

**ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ  
ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ  
РЕАЛЬНОГО ГАЗА**

**В. Н. Диесперов, О. С. Рыжов**

(Москва)

В работе [1] были найдены асимптотические законы затухания возмущений, вносимых телами вращения в равномерный звуковой поток диссипирующего газа. Эти законы оказались отличными от тех, которые получаются, если положить равными нулю коэффициенты вязкости и теплопроводности среды [2-5]. Выводы работы [1] основывались на разложении искомых функций в ряды по двум независимым малым параметрам; один из них характеризовал величину продольной составляющей скорости возмущений, другой — поперечной. Точной зависимости между указанными малыми параметрами теория первого приближения не позволяет установить, она дает лишь оценку их отношения. Эта трудность устраняется в теории второго приближения.

**§ 1. Анализ уравнений.** Пусть  $x$  и  $r$  обозначают оси цилиндрической системы координат,  $v_x$  и  $v_r$  — составляющие вектора скорости вдоль этих осей,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $s$  — удельную энтропию,  $T$  — температуру,  $\lambda_1$  — коэффициент вязкости,  $\lambda_2$  — коэффициент второй вязкости,  $k$  — коэффициент теплопроводности. Предполагая движение газа симметричным относительно оси  $x$ , запишем уравнения неразрывности, Навье — Стокса и переноса тепла в виде [6]

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\lambda_1 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left( \lambda_2 - \frac{2}{3} \lambda_1 \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \lambda_1 \left( \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \right] + \frac{\lambda_1}{r} \left( \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

$$\rho \left( v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_1 \left( \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ 2\lambda_1 \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left( \lambda_2 - \frac{2}{3} \lambda_1 \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) \right] + \frac{2\lambda_1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right) \quad (1.3)$$

$$\rho T \left( v_x \frac{\partial s}{\partial x} + v_r \frac{\partial s}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + 2\lambda_1 \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{v_r}{r} \right)^2 \right] + \left( \lambda_2 - \frac{2}{3} \lambda_1 \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right)^2 \quad (1.4)$$

Из этой системы энтропию и температуру можно исключить при помощи термодинамических соотношений [7]

$$ds = \frac{c_p}{\alpha \rho a^2 T} (dp - a^2 d\rho), \quad dT = \frac{1}{\alpha \rho a^2} (\kappa dp - a^2 d\rho) \quad (1.5)$$

$$\left( \alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \quad V = \frac{1}{\rho}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} \right)$$

Здесь  $V = 1 / \rho$  означает удельный объем,  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения,  $a$  — адиабатическую скорость звука,  $c_p$  — удельную теплоемкость при постоянном давлении,  $c_v$  — удельную теплоемкость при постоянном объеме. При решении задач газовой динамики коэффициенты вязкости и теплопроводности среды часто принимают зависящими только от температуры. Это допущение будет использовано в дальнейшем. Что касается термодинамических переменных, то согласно формулам (1.5) за независимые выбирают давление и плотность, а остальные являются их функциями.

Предположим, что в рассматриваемой области пространства значения всех параметров газа мало отклоняются от соответствующих значений в набегающем равномерном установившемся потоке. Будем считать скорость его частиц по величине совпадающей со скоростью звука и направленной вдоль оси  $x$ . Значения параметров среды в невозмущенном состоянии отметим звездочкой, а характерную длину в направлении оси  $x$  обозначим через  $L$ . Исходя из результатов работы [1], введем следующие независимые безразмерные переменные и разложения для искомых функций:

$$\begin{aligned} x &= Lx', & r &= (L / \Delta) r' & (1.6) \\ v_x &= a_* [1 + \varepsilon (v_{x1} + \delta v_{x2} + \dots)], & v_r &= \varepsilon \Delta a_* (v_{r1} + \delta v_{r2} + \dots) \\ \rho &= \rho_* [1 + \varepsilon (\rho_1 + \delta \rho_2 + \dots)], & p &= p_* [1 + \varepsilon (p_1 + \delta p_2 + \dots)] \end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon$ ,  $\delta$  и  $\Delta$  — числовые параметры, которые по величине значительно меньше единицы. При подстановке соотношений (1.6) в систему уравнений (1.1) — (1.4) получаются три безразмерных коэффициента: числа Рейнольдса и число Пекле

$$N_{Re1} = \frac{\rho_* a_* L}{\lambda_{1*}}, \quad N_{Re2} = \frac{\rho_* a_* L}{\lambda_{2*}}, \quad N_{Pe} = \frac{\rho_* a_* c_{p*} L}{k_*}$$

Эти числа вычисляются по значениям газодинамических функций в набегающем звуковом потоке. Будем считать, что обратные величины этих чисел имеют одинаковый порядок и значительно меньше единицы. При выводе приближенных уравнений во всех соотношениях будем удерживать только члены первого и второго порядка, пренебрегая членами, имеющими более высокий порядок малости.

После подстановки формул (1.6) в уравнение неразрывности получим<sup>1</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 + v_{x1}) + \varepsilon \frac{\partial \rho_1 v_{x1}}{\partial x} + \delta \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 + v_{x2}) + \Delta^2 \left( \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + \frac{v_{r1}}{r} \right) = 0 \quad (1.7)$$

Из проекции (1.2) уравнения Навье — Стокса на ось  $x$  следует

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \left( v_{x1} + \frac{p_*}{\rho_* a_*^2} p_1 \right) + \varepsilon (\rho_1 + v_{x1}) \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} + \\ &+ \delta \frac{\partial}{\partial x} \left( v_{x2} + \frac{p_*}{\rho_* a_*^2} p_2 \right) - \frac{1}{N_{Re}} \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

<sup>1</sup> Штрихи над независимыми безразмерными переменными здесь и в дальнейшем опускаем.

Фигурирующее здесь суммарное число Рейнольдса  $N_{Re}$  связано с так называемой «продольной вязкостью»

$$\frac{1}{N_{Re}} = \frac{4}{3} \frac{1}{N_{Re1}} + \frac{1}{N_{Re2}}$$

а обратная величина этого числа в силу сделанных выше предположений значительно меньше единицы.

Из проекции (1.3) уравнения Навье — Стокса на ось  $r$  выводим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{r1}}{\partial x} + \frac{p_*}{\rho_* a_*^2} \frac{\partial p_1}{\partial r} + \varepsilon (\rho_1 + v_{x1}) \frac{\partial v_{r1}}{\partial x} + \delta \left( \frac{\partial v_{r2}}{\partial x} + \frac{p_*}{\rho_* a_*^2} \frac{\partial p_2}{\partial r} \right) - \\ - \frac{1}{N_{Re}} \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial x \partial r} + \frac{1}{N_{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_{x1}}{\partial r} - \frac{\partial v_{r1}}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Приравнявая нулю главные члены в уравнениях (1.7) и (1.8) и интегрируя полученные выражения, имеем

$$\rho_1 = \frac{p_*}{\rho_* a_*^2} p_1 = -v_{x1} \quad (1.10)$$

Написанные формулы позволяют упростить уравнения второго приближения

$$\delta \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 + v_{x2}) = 2\varepsilon v_{x1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} - \Delta^2 \left( \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + \frac{v_{r1}}{r} \right) \quad (1.11)$$

$$\delta \left( v_{x2} + \frac{p_*}{\rho_* a_*^2} p_2 \right) = \frac{1}{N_{Re}} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} \quad (1.12)$$

Обратимся к уравнению (1.9). Подставляя в него функциональные зависимости, которые задаются соотношениями (1.10) и (1.12), приходим к выводу, что рассматриваемые течения являются безвихревыми не только в первом [1], но и во втором приближениях

$$\frac{\partial v_{x1}}{\partial r} = \frac{\partial v_{r1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_{x2}}{\partial r} = \frac{\partial v_{r2}}{\partial x} \quad (1.13)$$

При рассмотрении уравнения переноса тепла влияние диссипативных факторов нужно учесть уже в первом приближении. Это уравнение нуждается в предварительном преобразовании с тем, чтобы исключить величины первого порядка малости, связанные с переносом массы и импульса вещества. Обозначим через  $L(k, \lambda_1, \lambda_2)$  правую часть уравнения (1.4), а через  $L_x(\lambda_1, \lambda_2)$  и  $L_r(\lambda_1, \lambda_2)$  — соответственно правые части уравнений (1.2) и (1.3) без первых членов. Требуемое соотношение удобно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho \left[ (v_x^2 - a^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x v_r \left( \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) + (v_r^2 - a^2) \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{a^2 v_r}{r} \right] = \\ = v_x L_x(\lambda_1, \lambda_2) + v_r L_r(\lambda_1, \lambda_2) - \frac{\alpha a^2}{c_p} L(k, \lambda_1, \lambda_2) \end{aligned} \quad (1.14)$$

В коэффициенты полученного уравнения входит скорость звука  $a$ . При ее разложении в ряд Тэйлора проще всего использовать в качестве независимых переменных давление и энтропию, так как изменение послед-

ней в поле возмущенного течения является величиной более высокого порядка малости по сравнению с изменением всех остальных термодинамических функций. Учитывая это замечание, пишем (1.15)

$$a = a_* + \left(\frac{\partial a}{\partial p_*}\right)_s (p - p_*) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial p_*^2}\right)_s (p - p_*)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial s_*}\right)_p (s - s_*) + \dots$$

Изменение энтропии легко найти при помощи уравнения (1.4), в котором нужно удерживать только главные члены. В исходных физических переменных

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{N_{\text{Pe}}} \frac{c_{p*} L}{T_*} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Интегрирование последнего равенства с учетом формул (1.5) и (1.10) дает

$$s = s_* \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{N_{\text{Pe}}} \frac{c_{p*} (\kappa_* - 1)}{\alpha_* s_* T_*} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} \right]$$

Введем в рассмотрение безразмерные коэффициенты

$$m_1 = \frac{1}{2\rho^3 a^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_s, \quad m_2 = \frac{1}{2\rho^4 a^2} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3}\right)_s \quad (1.16)$$

характеризующие процесс адиабатического сжатия газа, и коэффициент

$$m_3 = \frac{c_p (\kappa - 1)}{\alpha a T} \left(\frac{\partial a}{\partial s}\right)_p \quad (1.17)$$

показывающий, как быстро возрастает скорость звука с возрастанием энтропии при постоянном давлении. Пусть число Прандтля

$$N_{\text{Pr}} = \frac{N_{\text{Pe}}}{N_{\text{Re}}}$$

означает отношение чисел Пекле и Рейнольдса; согласно сделанным выше предположениям оно будет порядка единицы. В принятых обозначениях разложение (1.15) для скорости звука можно представить как

$$a = a_* \left[ 1 - \varepsilon (m_{1*} - 1) v_{x1} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 (3m_{1*}^2 + m_{2*}) v_{x1}^2 - \varepsilon \delta (m_{1*} - 1) v_{x2} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon}{N_{\text{Re}}} \left( m_{1*} - 1 - \frac{m_{3*}}{N_{\text{Pr}}} \right) \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} \right]$$

Упростим теперь уравнение (1.14). Кроме введенных выше коэффициентов (1.16) и (1.17), удобно использовать еще следующие безразмерные термодинамические параметры:

$$m_4 = \frac{\alpha a^2}{c_p}, \quad m_5 = \frac{c_p (\kappa - 1)^2}{\alpha^2 a^2} \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{\alpha a^2}{c_p}\right)_s$$

и параметры

$$\mu_1 = \frac{\kappa - 1}{\alpha} \frac{4/3 d\lambda_1/dT + d\lambda_2/dT}{4/3\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$\mu_2 = \frac{\rho (\kappa - 1)}{k} \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{k}{\rho}\right)_s, \quad \mu_3 = \frac{\rho a^2 (\kappa - 1)}{k} \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{\kappa k}{\rho a^2}\right)_s$$

которые характеризуют зависимость коэффициентов вязкости и теплопроводности вещества от температуры. Порядок всех коэффициентов  $m_1 - m_5$  и  $\mu_1 - \mu_3$  будет считаться равным единице. Результат преобразования уравнения (1.14) дадим сразу в окончательной форме, которая получается, если перейти от плотности и давления газа к проекциям вектора возмущенной скорости на оси  $x$  и  $r$  при помощи соотношений (1.10) и (1.13). Естественно, это не самая общая форма искомого уравнения, но она достаточна для поставленных целей и сравнительно проста.

Итак, имеем

$$\begin{aligned}
& 2\epsilon m_{1*} v_{x1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} - \Delta^2 \left( \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + \frac{v_{r1}}{r} \right) - \frac{1}{N_{Re}} \left( 1 + \frac{\kappa_* - 1}{N_{Pr}} \right) \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial x^2} + \\
& + \epsilon^2 (2m_{1*}^2 + m_{2*}) v_{x1}^2 \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} + 2\epsilon \delta m_{1*} \left( v_{x1} \frac{\partial v_{x2}}{\partial x} + v_{x2} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} \right) + \\
& + \epsilon \Delta^2 \left[ 2v_{r1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial r} + (2m_{1*} - 1) v_{x1} \left( \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + \frac{v_{r1}}{r} \right) \right] - \delta \Delta^2 \left( \frac{\partial v_{r2}}{\partial r} + \frac{v_{r2}}{r} \right) - \\
& - \frac{\epsilon}{N_{Re}} \left[ \left( 1 - \mu_{1*} + \frac{v_{1*}}{N_{Pr}} \right) v_{x1} \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial x^2} - \left( v_{2*} - \frac{v_{3*}}{N_{Pr}} \right) \left( \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} \right)^2 \right] - \\
& - \frac{\delta}{N_{Re}} \left( 1 + \frac{\kappa_* - 1}{N_{Pr}} \right) \frac{\partial^2 v_{x2}}{\partial x^2} - \frac{\Delta^2}{N_{Re}} \left( 1 + \frac{\kappa_* - 2}{N_{Pr}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + \frac{v_{r1}}{r} \right) + \\
& + \frac{1}{N_{Re}^2} \frac{\kappa_*}{N_{Pr}} \frac{\partial^3 v_{x1}}{\partial x^3} = 0 \tag{1.18}
\end{aligned}$$

$$(v_1 = 2 + \mu_2 - \mu_3 - m_5, v_2 = 2 + \mu_1 + m_4 - 2m_1, v_3 = 2 + \mu_2 - \mu_3 - 2m_3)$$

Дальнейшее преобразование уравнения (1.18) может быть произведено различными способами, выбор которых зависит от относительной величины входящих в него малых параметров  $\epsilon$ ,  $\delta$ ,  $\Delta$  и  $N_{Re}^{-1}$ . Анализ уравнений первого приближения был дан в работе [1]. Основываясь на ее результатах, построим во втором приближении картину обтекания тела вращения, помещенного в звуковой поток диссипирующего газа.

**§ 2. Асимптотические законы затухания возмущений.** При исследовании поля скоростей на очень больших расстояниях от конечного тела можно считать, что  $\epsilon \ll \Delta^2 \sim N_{Re}^{-1}$ . Полагая для простоты

$$\Delta^2 = \frac{1}{N_{Re}} \left( 1 + \frac{\kappa_* - 1}{N_{Pr}} \right)$$

выводим из (1.18) недостающее уравнение первого приближения [1]

$$\frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial x^2} + \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + \frac{v_{r1}}{r} = 0 \tag{2.1}$$

которое вместе с уравнением (1.13) составляет замкнутую систему. Ее решение, определяющее асимптотические законы затухания возмущений вдали от тела с круглым поперечным сечением, имеет вид

$$v_{x1} = r^{-n} f_1(\xi), \quad v_{r1} = r^{-n-1/3} g_1(\xi), \quad \xi = xr^{-2/3} \tag{2.2}$$

В формулах (2.2) показатель степени  $n = 4/3$ . Если через  $\Gamma(\alpha)$  обозначить гамма-функцию Эйлера, а через  $\Phi(\beta, \gamma; \eta)$  — конфлюэнтную ги-

пергеометрическую функцию, то [1]

$$f_1 = c_1 \left[ \Phi \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \eta \right) - \frac{\Gamma^2(1/3)}{2\Gamma^2(2/3)} \eta^{2/3} \Phi \left( \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \eta \right) \right] \quad (2.3)$$

$$g_1 = 2^{1/3} c_1 \left[ \eta^{1/3} \Phi \left( \frac{5}{3}, \frac{4}{3}; \eta \right) - \frac{\Gamma^2(1/3)}{6\Gamma^2(2/3)} \Phi \left( \frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \eta \right) \right] \quad (2.4)$$

$$\eta = - \left( \frac{4}{27} \right) \xi^3$$

Интеграл (2.2) — (2.4) отвечает точечному источнику, помещенному в начало координат и обтекаемому равномерным на бесконечности звуковым потоком. Постоянная  $c_1$  пропорциональна мощности  $Q$  источника. Как следует из изложенного, теория первого приближения позволяет получить лишь оценку  $\varepsilon / \Delta \ll \Delta$  отношения двух малых параметров  $\varepsilon$  и  $\Delta$ . Чтобы получить точную зависимость между ними, необходимо рассмотреть структуру поля скоростей во втором приближении.

На основании формул (2.1) и (2.2) упростим уравнение (1.18), оставляя в нем только члены одного порядка малости

$$\delta \Delta^2 \left( \frac{\partial^2 v_{x2}}{\partial x^2} + \frac{\partial v_{r2}}{\partial r} + \frac{v_{r2}}{r} \right) = 2\varepsilon m_{1*} v_{x1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} - \frac{\Delta^2}{N_{Re}} \left( 1 + \frac{\kappa_* - 2}{N_{Pr}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + \frac{v_{r1}}{r} \right] + \frac{1}{N_{Re}^2} \frac{\kappa_*}{N_{Pr}} \frac{\partial^3 v_{x1}}{\partial x^3} \quad (2.5)$$

Все коэффициенты полученного уравнения должны быть порядка  $\varepsilon$ . Отсюда заключаем, что  $\Delta \sim \varepsilon^{1/4}$ ,  $\delta \sim \varepsilon^{1/2}$  и  $N_{Re}^{-1} \sim \varepsilon^{1/2}$ . Эти зависимости находятся в полном согласии с предыдущими результатами. Численные значения коэффициентов в уравнении (2.5) оказываются наиболее простыми при

$$\Delta = \varepsilon^{1/4} (2m_{1*})^{1/4} A^{-1/4} \left( 1 + \frac{\kappa_* - 1}{N_{Pr}} \right)^{1/2}, \quad \delta = \varepsilon^{1/2} (2m_{1*})^{1/2} A^{1/2} \left( 1 + \frac{\kappa_* - 1}{N_{Pr}} \right)^{-1} \\ \frac{1}{N_{Re}} = \varepsilon^{1/2} (2m_{1*})^{1/2} A^{-1/2}, \quad A = \frac{\kappa_*}{N_{Pr}} + \left( 1 + \frac{\kappa_* - 2}{N_{Pr}} \right) \left( 1 + \frac{\kappa_* - 1}{N_{Pr}} \right)$$

Заменяя в уравнении (2.5) выражение в квадратных скобках через вторую производную  $\partial^2 v_{x1} / \partial x^2$  функции  $v_{x1}(x, r)$ , находим

$$\frac{\partial^2 v_{x2}}{\partial x^2} + \frac{\partial v_{r2}}{\partial r} + \frac{v_{r2}}{r} = v_{x1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial^3 v_{x1}}{\partial x^3} \quad (2.6)$$

Вместе со вторым уравнением (1.13) уравнение (2.6) образует замкнутую систему, которая служит для определения составляющих вектора возмущенной скорости в проекции на оси  $x$  и  $r$ . Отметим, что однородные уравнения, соответствующие названной системе, в точности совпадают с первым из уравнений (1.13) и уравнением (2.1) для функций первого приближения  $v_{x1}(x, r)$  и  $v_{r1}(x, r)$ .

Это свойство значительно облегчает интегрирование второго из уравнений (1.13) и уравнения (2.6).

После того как их решение получено, функции  $\rho_2(x, r)$  и  $p_2(x, r)$  находятся из соотношений

$$\rho_2 = \frac{1}{A} \left( 1 + \frac{\kappa_* - 1}{N_{Pr}} \right)^2 \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} - v_{x2}$$

$$p_2 = \frac{\rho_* a_*^2}{p_*} \left[ \frac{1}{A} \left( 1 + \frac{\kappa_* - 1}{N_{Pr}} \right) \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} - v_{x2} \right]$$

следующих из (1.11) и (1.12). Обратимся теперь непосредственно к интегрированию второго из уравнений (1.13) и уравнения (2.6). Стоящая в правой части уравнения (2.6) комбинация

$$v_{x1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial^3 v_{x1}}{\partial x^3} = \frac{1}{r^{10/3}} \left( f_1 \frac{df_1}{d\xi} + \frac{d^3 f_1}{d\xi^3} \right)$$

где функция  $f_1(\xi)$  задается соотношениями (2.3) и (2.4). Отсюда следует, что величины  $v_{x2}(x, r)$  и  $v_{r2}(x, r)$  можно по-прежнему искать в форме (2.2) с  $n = 2$ . Функции  $f_2(\xi)$  и  $g_2(\xi)$  удовлетворяют линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2 f_2}{d\xi^2} - \frac{2}{3} \xi \frac{dg_2}{d\xi} - \frac{4}{3} g_2 = f_1 \frac{df_1}{d\xi} + \frac{d^3 f_1}{d\xi^3}, \quad \frac{2}{3} \xi \frac{df_2}{d\xi} + \frac{dg_2}{d\xi} + 2f_2 = 0 \quad (2.7)$$

Интегрирующим множителем для первого из уравнений (2.7) служит  $\xi$ . Воспользовавшись этим замечанием, после несложных преобразований находим

$$\xi \frac{df_2}{d\xi} - f_2 - \frac{2}{3} \xi^2 g_2 = \omega(\xi), \quad \frac{dg_2}{d\xi} + \frac{8}{3} f_2 + \frac{4}{9} \xi^2 g_2 = -\frac{2}{3} \omega(\xi) \quad (2.8)$$

$$\omega(\xi) = \xi \frac{d^2 f_1}{d\xi^2} - \frac{df_1}{d\xi} + \frac{1}{2} \left[ \xi f_1^2(\xi) - \int_{-\infty}^{\xi} f_1^2(\xi) d\xi \right]$$

Постоянная интегрирования выбрана равной нулю, чтобы иметь возможность удовлетворить естественному условию симметрии потока  $v_r(x, r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$  и  $x < 0$ . Что касается области за телом, то она занята вихревым следом, поэтому при  $r \rightarrow 0$  и  $x > 0$  обе составляющие  $v_x(x, r)$  и  $v_r(x, r)$  вектора возмущенной скорости, вообще говоря, могут иметь особенности несмотря на отсутствие таковых в теории первого приближения. Обозначим через  $f_2^0(\xi)$  и  $g_2^0(\xi)$  функции, которые удовлетворяют однородным уравнениям, соответствующим системе (2.8). Построенные при помощи этих функций компоненты вектора возмущенной скорости должны обращаться в нуль на бесконечности, за исключением области вихревого следа. Решение однородной системы уравнений (2.8), которое удовлетворяет последнему условию, легко написать сразу, если воспользоваться результатами работы [1], причем на самом деле оно регулярно, когда  $r \rightarrow 0$  при любых значениях  $x \neq 0$ .

С точностью до произвольного множителя имеем

$$f_2^0 = \frac{df_1}{d\xi}, \quad g_2^0 = \frac{dg_1}{d\xi}$$

Отсюда на основании правил дифференцирования конфлюэнтных гипергеометрических функций следует:

$$\begin{aligned} f_2^0 &= c_2 \eta^{1/3} \left[ \Phi(4/3, 2/3; \eta) - \frac{6\Gamma^2(2/3)}{\Gamma^2(1/3)} \eta^{1/3} \Phi(5/3, 4/3; \eta) \right] \\ g_2^0 &= 2^{4/3} c_2 \left[ \eta^{2/3} \Phi(7/3, 5/3; \eta) - \frac{\Gamma^2(2/3)}{\Gamma^2(1/3)} \Phi(5/3, 1/3; \eta) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Как и интеграл (2.3), построенное решение допускает простую интерпретацию, а именно, оно соответствует диполю, помещенному в равномерный поток с критической скоростью частиц газа на бесконечности. Постоянная  $c_2$  пропорциональна моменту диполя.

Таким образом, полная система уравнений (2.8) дает решение, описывающее поле скоростей, которое возникает в результате вязкого взаимодействия диполя с набегающим звуковым потоком и порождаемыми источником возмущениями.

Конечно, решение (2.9) можно получить и непосредственно. Исходная система двух уравнений (2.8) эквивалентна одному дифференциальному уравнению второго порядка для функции  $f_2(\xi)$ . Последнее имеет вид

$$\xi^2 \frac{d^2 f_2}{d\xi^2} + 2\xi \left( \frac{2}{9} \xi^3 - 1 \right) \frac{df_2}{d\xi} + 2 \left( \frac{2}{3} \xi^3 + 1 \right) f_2 = \omega_1(\xi) = -2\omega(\xi) + \xi \frac{d\omega}{d\xi} \quad (2.10)$$

Совершив замену независимой переменной согласно (2.4) и сделав подстановку  $f_2^0(\xi) = \eta^{1/3} \psi(\eta)$  в соответствующем (2.10) однородном уравнении, находим, что функция  $\psi(\eta)$  удовлетворяет конфлюэнтному гипергеометрическому уравнению

$$\eta \frac{d^2 \psi}{d\eta^2} + \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \frac{d\psi}{d\eta} - \frac{4}{3} \psi = 0$$

взятому в каноническом виде [8]. Оба линейно независимых интеграла этого уравнения известны, они и образуют представление (2.9) для функции  $f_2^0(\xi)$ .

Знание линейно независимых интегралов однородного уравнения, соответствующего (2.10), позволяет не только подтвердить справедливость формул (2.9), но и найти общее решение исходной системы уравнений (2.8). Для этого проще всего воспользоваться стандартным приемом вариации постоянных.

Предварительно заметим, что каждая из заключенных в квадратные скобки в соотношениях (2.3) и (2.9) линейная комбинация гипергеометрических функций пропорциональна так называемой  $\Psi$  — функции [8], впервые введенной в математическую физику Трикоми.

Асимптотическое представление функции  $\Psi$  при  $\eta \rightarrow \pm \infty$  не содержит экспоненциальных членов.

Поэтому выберем в качестве фундаментальной системы решений соответствующего (2.10) однородного уравнения следующие интегралы:

$$f_2^{01} = \eta^{1/3} \Psi(4/3, 2/3; \eta), \quad f_2^{02} = \eta^{1/3} e^\eta \Psi(-2/3, 2/3; -\eta)$$

Вронсиан выбранной фундаментальной системы решений имеет вид

$$W_1 = \frac{8}{9} \exp \left[ - \int \left( \frac{4}{9} \xi^2 - \frac{2}{\xi} \right) d\xi \right] = \frac{8}{9} \xi^2 e^\eta$$

Теперь имеем

$$f_2 = f_2^0(\xi) - f_2^{01}(\xi) \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\omega_1(\xi) f_2^{02}(\xi)}{\xi^2 W_1(\xi)} d\xi + f_2^{02} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\omega_1(\xi) f_2^{01}(\xi)}{\xi^2 W_1(\xi)} d\xi \quad (2.11)$$

Зная выражение для функции  $f_2(\xi)$ , можно сразу написать формулу, которая будет определять  $g_2(\xi)$ . Однако такая формула получается довольно громоздкой. Выражение для функции  $g_2(\xi)$  легко представить в более наглядном виде, если от исходной системы (2.8) перейти к определяющему ее дифференциальному уравнению второго порядка

$$\begin{aligned} \xi \frac{d^2 g_2}{d\xi^2} + \left( \frac{4}{9} \xi^3 - 1 \right) \frac{dg_2}{d\xi} + \frac{20}{9} \xi^2 g_2 = \\ = \omega_2(\xi) = -2\omega(\xi) - \frac{2}{3} \xi \frac{d\omega}{d\xi} \quad (2.12) \end{aligned}$$

Фундаментальная система решений соответствующего (2.12) однородного уравнения записывается как

$$\begin{aligned} g_2^{01} &= \Psi(5/3, 1/3; \eta) \\ g_2^{02} &= e^\eta \Psi(-4/3, 1/3; -\eta) \end{aligned}$$

с переменной  $\eta$ , по-прежнему задаваемой равенством (2.4), и вронсианом

$$W_2 = -\frac{4}{3} 2^{1/3} \exp \left[ - \int \left( \frac{4}{9} \xi^2 - \frac{1}{\xi} \right) d\xi \right] = -\frac{4}{3} 2^{1/3} \xi e^\eta$$

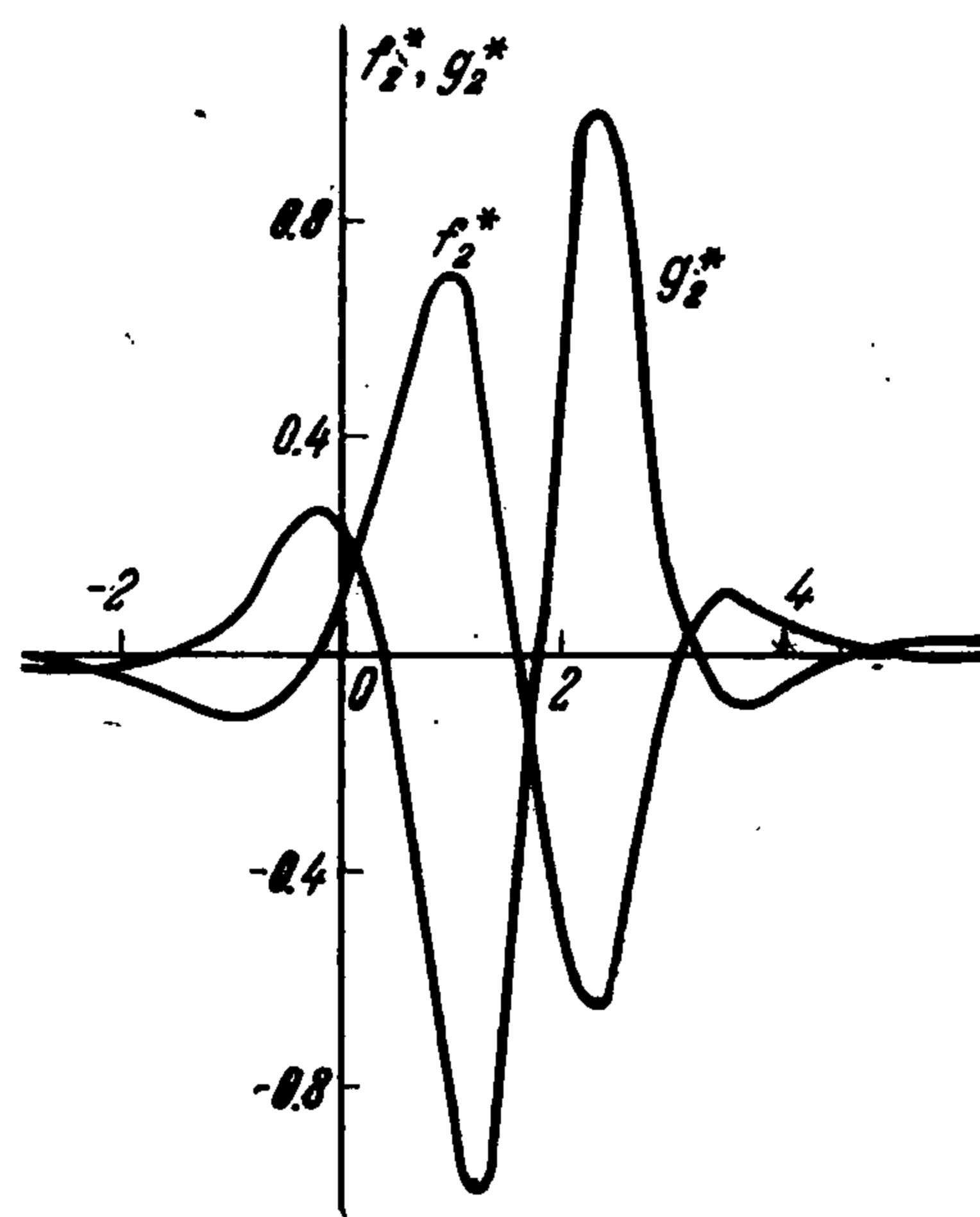
Окончательно находим

$$\begin{aligned} g_2 = \left\{ 1 - \frac{4^{1/3} \Gamma^2(1/3)}{3 \Gamma^2(2/3)} \frac{c_1}{c_2} \left[ 1 + \frac{1}{8} \frac{\Gamma(1/3)}{2^{1/3} \Gamma(2/3)} c_1 \right] \right\} g_2^0(\xi) - \\ - g_2^{01}(\xi) \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\omega_2(\xi) g_2^{02}(\xi)}{\xi W_2(\xi)} d\xi + g_2^{02}(\xi) \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\omega_2(\xi) g_2^{01}(\xi)}{\xi W_2(\xi)} d\xi \quad (2.13) \end{aligned}$$

Свойства функций  $f_1(\xi)$ ,  $g_1(\xi)$ ,  $f_2^0(\xi)$  и  $g_2^0(\xi)$  были изучены в работе [1]. Графики функций  $f_2^*(\xi)$  и  $g_2^*(\xi)$ , которые служат соответственно частными решениями неоднородных уравнений (2.10) и (2.12), показаны на фигуре. Для их построения использовалось непосредственное интегрирование исходной системы дифференциальных уравнений (2.8) с постоянной

$$c_1 = 2^{1/3} \Gamma(2/3) [3\Gamma(1/3)]^{-1}$$

Обращение с явными выражениями (2.11) и (2.13) сопряжено с большими трудностями.



Асимптотические разложения рассматриваемых функций при  $\xi \rightarrow -\infty$  характеризуют поведение компонентов вектора скорости частиц газа вблизи оси симметрии  $r = 0$  и  $x < 0$ .

Как уже указывалось выше, возмущения, которые вносят в равномерный звуковой поток источник и диполь, не имеют особенностей на всей оси  $r = 0$ , кроме точки  $x = 0$ .

Чтобы убедиться в этом, воспользуемся формулами (2.3) и (2.9) и асимптотическим представлением  $\Psi$ -функций [8]. Имеем

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{3\Gamma(1/3)}{2^{1/3}\Gamma(2/3)} c_1 \frac{1}{\xi^2} + \dots, & g_1 &= -\frac{9\Gamma(1/3)}{2^{1/3}\Gamma(2/3)} c_1 \frac{1}{\xi^4} + \dots \\ f_2^0 &= -\frac{9\Gamma(2/3)}{2\Gamma(1/3)} c_2 \frac{1}{\xi^3} + \dots, & g_2^0 &= \frac{27\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} c_2 \frac{1}{\xi^5} + \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Интегральные члены в равенстве (2.13) при  $\xi \rightarrow -\infty$  стремятся к нулю как

$$-\frac{945}{2^{4/3}} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)} c_1 \left( 1 + \frac{1}{20} \frac{\Gamma(1/3)}{2^{1/3}\Gamma(2/3)} c_1 \right) \frac{1}{\xi^8} + \dots$$

поэтому для частных решений  $f_2^*(\xi)$  и  $g_2^*(\xi)$  неоднородных уравнений (2.10) и (2.12) находим

$$\begin{aligned} f_2^* &= \frac{45\Gamma(1/3)}{2^{1/3}\Gamma(2/3)} c_1 \left[ 1 + \frac{1}{8} \frac{\Gamma(1/3)}{2^{1/3}\Gamma(2/3)} c_1 \right] \frac{1}{\xi^6} + \dots \\ g_2^* &= -\frac{18\Gamma(1/3)}{2^{1/3}\Gamma(2/3)} c_1 \left[ 1 + \frac{1}{8} \frac{\Gamma(1/3)}{2^{1/3}\Gamma(2/3)} c_1 \right] \frac{1}{\xi^5} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует, что возмущения продольной составляющей вектора скорости, которые получаются при взаимодействии диполя с источником, при  $x \rightarrow -\infty$  и  $r = 0$  затухают быстрее возмущений в собственном поле диполя. Что касается поперечной составляющей скорости, то вязкое взаимодействие двух особенностей порождает возмущения одного порядка с возмущениями от диполя.

Найдем асимптотические разложения всех функций при  $\xi \rightarrow +\infty$ . Порядок стремления к нулю функций  $f_1(\xi)$ ,  $g_1(\xi)$ ,  $f_2^0(\xi)$  и  $g_2^0(\xi)$  оказывается таким же, что и в соотношениях (2.14), а именно

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{3\Gamma(1/3)}{2^{1/3}\Gamma(2/3)} c_1 \frac{1}{\xi^2} + \dots, & g_1 &= \frac{9\Gamma(1/3)}{2^{1/3}\Gamma(2/3)} c_1 \frac{1}{\xi^4} + \dots \\ f_2^0 &= \frac{9\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} c_2 \frac{1}{\xi^3} + \dots, & g_2^0 &= -\frac{54\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} c_2 \frac{1}{\xi^5} + \dots \end{aligned}$$

Частные же решения  $f_2^*(\xi)$  и  $g_2^*(\xi)$  при  $\xi \rightarrow +\infty$  ведут себя как

$$f_2^* = \frac{9}{4} \frac{1}{\xi^3} \ln \xi \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^2(\xi) d\xi + \dots, \quad g_2^* = \frac{3}{4} \frac{1}{\xi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^2(\xi) d\xi + \dots \quad (2.15)$$

Поэтому вблизи оси симметрии  $r \rightarrow 0$  и  $x > 0$  компоненты скорости имеют особенности  $v_x \sim x^{-3} \ln r$  и  $v_r \sim x^{-2} r^{-1}$ . Их происхождение обусловлено вихревым следом, который всегда образуется за обтекаемым телом. Но в области вихревого следа структура поля скоростей в основном формируется под воздействием тангенциальных, а не нормальных компонентов тензора вязких напряжений [6]. Наоборот, при выводе приближенного соотношения (1.18) из исходных уравнений Навье—Стокса главную роль играли члены, связанные с нормальными напряжениями и продольной составляющей вектора потока тепла. Поэтому соотношение (1.18) и следующие из него уравнения первого и второго приближений (2.1) и (2.6) несправедливы в узкой области за телом. Более того, если бы интегралы уравнений высших приближений не содержали никаких особенностей, то это фактически означало бы возможность построения решения системы уравнений Навье — Стокса, описывающего обтекание конечного тела без образования вихревого следа.

Отметим, что формулы (2.15) отвечают возмущениям, которые вносит в равномерный поток тонкое тело вращения с площадью поперечного сечения  $\sigma(x)$ , отличающейся от постоянной величины на  $\text{const } x^{-1}$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Иными словами, в рассматриваемой теории «площадь вытеснения» в следе за телом аппроксимируется выражением

$$\sigma = b_1 + \frac{b_2}{x} + \dots$$

что согласуется с результатами работы [1]. Постоянные  $b_1$  и  $b_2$  из последнего равенства могут быть выражены через введенную раньше произвольную постоянную  $c_1$ , от величины постоянной  $c_2$  их значения не зависят.

Поступила 22 V 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
2. Guderley K., Yoshihara H. An Axial-Symmetric Transonic Flow Patterns. Quart. Appl. Math., 1951, vol. 8, No. 4.
3. Barish D. T., Guderley K. G. Asymptotic Forms of Shock Waves in Flows over Symmetrical Bodies at Mach. 1, J. Aeronaut. Sci., 1953, vol. 20, No. 7.
4. Фалькович С. В., Чернов И. А. Обтекание тела вращения звуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
5. Müller E. A., Matschat K. Ähnlichkeitslösungen der transsonischen Gleichungen bei der Anström — Machzahl 1. Proc. 11-th internat. congr. of appl. mechan. Munich, 1964.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е, Гостехиздат, 1954.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., «Наука», 1964.
8. Higher Transcendental Functions., vol. 1, McGraw-Hill, N. Y.-Toronto—L., 1953.