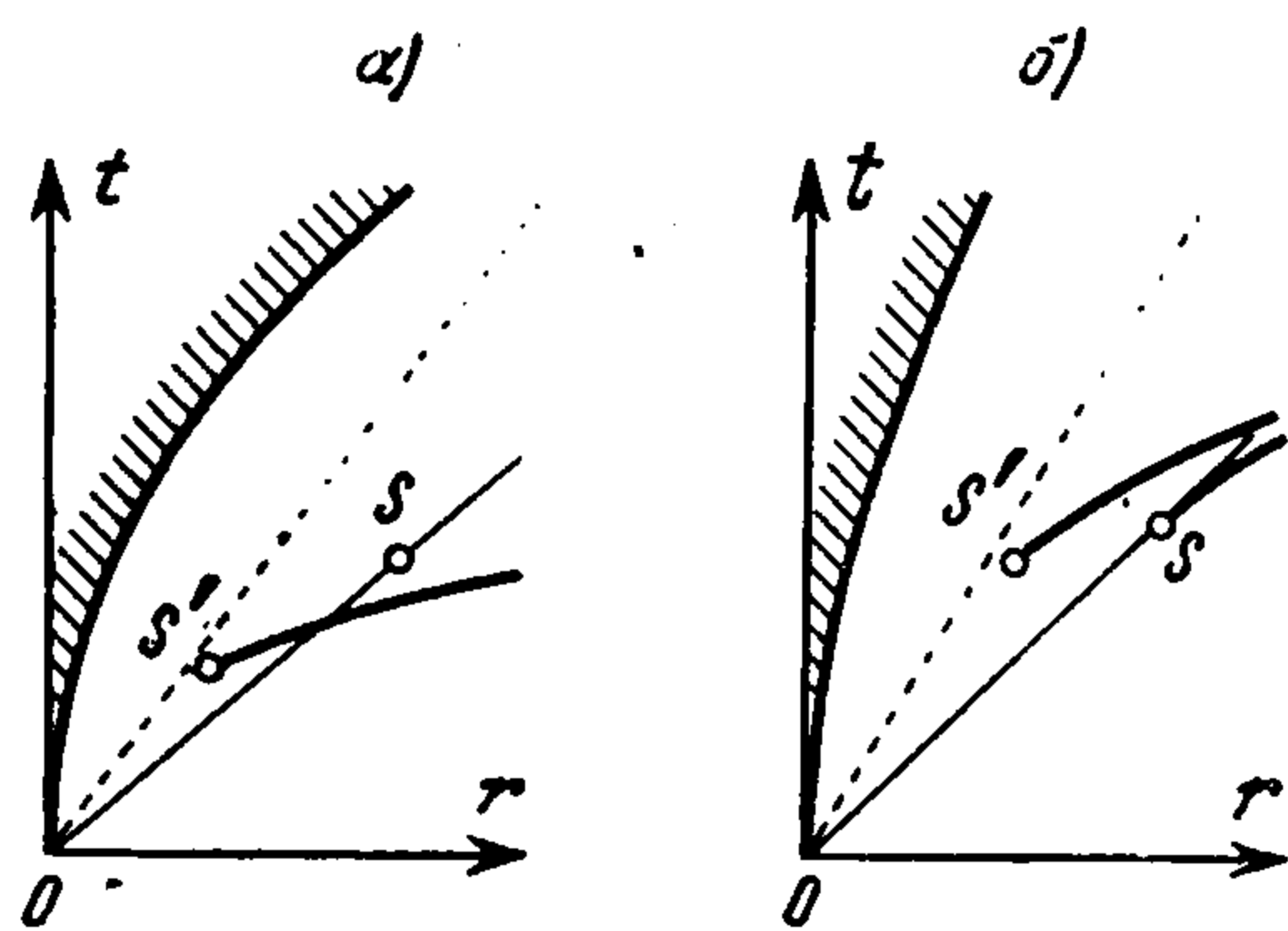
Так как α_∞ всегда положительна (для совершенного газа с показателем адиабаты κ она равна $(\kappa + 1) / 2a_\infty^2$), то пересечение характеристик, как и при равновесном течении, происходит лишь при движении поршня в сторону газа, т. е. при $R_0'' \geq 0$.

Обозначив через r_s^0 значение r_s , соответствующее замороженному случаю ($\lambda_\infty = 0$), из (2.11) и (2.13) получим

$$r_s^0 = \begin{cases} r_0 + (R_0'' \alpha_\infty)^{-1} & \text{при } \nu = 0 \\ r_0^{-1} [r_0 + 1/2 (R_0'' \alpha_\infty)^{-1}]^2 & \text{при } \nu = 1 \\ r_0 \exp (r_0 R_0'' \alpha_\infty)^{-1} & \text{при } \nu = 2 \end{cases} \quad (2.14)$$

Для совершенного газа (2.14) совпадает с известными результатами [4-8].

Увеличение $|\lambda_\infty|$ от нуля до бесконечности ведет в силу свойств функции Φ к удалению точки s , т. е. к росту $|r_s - r_0|$. При этом во внешней задаче имеется конечное значение λ_∞ , определяемое условием (2.13) с $r_s = \infty$, при котором точка s удаляется в бесконечность. При больших значениях $|\lambda_\infty|$ начальная характеристика особых точек не содержит. Аналогичная ситуация имеет место и во внутренней задаче с цилиндрическими волнами. Здесь предельное значение λ_∞ находится из условия (2.13) с $r_s = 0$. С другой стороны, $\Phi(2, 0, r_0, \lambda_\infty) = -\infty$ и поэтому для внутренней задачи со сферической симметрией (2.13) определяет некоторое конечное $r_s > 0$ при любых $\lambda_\infty > -\infty$.



Фиг. 2 а, б

Отсутствие особой точки на начальной неравновесной характеристике не исключает существования ударной волны, начинающейся внутри области влияния, даже тогда, когда при замороженном течении ($\lambda_\infty = 0$) «внутренние» ударные волны отсутствуют. Так, например, при $\lambda_\infty = -\infty$, т. е. в равновесном предельном случае имеется «внутренняя» особая точка (s' на фиг. 1), лежащая на начальной равновесной характеристике. Координата $r_{s'}$, как вытекает из сказанного ранее, также находится из (2.14), но с заменой α_∞ на $\alpha_{e\infty}$. Обычно $\alpha_{e\infty} > \alpha_\infty$ и, следовательно, $|r_{s'} - r_0| < |r_s^0 - r_0|$. Для $t_{s'}$ и t_s^0 , как правило, имеет место обратное неравенство. Аналогичная картина будет наблюдаться и при конечных, но достаточно больших по модулю λ_∞ , хотя здесь определение начальной точки s' ударной волны требует дополнительных исследований. Естественно, что если «внутренняя» ударная волна пересекает начальную неравновесную характеристику так, как это показано на фиг. 2а, где ударная волна дана сплошной кривой, выходящей из s' , то полученные соотношения для определения особой точки неприменимы. Возможна и обратная ситуация (например, за счет выбора закона движения поршня); при этом имеются две ударные волны (фиг. 2б).

Возмущение течения вблизи начальной неравновесной характеристики можно охарактеризовать величиной производной $(\partial p / \partial t)_r \equiv p_\xi / t_\xi$ при $\xi^i = \pm 0$. Для $\lambda_\infty < 0$ модуль этой производной в соответствии с (2.9), (2.10) и (2.12) при удалении от точки O сначала убывает, причем тем быстрее, чем больше $|\lambda_\infty|$, а затем вблизи s или оси симметрии резко возрастает, обращаясь в бесконечность. Отсюда следует, что при $|\lambda_\infty (r_s - r_0)| \gg 1$ между точками O и s имеется область почти невозмущенного газа и интенсивность образующейся в окрестности s ударной волны мала.

Заканчивая рассмотрение нестационарного случая, отметим, что в силу монотонности Φ по r и λ_∞ равенство (2.13) в случае существования решения однозначно определяет r_s или λ_∞ при известных прочих параметрах. В частности, для $\nu = 0$ получаем

$$r_s = r_0 \pm \frac{1}{\lambda_\infty} \ln \left(1 \pm \frac{\lambda_\infty}{R_0'' \alpha_\infty} \right)$$

что с точностью до обозначений совпадает с результатом Бюргера [11].

3. Пусть x и y — прямоугольные координаты, причем в осесимметричном случае они лежат в меридиональной плоскости и ось x совпадает с осью течения. Проекции скорости газа на x и y обозначим через u и v . Рассмотрим плоское или осесимметричное течение, возникающее при обтекании однородным сверхзвуковым потоком, находящимся в состоянии термодинамического равновесия, контура тела с образующей $y = Y(x)$. Пусть газ течет слева направо и касательная к образующей тела у передней кромки параллельна скорости набегающего потока (фиг. 3, где O — передняя кромка тела, а образующие для внешней и внутренней задач есть верхняя и нижняя ветви заштрихованной сплошной линии).

В соответствии с этим $y_0 = Y(x_0)$ и $Y'_0 \equiv (dY/dx)_0 = 0$. Термодинамические свойства газа предполагаются такими же, как в нестационарном случае.

Система уравнений двумерного стационарного неравновесного течения, кроме линий тока, где $dy/dx = v/u$, имеет при сверхзвуковых скоростях, т. е. при $w^2 \equiv u^2 + v^2 > a^2$, два семейства действительных характеристик, на которых

$$\frac{dy}{dx} = \frac{uv \pm a \sqrt{w^2 - a^2}}{u^2 - a^2} \quad (3.1)$$

Здесь верхний (нижний) знак дает направление характеристик первого (второго) семейства.

Аналогично нестационарному случаю введем характеристические переменные ξ^1 и ξ^2 в соответствии с уравнением

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x} + \frac{uv \pm a \sqrt{w^2 - a^2}}{u^2 - a^2} \frac{\partial \xi^i}{\partial y} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3.2)$$

где знак плюс берется для $i = 1$, а минус — для $i = 2$. Из (3.1) и (3.2) видно, что $\xi^i = \text{const}$ на каждой характеристике i -го семейства.

В полухарактеристических переменных $y\xi^i$ исследуемое течение описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} uv_y - vu_y \pm \frac{\sqrt{w^2 - a^2}}{\rho a} p_y + \frac{N}{y^\nu \rho} \left(\frac{v}{y} - \sum_{k=1}^n \frac{h_k \omega_k}{\tau_k \rho h_\rho} \right) &= 0 \\ uv_\xi - vu_\xi \mp \frac{\sqrt{w^2 - a^2}}{\rho a} p_\xi + \frac{Nx_\xi}{y^\nu \rho^2 u^2} (\rho u v v_y - \rho v^2 u_y + u p_y) &= 0 \\ \rho u u_\xi + \rho v v_\xi + p_\xi + \frac{v N x_\xi}{y^\nu \rho u^2} (\rho u u_y + \rho v v_y + p_y) &= 0 \\ w^2 + 2h &= \text{const} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$u \tau_k q_{k\xi} + \frac{N x_\xi}{y^\nu \rho u} (v \tau_k q_{ky} - \omega_k) = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

$$x_y = \frac{u^2 - a^2}{uv \pm a \sqrt{w^2 - a^2}} \left(\varphi_y = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{\xi^i}, \varphi_\xi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} \right)_y, N = \frac{y^\nu \rho a (av \pm u \sqrt{w^2 - a^2})}{uv \pm a \sqrt{w^2 - a^2}} \right)$$

В (3.3) $\nu = 0$ и 1 соответственно в плоском и осесимметричном случаях; верхние знаки дают систему, описывающую течение в переменных $y\xi^1$, а нижние — в переменных $y\xi^2$.

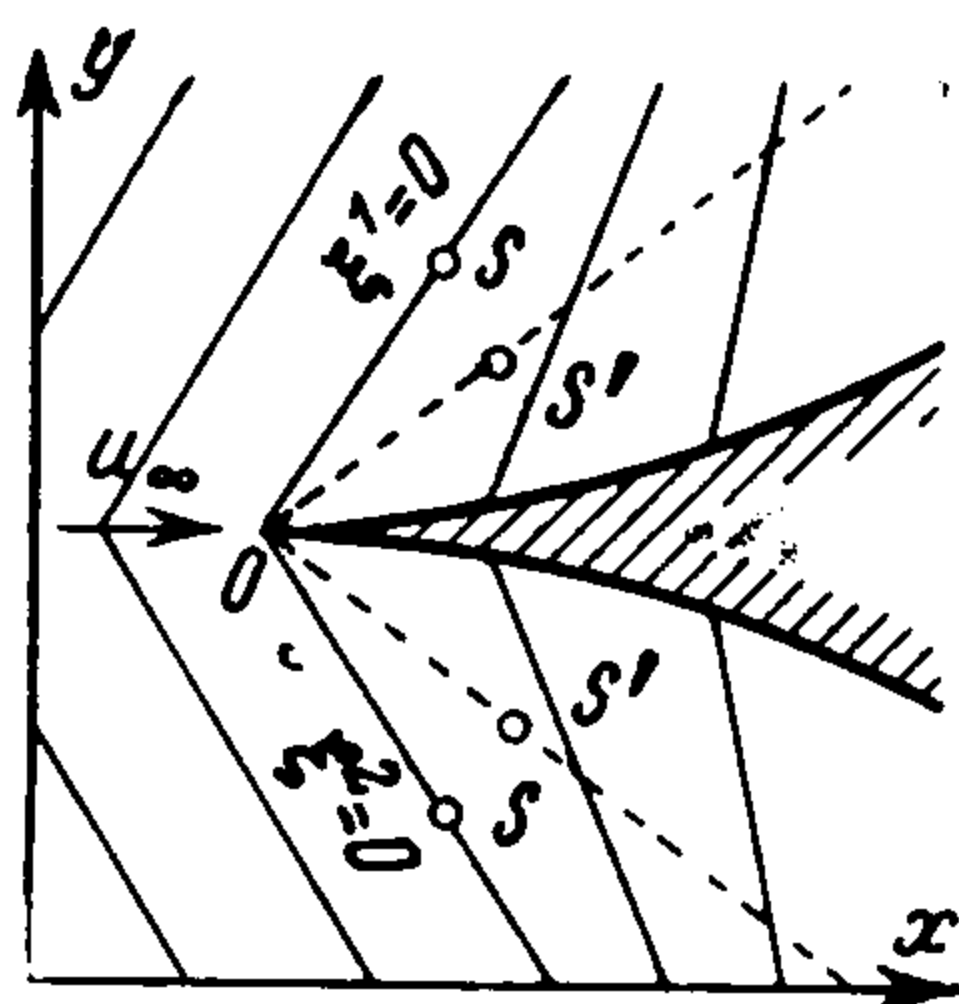
Энтальпия h , скорость звука a , функции ω_k и прочие термодинамические величины определяются теми же соотношениями, что и раньше.

Характеристики $\xi^1 = \text{const}$ — для внешней задачи и $\xi^2 = \text{const}$ — для внутренней показаны на фиг. 3 сплошными линиями. В каждом случае на начальной характеристике, выходящей из точки O и ограничивающей область невозмущенного течения, положим $\xi^i = 0$. Производным, сохраняющим непрерывность на начальной характеристике, и параметрам газа при $\xi^i = 0$ припишем индекс ∞ , как и в нестационарном случае,

$$v_\infty = \omega_{k\infty} = u_{y\infty} = v_{y\infty} = p_{y\infty} = \rho_{y\infty} = a_{y\infty} = q_{l,y\infty} = q_{l,\xi\infty} = 0 \quad (3.4)$$

Выберем ξ^i на каждой характеристике i -го семейства равным $(x - x_0)$ в точках ее пересечения с образующей тела, если характеристика лежит справа от начальной, и с прямой $y = y_0$ — для характеристик, расположенных слева от нее. При этом область возмущенного течения дается неравенством $\xi^i > 0$, а в точке O при $\xi^i = +0$ будет

$$x_{\xi_0} = 1, \quad v_{\xi_0} = u_\infty Y_0'' \quad (3.5)$$



Фиг. 3

В рассматриваемом случае точки пересечения характеристик, которые по-прежнему назовем особыми, определяются равенством

$$x_\xi = 0$$

Условие для определения координат особой точки, принадлежащей начальной характеристике, находится тем же путем, что и в нестационарном случае.

Из (3.3) и (3.4) имеем при $\xi^i = \mp 0$:

$$\begin{aligned} \rho_\xi &= \frac{1}{a_\infty^2} p_\xi, & u_\xi &= -\frac{1}{\rho_\infty u_\infty} p_\xi, & v_\xi &= \pm \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{\rho_\infty u_\infty} p_\xi \\ a_\xi &= \frac{a_{\rho\infty} + a_\infty^2 a_{p\infty}}{a_\infty^2} p_\xi, & p_{\xi y} &= \left(-\frac{v}{2y} \pm \lambda_\infty \right) p_\xi, & x_{\xi y} &= \mp \alpha_\infty \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{\rho_\infty u_\infty^2} p_\xi \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\left(\lambda = \frac{u}{\sqrt{u^2 - a^2}} \sum_{k=1}^n \frac{h_k (\omega_{l,\rho} + a^2 \omega_{kp})}{2\tau_k a h_\rho}, \quad \alpha = \frac{u^2 (a + \rho a_\rho + \rho a^2 a_p)}{a^3 (u^2 - a^2)} \right)$$

где $M = w/a$ — число Маха. Верхний (нижний) знак здесь и далее относится к внешней (внутренней) задаче.

Интегрируя два последних уравнения из (3.6) с учетом начальных условий (3.5), найдем, что при $\xi^i = +0$

$$p_\xi = \pm Y_0'' \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\frac{y_0}{y} \right)^{v/2} \exp [\pm \lambda_\infty (y - y_0)]$$

$$x_\xi = 1 - Y_0'' \alpha_\infty \Phi(v, y, y_0, \lambda_\infty)$$

причем Φ совпадает с аналогичной функцией в (2.10).

Формулы для p_ξ и x_ξ отличаются от (2.9) и (2.10) лишь обозначениями и несущественными положительными множителями в выражениях для p_ξ , α и λ . Поэтому все выводы предыдущего пункта, относящиеся к $\nu = 0$ и 1, сохраняются и для рассматриваемого случая (фигурирующая в выводах равновесная характеристика на фиг. 3 также дана штрихами). Если заменить t на x , r на y и R на Y , то сохраняются и следующие за (2.10) формулы.

В заключение заметим, что для совершенного газа

$$\alpha_\infty = \frac{(\kappa + 1) M_\infty^4}{2(M_\infty^2 - 1)}, \quad \lambda_\infty = 0$$

и (2.14) приводит к выражениям для y_s , полученным в [9,10].

Поступила 14 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. E a r n s h a w S. On the mathematical theory of sound. Philos. Trans. Roy. Soc., London, A, 1860, vol. 150, part 1, pp. 133—148.
2. H u g o n i o t H. Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps, et spécialement dans les gaz parfaits. J. de l'École Polytechnique, 1887, No. 57, pp. 3—97; 1889, No. 58, pp. 1—125.
3. R a y l e i g h O. M. Aerial plane waves of finite amplitude. Proc. Roy. Soc., A, 1910, vol. 84, No. 570, pp. 247—284.
4. P i l l o w A. F. The formation and growth of shock waves in the one-dimensional motion of a gas. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1949, vol. 45, part 4, pp. 558—586.
5. К у р а н т Р., Ф р и д р и х с К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
6. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1954.
7. J e f f r e y A. The development of jump discontinuities in nonlinear hyperbolic systems of equations in two independent variables. Arch. Rat. Mech. Anal., 1963, vol. 14, No. 1, pp. 27—37.
8. J e f f r e y A. On the formation of a converging shock wave in a gas of variable density. J. Math. Anal. Appl., 1966, vol. 13, No. 1, pp. 179—193.
9. M e y e r R. E. The method of characteristics for problems compressible flow involving two independent variables. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1948, vol. 1., part 2, pp. 196—219; part 4, pp. 451—469. (Русск. перев.: Газовая динамика. Сб. статей. Изд-во иностр. лит., 1950, стр. 7—57).
10. J o h a n n e s e n N. H. Experiment on two-dimensional supersonic flow in corners and over concave surfaces. Philos. Mag., 1952, vol. 43, No. 340, pp. 568—580. (Русск. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1953, № 3, стр. 33—44).
11. B ü r g e r W. Zur Entstehung von Verdichtungsstößen beim «Kolbenversuch» in Gasen mit thermodynamischen Relaxation, Z. angew. Math. Mech., 1966, Bd. 46, Hft. 2, S. 149—151.
12. R a r i t y B. S. H. On the breakdown of characteristics solutions in flows with vibrational relaxation. J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, part 1, pp. 49—57.
13. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
14. L a x P. The initial problem for nonlinear hyperbolic equations in two independent variables. Ann. Math. Stud., 1954, vol. 33, pp. 211—229.
15. J e f f r e y A., T a n i u t y T. Nonlinear wave propagation. N. Y., Acad. Press, 1964.
16. К р а й к о А. Н. Исследование слабо возмущенных сверхзвуковых течений при произвольном числе неравновесных процессов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4, стр. 661—673.